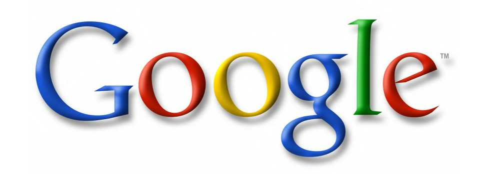
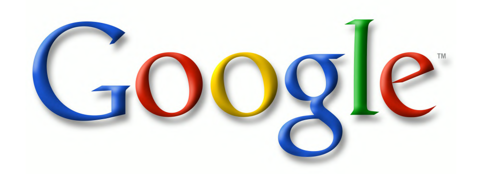
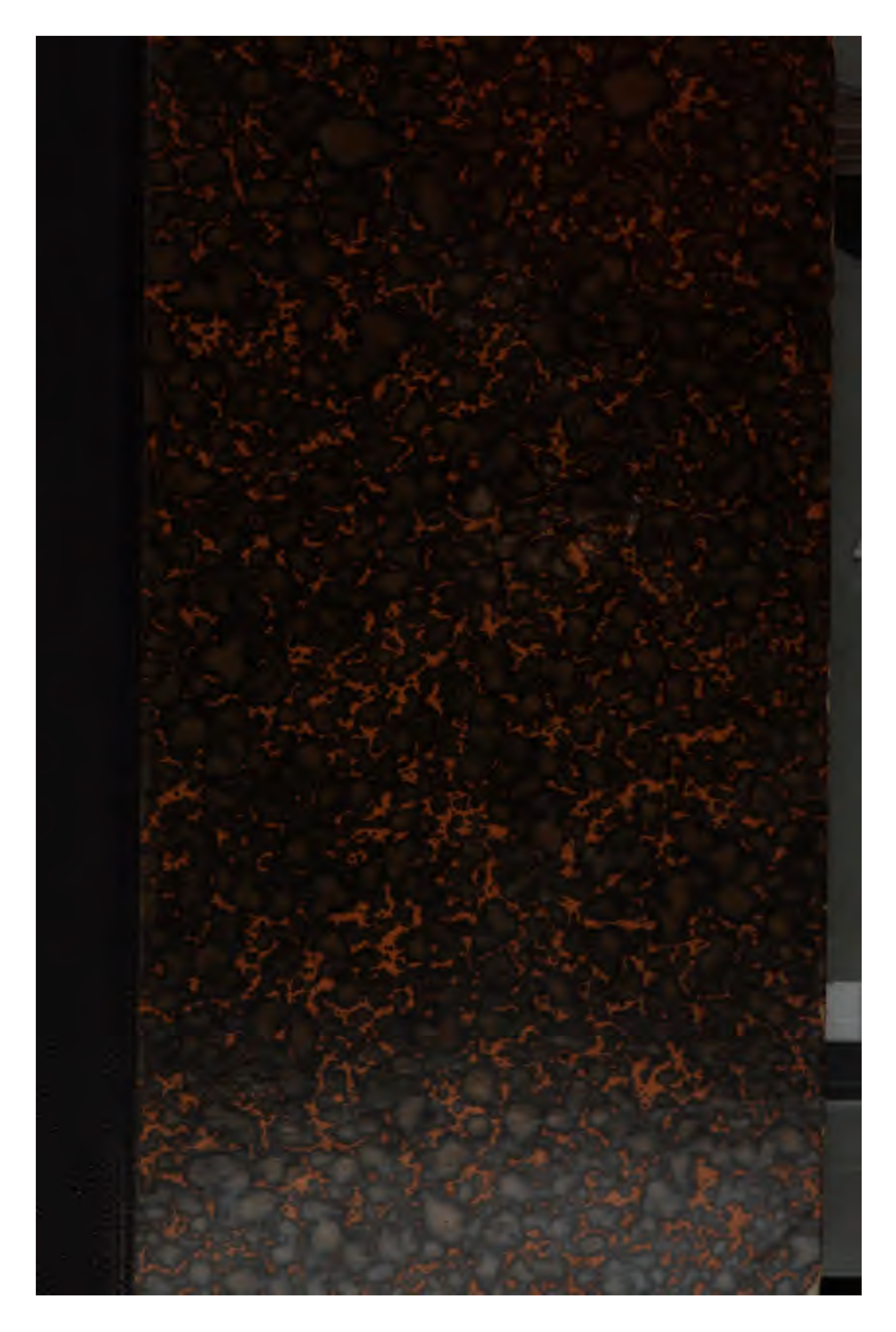
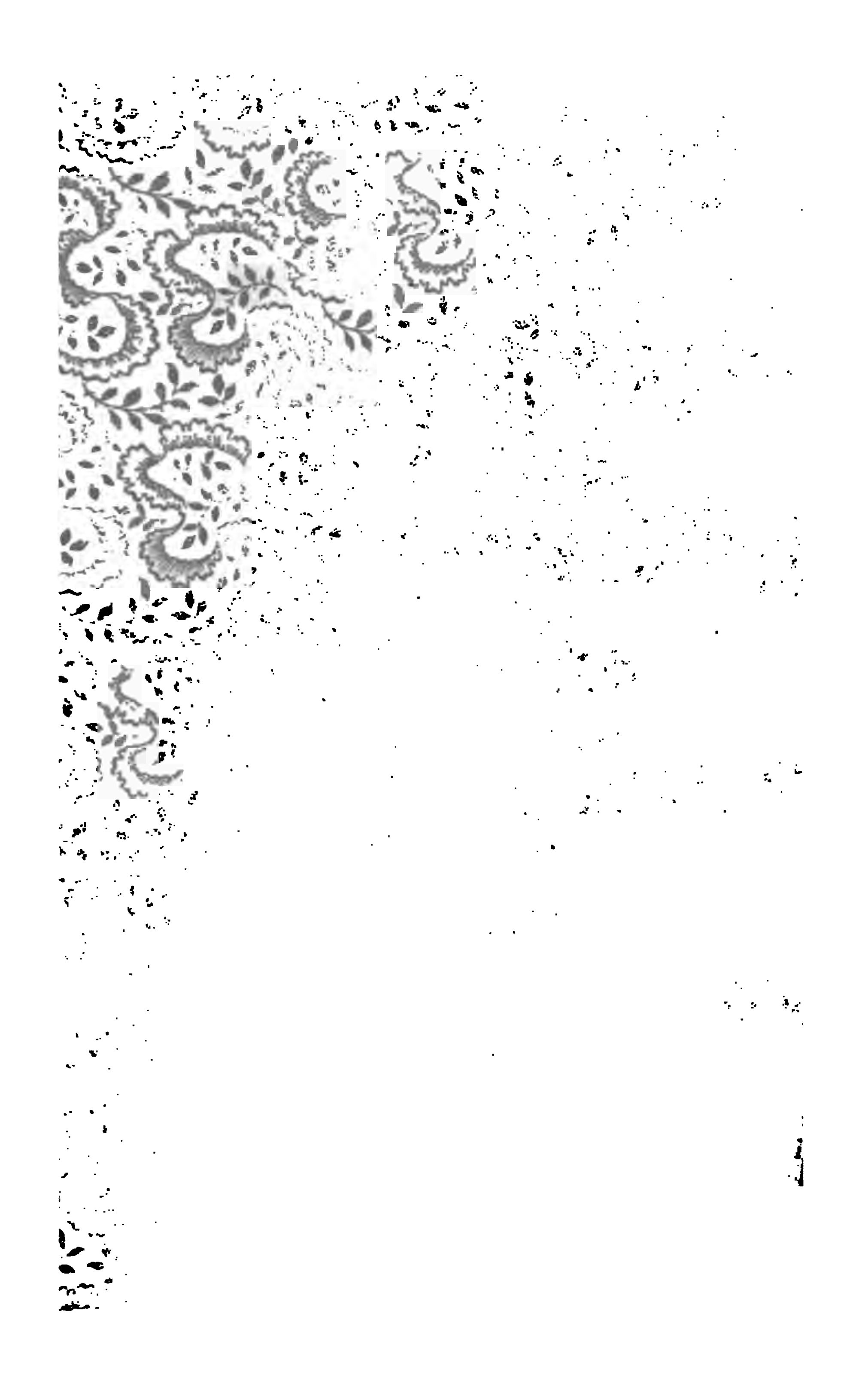


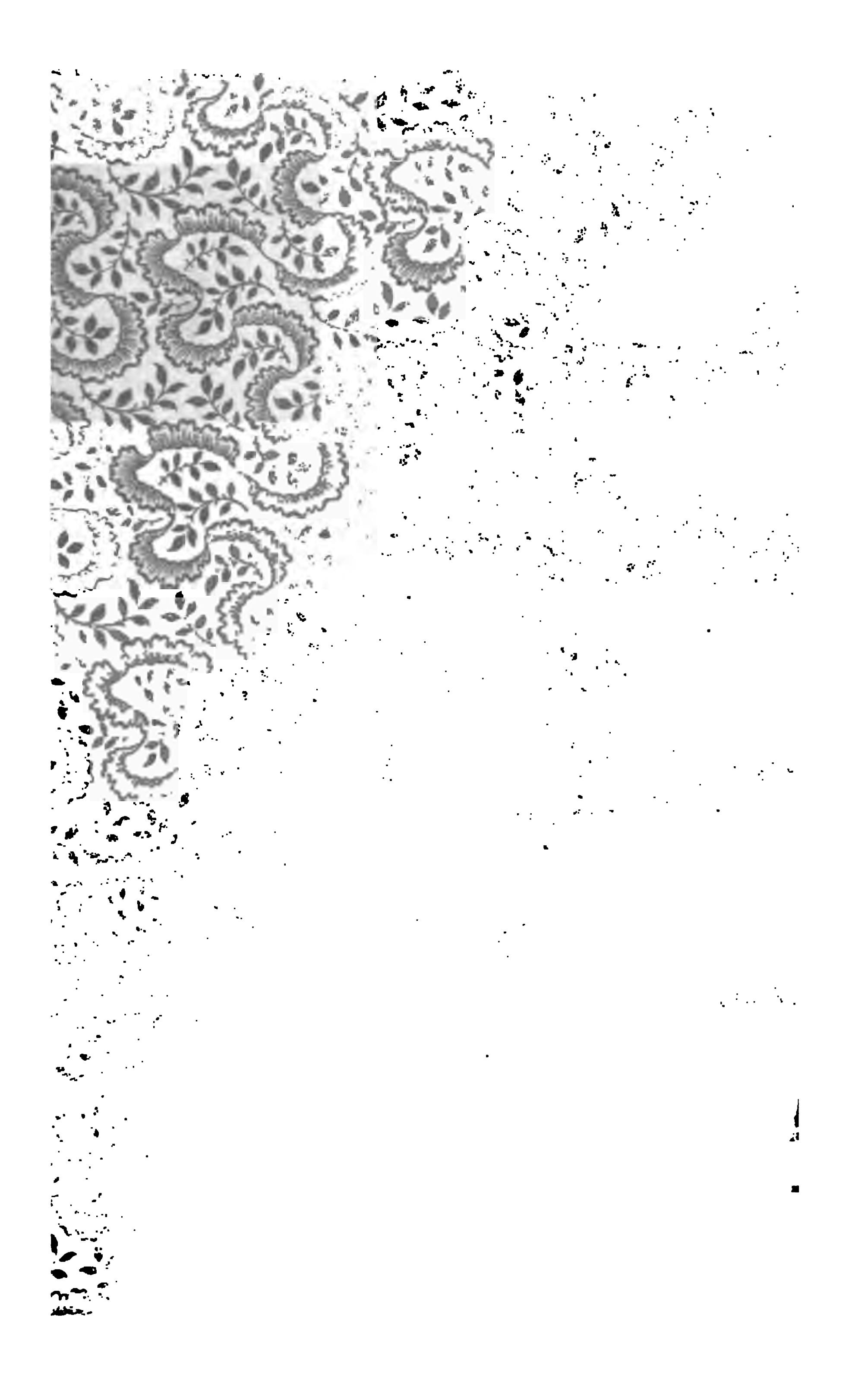









LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

München.

891.

München.
Verlag der K. Akademie.
1892.

In Commission bei G. Franz.

Uebersicht
des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXI
Jahrgang 1891.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 132. Stiftungstages am 21. März 1891.

Seite

C. v. Voit: Nekrologe 139

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1891.

Wahlen 273

Sitzung vom 3. Januar 1891.

Ad. Steinheil: Erläuterungen zu dem Handbuch der angewandten Optik von Ad. Steinheil und E. Voit (Theil I) 1

G. Recknagel: Zur Hygiene der Wohnung 5

W. Dyck: Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. (Mit Tafel I—IV) . 23

Sitzung vom 7. Februar 1891.

C. L. Weber: Zur Messung der magnetischen Inklination . . 59

*A. Voss: Ueber spezielle Differentialinvarianten in der Flächentheorie 59

Sitzung vom 7. März 1891.

C. W. v. Gümbel: Geologische Bemerkungen über die Thermen von Bormio und das Ortlergebirge 79

Seite

N. Rüdinger: Ueber die Umbildung der Lieberkühn'schen Drüsen durch die Solitärfollikel im Wurmfortsatz des Menschen. (Mit Tafel V) 121

Sitzung vom 2. Mai 1891.

E. Lommel: Ueber die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes 181

*S. Finsterwalder: Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder, auf Grund der Seidel'schen Formeln untersucht . . . 180

Sitzung vom 6. Juni 1891.

*C. v. Voit: Ueber die Glykogenbildung nach Aufnahme verschiedener Zuckerarten 189

Sitzung vom 4. Juli 1891.

*Ed. Frhr. v. Haerdtl: Skizzen zu einem speziellen Fall des Problems der drei Körper 189

F. v. Sandberger: Ueber den Erzgang der Grube Sagra Familia in Costarica und dessen Bedeutung für die Theorie der Erzgänge 191

A. Brill: Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle 207

Sitzung vom 7. November 1891.

H. Seeliger: Notiz über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre 239

H. Seeliger: Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre 247

Sitzung vom 5. Dezember 1891.

Leo Königsberger: Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme 275

*W. v. Gümbel: Geognostische Beschreibung von Bayern (Fränkischer Jura). Vierte Abhandlung 274

F. v. Sandberger: Ueber die Erzgänge der Gegend von Freudenstadt und Bulach im württembergischen Schwarzwald . 281

Einsendungen von Druckschriften 221, 319

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. Januar 1891.

1. Herr Ad. Steinheil überreicht der Classe sein mit Herrn Professor Dr. Ernst Voit herausgegebenes „Handbuch der angewandten Optik“ (Theil I) und knüpft daran einige Erläuterungen.

2. Herr M. v. Pettenkofer legt eine Abhandlung des correspondierenden Mitgliedes der Classe, Herrn Professor Dr. Georg Recknagel in Passau „über Bestimmung und Berechnung des Luftwechsels in Wohnräumen“ vor.

3. Herr Walther Dyck hält einen Vortrag: „über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme“.

Erläuterungen zu dem Handbuch der angewandten Optik von Ad. Steinheil und E. Voit.

Von Ad. Steinheil.

(Eingelaufen 3. Januar.)

Das Handbuch der angewandten Optik soll ein Hilfsbuch für den ausführenden Optiker sein, dem zu seinen Arbeiten bislang eine zusammenhängende und die neueren Untersuchungen berücksichtigende Anleitung mangelte. Es darf der Ausspruch Fraunhofer's, dass für den ausübenden Optiker

allein die Dioptrik Klügel's etwas Brauchbares liefere, noch heute als zutreffend bezeichnet werden; obwohl seitdem die Bahn brechenden Arbeiten Fraunhofer's selbst, sodann die eines Bessel, Gauss, Helmholtz, Seidel und anderer erschienen sind. Wir waren bemüht, in dem Handbuche die Resultate dieser Untersuchungen auch demjenigen zugänglich zu machen, der ausgerüstet mit den Hilfsmitteln der Algebra und Trigonometrie sich der Herstellung der optischen Instrumente widmen will.

In den einleitenden Kapiteln geben wir zuerst erprobte Methoden zur Orientirung und numerischen Bestimmung der optischen Eigenschaften der Glassorten.

Sodann stellen wir, auf die analytischen Methoden fussend, die Anschauungen zusammen, welche zur Orientirung über die Eigenschaften der optischen Systeme sowie über die von den Bildern zu erfüllenden Bedingungen dienen.

Hierbei unterlassen wir es, auf eine strenge mathematische Beweisführung einzugehen, indem wir es dem hiefür sich Interessirenden überlassen, in der einschlägigen Literatur sich Rath zu erholen.

Wir schliessen uns in diesem Theile unseres Buches enge an die von Gauss eingeführten Betrachtungen an, nur in einem wesentlichen Punkte weichen wir ab, beziehungsweise erweitern wir die Gauss'sche Theorie.

Gauss und alle Nachfolger desselben nehmen an, dass bei einem idealen optischen Systeme, die Anfangspunkte der Brennweiten für verschiedene Oeffnungen in einer zur Axe des Systemes senkrechten Ebene (der Hauptebene) liegen. Nach dieser Annahme ist die Brennweite bei grösserer Oeffnung länger als die bei kleinerer; wenn man dagegen die von dem Brennpunkte aus mit dem Radius gleich der wahren Brennweite gezogene Sphäre als Ort der Anfangspunkte der Brennweiten (als Hauptsphäre) betrachtet, erhalten alle Brennweiten des idealen Systemes gleichen numerischen Werth.

Diese letztere von uns adoptirte Anschauung ist dann mit der Gauss'schen übereinstimmend, wenn die Brennweite des optischen Systemes unendlich lang, oder die Oeffnung desselben so klein angenommen wird, dass die Hauptsphäre durch die in der Axe tangirende Ebene, die Hauptebene, ersetzt werden kann.

So treffliche Dienste die analytische Methode für die Betrachtung der Leistung eines gegebenen optischen Systemes liefert, so wenig ist dieselbe verwendbar, um die Elemente eines neu herzustellenden optischen Systemes, das bestimmten Anforderungen entsprechen soll, zu ermitteln.

Die bei Berechnung neuer optischer Systeme zu lösende Aufgabe stellt so hohe Forderungen an die Genauigkeit der Vereinigung der Strahlen, dass bei directer Lösung, wegen der vorkommenden transcendenten Funktionen, Gleichungen von höherem als 4. Grade erhalten würden. Es muss desshalb eine numerische Lösung durch geschickte Annäherung angewendet werden.

Da ausserdem eine Reihe von Bedingungen sich nicht allgemein einführen lassen, wie z. B. kleinste Entfernung zweier Flächen, die eine positive Luftlinse einschliessen etc. und da ferner von den vielen in Betracht kommenden Bedingungen nur einzelne streng erfüllt werden können, andere dagegen in den Grössen der übrig bleibenden Fehler gegeneinander abgeglichen werden müssen, so wird eine allgemeine Lösung derart complicirt, dass die Rechnung nicht mehr durchführbar ist.

Desshalb erscheint es practischer, in der Art vorzugehen, dass durch trigonometrische Rechnung die einzelnen Bedingungen nacheinander erfüllt werden und bei der Einführung jeder neuen Bedingung, die schon vorher eingeführten erfüllt bleiben.

Die richtige Wahl, in welcher Reihenfolge die Bedingungen in die Rechnung gebracht werden, ist sehr wichtig und von uns an einigen Beispielen erläutert.

Aus den späteren Kapiteln des Buches heben wir die, nach der oben erwähnten trigonometrischen Rechnungsmethode hergestellten Tabellen hervor.

Die erste Tabelle liefert für Linsen von gleicher Brennweite den Einfluss der Oeffnung; und dann für Linsen von gleicher Brennweite und Oeffnung den Einfluss der Linsenform, der Glassorte und der Linsendicke auf die übrig bleibenden Fehler im Bilde von Objectpunkten in und seitlich von der Axe.

Die zweite Tabelle ist von grösserer Bedeutung; für diese sind Doppellinsen gerechnet, alle von gleicher Oeffnung und Brennweite, sowie frei von Farben- und Kugelgestaltfehlern; und es ergaben sich die bei verschiedenen Linsenformen übrig bleibenden Fehler in Bezug auf Verzerrung, Farbenvergrösserung und Kugelgestaltfehler für eine zweite Farbe.

In einer späteren Auflage hoffen wir, diese, langwierige Rechnungen bedingende Tabelle dahin erweitern zu können, dass auch der Einfluss der Glassorten, sowie der der Linsendicken und Abstände hervortritt.

Zur Hygiene der Wohnung.

Von G. Recknagel.

(Eingelaufen 3. Januar.)

I.

1. Es wäre von praktischer Bedeutung, durch Ermittelung des Luftwechsels in zahlreichen nach Lage und Bauart verschiedenen Räumen Typen zu gewinnen, um in Anlehnung an solche Typen für jedes weitere nach Lage und Bauart beschriebene Zimmer mit einiger Annäherung das Mass des natürlichen — von Temperaturdifferenzen und Wind zu erwartenden — Luftwechsels angeben zu können. Im Besitze eines solchen Schlüssels würde man nämlich den Bewohnern, welche sich auf den natürlichen Luftwechsel verlassen, zahlenmässig sagen können, unter welchen äusseren Umständen und wie lange sie in schlechter Luft z. B. schlafen, und es ist kaum zu zweifeln, dass eine solche Erkenntniss Entschlüsse und Handlungen anregen wird, durch welche der Bevölkerung unserer Städte, die einen so grossen Theil ihres Lebens in geschlossenen Räumen zubringt, die Wohlthat einer gesunden Athemluft zugewendet werden könnte.

Für das Studium des natürlichen Luftwechsels hat die einmalige Messung der Grösse des Gesammtluftwechsels eine hervorragende Bedeutung, weil die Kenntniss desselben in Verbindung mit einer planmässigen Beschreibung derjenigen Umstände, welche für den Luftwechsel massgebend sind, zur Grundlage dienen kann für die von

mir bereits früher begründeten theoretischen Rechnungen,[1]) durch welche der Luftwechsel annähernd auch für diejenigen Fälle ermittelt wird, in denen jene Umstände nicht mehr die gleichen sind. Es wird auf Grundlage einer solchen Messung und Beschreibung möglich sein, für jede Jahres- und Tageszeit anzugeben, welche Leistung ungefähr man von der Porenventilation und welche man von einer bestimmten ebenfalls nur auf Temperaturunterschiede und Winddruck begründeten Lüftungsanlage zu erwarten hat.

2. Am einfachsten wird die Messung des Gesammtluftwechsels mittelst der von Pettenkofer begründeten Methode der Kohlensäurebestimmungen ausgeführt. Die Anwendung dieser Methode hat bereits zu schönen Erfolgen geführt. Seit mittelst derselben nach dem Vorgange Pettenkofer's Breiting, Rietschel u. A. zahlreiche und systematische Untersuchungen über die Steigerung des Kohlensäuregehaltes der Schulluft ausgeführt haben, wird kaum noch ein neues Schulhaus gebaut, ohne dass eine besondere Lüftungseinrichtung vorgesehen würde. Demnach ist zu hoffen, dass auch der Privatwohnung Heil widerfahren wird, wenn man sich in den massgebenden Kreisen der Aerzte, Miether, Bauherren und Architekten gründlich und zahlenmässig überzeugt hat, wieweit das, was wir zur Zeit in unseren Wohn- und Schlafzimmern an Luftwechsel besitzen, den grössten Theil des Jahres hindurch hinter den unerlässlichen Forderungen der Hygiene zurückbleibt. —

Die bis jetzt allerdings noch wenig zahlreichen Versuche, welche ich in Gemeinschaft mit Herrn Lycealprofessor Dr. Putz ausgeführt habe, gaben Veranlassung, die Methode einer etwas eingehenderen Prüfung zu unterziehen. Dabei schien uns der chemische Theil des Verfahrens — Barytwasser mit Oxalsäure titrirt, Phenolphthalein oder Rosolsäure als Indicator — hinreichend einfach und genau; die Rechnung

1) Sitzungsberichte vom 6. Juli 1878 u. 6. Dezember 1879.

hingegen, welche die von der Chemie gelieferten Daten verwerthen soll, insbesondere dann, wenn der Beobachter im Lokale anwesend geblieben war, zu umständlich, als dass man ihr eine grosse Popularität in Aussicht stellen könnte.

Dieser Uebelstand wurde schon vor 12 Jahren empfunden von Dr. Ar. Jakoby, der in einer 1878 in der Zeitschrift für Biologie (Bd. XIV. Heft I) veröffentlichten Abhandlung die Hoffnung aussprach, durch die daselbst versuchte Behandlung des Gegenstandes „diesem Theile der praktischen Hygiene einen vielleicht etwas weiteren Leserkreis zu gewinnen". Der Verfasser macht daselbst den bemerkenswerthen Vorschlag, die Schwierigkeit, welche der Rechnung für den Fall anhaftet, dass der Beobachter im Versuchsraume anwesend war, dadurch zu umgehen, dass man genau in der Mitte der Beobachtungszeit eine dritte Kohlensäurebestimmung einschaltet und durch Combinirung der drei Bestimmungen die transcendente Grösse aus der Formel eliminirt. Dasselbe Ziel kann nach Jacoby auch dadurch erreicht werden, dass man den Mittelwerth des Kohlensäuregehaltes durch chemische Integration gewinnt.

Durch dieses Verfahren wird die bestehende Schwierigkeit auf das Experiment abgewälzt, indem man das Beobachtungsmaterial, aus welchem zwei sich kontrolirende Resultate abgeleitet werden könnten, zu einem Resultate zusammenzieht. Dasselbe dürfte demnach nicht als eine völlig befriedigende, endgiltige Lösung angesehen werden.

Im Gegensatze hiezu ist im Folgenden die Rechnung zum Gegenstande der Untersuchung gemacht, in der Absicht, dieses Geschäft möglichst zu erleichtern und abzukürzen, ohne dabei der Genauigkeit etwas zu vergeben. —

II.

Für den Fall, dass während der Zwischenzeit zwischen den beiden Kohlensäurebestimmungen in dem Versuchsraume selbst Kohlensäure nur auf Kosten des in der Luft des Raumes enthaltenen Sauerstoffs producirt wird — wie z. B. bei der Athmung von Menschen, welche sich im Sauerstoffgleichgewicht befinden — gibt, wie schon Jacoby l. c. nachgewiesen hat, die Formel von Hagenbach[1]) den Zusammenhang zwischen dem Kohlensäuregehalt c (pro mille) der zugeführten freien Luft,

dem anfänglichen Gehalte c_1,
dem schliesslichen Gehalte c_2 der Zimmerluft,
der stündlich im Zimmer selbst producirten Kohlensäuremenge l (Liter),
dem kubischen Inhalte des Zimmers K (Kubikmeter)
der stündlich zugeführten Luftmenge V (Kubikmeter) und der Zeitdauer des Versuchs t (Stunden).

Die entsprechende Gleichung ist:

$$\frac{c_1 - c - \frac{l}{V}}{c_2 - c - \frac{l}{V}} = e^{\frac{V}{K}t} \quad \ldots\ldots (1$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen (2,718 ....) bedeutet. Die Voraussetzungen, welche dieser Gleichung zu Grunde liegen, sind:

1. Luftwechsel, Kohlensäureproduction, Temperatur des Zimmers und Luftdruck sind konstant.
2. Jeder kleinste Theil der zugeführten Luftmenge so-

1) Mitgetheilt von Dr. Carl Breiting in seinem Berichte an das Sanitätscollegium von Basel-Stadt über: Untersuchungen, betr. den Kohlensäuregehalt der Luft im Schulzimmern, 1870. S. 48 ff.

Die zweite Formel von Seidel setzt voraus, dass im Versuchsraume Kohlensäure producirt wird, für welche das Aequivalent an Sauerstoff nicht aus der Luft genommen wird. Die erste Formel Seidel's setzt eine Kohlensäureproduction im Versuchsraume überhaupt nicht voraus.

wohl als der producirten Kohlensäure ist sofort nach seiner Einführung mit dem jeweiligen Luftinhalte des Zimmers gleichmässig vermischt.

3. Für die während der Zeitdauer des Versuchs im Raume producirte Kohlensäure verschwindet die dazu nöthige Menge von Sauerstoff aus der Luft.
4. Werden gleichzeitig mit der Kohlensäure noch andere Gase im Raume producirt z. B. Wasserdampf, so verschwindet dafür ebenfalls eine an Volumen gleiche Luftmenge durch Absorption.

Keine dieser Annahmen wird streng erfüllt sein; eine Diskussion derselben soll indessen einer späteren Gelegenheit vorbehalten werden.

Wird während des Versuchs Kohlensäure im Raume selbst nicht entwickelt, so ist in der obigen Gleichung l gleich Null zu setzen. Es liegt also dann nur ein besonderer Fall der allgemeinen durch die Gleichung (1) gegebenen Beziehung vor, der einer besonderen Behandlung nicht bedarf.

Es wird nun die Gleichung (1) so umgeformt, dass die Berechnung von V, für welche bekanntlich die Mathematik keine exakte Vorschrift gibt, sondern uns auf den beschwerlichen Weg des Probirens verweist, mit Hilfe einer Tabelle ausgeführt werden kann.

Indem man 1 auf beiden Seiten subtrahirt und dann auf die reciproken Werthe übergeht, erhält man

$$\frac{c_2 - c - \frac{l}{V}}{c_1 - c_2} = \frac{1}{e^{\frac{V}{K}t} - 1}$$

Nun soll eine neue Grösse

$$\zeta = \frac{l}{K}$$

eingeführt werden, das Verhältniss der stündlich im Raume producirten Kohlensäure (l Liter) zu der Grösse des Raumes

(K Kubikmeter). Dieses ζ ist vermöge der verschiedenen Raummaasse, welche für l und K angewendet werden, mit den c gleichartig und derjenige Kohlensäuregehalt (ζ pro mille), um welchen bei Mangel jeder Ventilation der Kohlensäuregehalt des Zimmers in einer Stunde zunehmen würde.[1])

Dann erhält die Gleichung die Form:

$$\frac{c_2 - c - \left(\zeta : \frac{V}{K}\right)}{c_1 - c_2} = \frac{1}{e^{\frac{V}{K}t} - 1},$$

und es kommt die Grösse V, um deren Ermittelung es sich handelt, nur noch in der Verbindung $\frac{V}{K}$ vor. Man kann demnach die Schreibweise vereinfachen, indem man dieses Verhältniss — den relativen Luftwechsel[2]) — durch ein Zeichen E ausdrückt.

Zugleich soll die rechts stehende Funktion der beiden Grössen E und t künftig mit f bezeichnet werden, so dass nun die Gleichung die folgende Form erhält:

$$\frac{c_2 - c - \zeta : E}{c_1 - c_2} = f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2$$

wobei $\zeta = \frac{l}{K}$ das Verhältniss der stündlich im Raume ent-

1) Dieselbe Grösse (ζ) ist der reciproke Werth des „Luftkubus“ $\left(\frac{K}{l}\right)$ für 1 Liter stündliche Kohlensäureproduction.

2) Dem relativen Luftwechsel $\frac{V}{K}$ hat der Sprachgebrauch bereits den Namen „Stündliche Lufterneuerung“ beigelegt, da man, wenn $\frac{V}{K}$ die Werte 1, 2, 3 ... hat, zu sagen pflegt, es finde in dem Raume K stündlich einmalige, zweimalige, dreimalige ... Lufterneuerung statt. Obwohl diese Benennung nicht streng richtig ist und der falschen Vorstellung, als ob nach vollzogener „Lufterneuerung“ von der früheren Luft nichts mehr anwesend sei, vorschub leisten könnte, soll sie in ihrer Eigenschaft als alter Bekannter beibehalten werden.

wickelten Kohlensäure (l Liter) zum Luftinhalte des Raumes (K Kubikmeter), E das Verhältniss der stündlich zugeführten Luftmenge (V) zum Luftinhalte (K) des Raumes oder den Grad der stündlichen Lufterneuerung vorstellt und

$$f = \frac{1}{e^{Et} - 1} \text{ ist.}$$

Durch diese Umformung wird es möglich, mit einer Tafel auszukommen, in welche die Lufterneuerung E, die Zeit t und die Funktion f jener beiden Grössen mittelst doppelten Einganges zusammengefasst werden.

Die Tafel selbst wurde in zwei Abtheilungen angefertigt, von welchen sich die erste, mehr detaillirt, auf kleine, die zweite auf grössere Luftwechsel bezieht. Die erste Abtheilung gibt für die Zeiten 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 120 Minuten und die Lufterneuerungen 0,10 bis 1,00 (von 2 zu 2 Hunderteln) die Werthe der Funktion f. Die zweite Abtheilung unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass die Lufterneuerung von 1,0 bis 3,0 von Zehntel zu Zehntel fortschreitet.

(Die Tafeln finden sich am Ende der Abhandlung auf einem besonderen Blatte.)

III.

Es soll nun die Auflösung der Gleichung

$$\frac{c_2 - c - \zeta : E}{c_1 - c_2} = f \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

nach E an einigen Beispielen gezeigt werden.

Erstes Beispiel. Der Kohlensäuregehalt eines Lehrsaales hatte, nachdem die Schüler und die Beobachter denselben verlassen, in 30 Minuten von 3,55 auf 2,93 pro mille abgenommen. Es soll aus diesen Angaben der Grad der Lufterneuerung berechnet werden.

Da während der Beobachtungszeit Kohlensäure im Saale nicht producirt wurde, ist in Gleichung (2

$$\zeta = 0$$

zu setzen. Für c (den Kohlensäuregehalt der zuströmenden Luft) wird der Werth 0,4 angenommen. Somit wird

$$f = \frac{2{,}93 - 0{,}4}{3{,}55 - 2{,}93} = 4{,}08.$$

In Tabelle I findet man unter dem Kopfe 30 Minuten den Werth 4,08 angegeben und erhält als entsprechende Lufterneuerung $E = 0{,}44$. Der stündliche Luftwechsel beträgt somit 0,44 des Rauminhaltes, und da dieser 340 Kubikmeter ist, berechnet sich die stündlich zuströmende der abströmenden gleiche Luftmenge zu 0,44 · 340 oder 150 Kubikmeter.[1])

---

1) Als Beispiel einer Beschreibung der massgebenden Umstände diene folgendes:

Der Lehrsaal liegt im zweiten Obergeschosse eines frei stehenden Gebäudes und hat zwei freie mit je zwei Fenstern versehene Seitenwände, deren eine von 7,41 m Länge nach Süden, die andere 9,84 m lang, nach Westen gewendet ist. Auf der Nordseite, welche die Thüre enthält, befindet sich ein Vorzimmer, welches durch ein offenes Fenster mit der freien Luft und durch eine offene Thüre mit dem Corridor verkehrt. Auf der Ostseite ist der Saal durch eine glatte Mauer von einem geschlossenen Privatzimmer getrennt.

Die ganze Höhe beträgt 5,64 m, steigt bis zu 3,60 m glatt an und geht sodann in ein vergipstes Spiegelgewölbe über. Oberhalb ist ein luftiger Speicher, unterhalb ein ebenfalls gewölbter Lehrsaal, der vor dem Versuch durch halbstündiges offenstehen lassen aller Fenster und Thüren gelüftet worden war. Der kubische Inhalt wurde zu 340 cbm berechnet. Die innere Temperatur war anfangs 19,4, am Ende 18,4, also im Mittel 18,9° Cels., die der äussern Luft — 4° Cels. Der unterhalb liegende Saal zeigte im Mittel 8° C. Barometerstand 742 mm. Windstille.

Besondere Bemerkungen. Die Fenster schliessen mittelmässig, die Thüre sehr schlecht, die Diehlen zeigen grosse bis zu 1 cm breite Zwischenräume. Im Ofen brennt das Feuer bei offenem Aschenkasten.

Zweites Beispiel. In einem durch Luftzufuhr aus dem Freien ventilirten kleinen Zimmer von 60 Kubikmeter Inhalt sank bei Anwesenheit des Beobachters der Kohlensäuregehalt in 20 Minuten von $c_1 = 2{,}31$ auf $c_2 = 1{,}53$. Wie gross war der stündliche Luftwechsel?

In die vollständige Gleichung (2

$$\frac{c_2 - c - \zeta : E}{c_1 - c_2} = f$$

ist zunächst der Werth von $\zeta : \frac{l}{K}$ einzuführen. Da eine Person im Zimmer athmete, darf für die stündliche Kohlensäureproduktion (l) der Mittelwerth 20 (Liter) gesetzt werden. Somit ist $\zeta = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ und die Gleichung

$$\frac{1{,}53 - 0{,}4 - \frac{1}{3E}}{2{,}31 - 1{,}53} = f$$

durch Probiren nach E aufzulösen, d. h. man hat E so lange zu ändern, bis man denjenigen Werth von E gefunden hat, welcher bewirkt, dass beide Seiten der Gleichung den gleichen Zahlenwerth erhalten.

Nimmt man zunächst für E einen beliebigen in der ersten Kolonne der Tafel enthaltenen Werth an, z. B. $E = 1$, so gibt die Tafel in der mit 1,0 beginnenden Zeile unter dem Kopfe 20′ den zugehörigen Werth von f (= 2,53). Derselbe Werth (1) von E ist in den auf der linken Seite der Gleichung stehenden Bruch einzusetzen. (Letzterer soll künftig der Kürze wegen mit β bezeichnet werden.) Es wird

$$\beta = \frac{1{,}13 - \frac{1}{3 \cdot 1}}{0{,}78} = 1{,}03.$$

Hätte man zufällig das richtige E errathen, dann wären

Nach anemometrischer Messung strömten in den Ofen stündlich 56 cbm Luft ab.

f und β gleich gross ausgefallen. Da dieses nicht der Fall ist, muss das Probiren fortgesetzt werden, und es ist der Uebersichtlichkeit wegen nützlich, die drei zusammengehörigen Werthe von E, f und β in ein Täfelchen zusammenzustellen.

t = 20 Minuten.

Nr.	E	f	β
1	1,0	2,53	1,03
2	2,0	1,05	1,28
3	1,8	1,22	1,21

Durch Zunahme von E wächst auch der Werth des Bruches β; hingegen nimmt f ab (wie aus der Tafel ersichtlich). Somit nähern sich in unserem Falle (wo $\beta < f$) die beiden Grössen β und f, wenn man E zunehmen lässt.

Anstatt aber nun in Abtheilung 2 der Tafel wieder einen beliebigen Werth von E zu wählen, scheint es förderlicher, zu erwägen, dass bei wachsendem E das β langsam zunimmt, während f rasch abnimmt. Das weist uns an, nicht E sondern f als willkürlich Veränderliche zu nehmen und seinen Werth ganz nahe an β also etwa auf denjenigen Tafelwerth zu rücken, welcher zunächst oberhalb des derzeitigen Bruchwerthes (1,03) liegt.

Dann kommt man auf $f = 1,05$.

Diesem entspricht $E = 2,0$ und

$$\beta = \frac{1,00}{0,78} = 1,28.$$

Indem man nun nochmals mit f dem β so nahe rückt als es ohne Ueberspringen seines Wertes geschehen kann, erhält man als dritte Partie zusammengehöriger Werthe

$$f = 1,22, \; E = 1,8, \; \beta = 1,21.$$

Der Unterschied zwischen f und β ist nun so klein, dass man sich bei $E = 1{,}8$ beruhigen kann.

Drittes Beispiel. Bei Anwesenheit von zwei Personen in einem Raume von 100 cbm Luftinhalt sank in 30 Minuten der Kohlensäuregehalt von 1,75 auf 1,13 pro mille. Wie gross war der stündliche Luftwechsel?

Es ist beobachtet $c_1 = 1{,}75$; $c_2 = 1{,}13$ und angenommen $c = 0{,}4$; $\zeta = \frac{2 \cdot 20}{100} = 0{,}4$. Somit ist E aus der Gleichung

$$f = \frac{0{,}73 - 0{,}4 : E}{0{,}62}$$

zu berechnen.

$t = 30$ Minuten.

Nr.	E	f	β
1	1	1,54	0,53
2	2	0,582	0,855
3	1,6	0,816	0,774
4	1,64	0,785	0,784

Man erhält für die erste willkürliche Annahme $E = 1$ die unter No. 1 eingetragenen Werthe von f und β, und geht nun wie im zweiten Beispiele mit f in Abt. 2 bis zu dem zunächst über ($\beta = 0{,}53$) liegenden Tafelwerthe 0,582. Dadurch wird $E = 2$ und $\beta = 0{,}855$. Durch Fortsetzung desselben Verfahrens wird $f = 0{,}816$; $E = 1{,}6$; $\beta = 0{,}774$ erhalten.

Nun ist der Unterschied zwischen f und β kleiner geworden, als die Differenz zweier auf einander folgender Tafelwerthe von f (nämlich 0,816 und 0,746); und daraus folgt zunächst, dass E zwischen 1,6 und 1,7 liegt. Mit diesem

Resultate wird man in den meisten Fällen abschliessen dürfen. Will man aber eine weitere Annäherung erzielen, so kann dieselbe durch **Interpolation** erfolgen:

Man theilt die noch zwischen f und β bestehende Differenz (0.042) im Verhältniss der Geschwindigkeiten, mit welchen sich f und β ändern. Diese Geschwindigkeiten entnimmt man aus den Aenderungen, welche f und β bei dem Uebergange vom zweiten zum dritten Näherungswerthe der E erfahren haben. Es stehen sich in unserem Beispiel $0.816 - 0.532 = 0.284$ für f und $0.855 - 0.774 = 0.081$ für β gegenüber, welche Zahlen sich sehr nahe wie 3 : 1 verhalten, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher bei einer bestimmten Zunahme von E das f abnimmt, ist nahe dreimal so gross als diejenige, mit welcher der Bruch β wächst. Man hat demnach 0.042 in zwei Theile zu theilen, welche sich nahezu wie 3 zu 1 verhalten. Solche Theile sind 0.031 und 0.011. Lässt man f um 0.031 abnehmen und β um 0.011 wachsen, so erhalten beide den Werth 0,785, und es ist noch das zu diesem Werthe von f gehörige E zu suchen.

E liegt zwischen 1.6 und 1.7, und die zugehörigen Tafelwerthe von f unterscheiden sich um 0.081, während unser Werth von f von dem oberen derselben um 0.031 abweicht.

Es ist also die Frage zu beantworten: Wie viel Hunderteln entspricht diese Differenz 0.031, wenn 10 Hundertel der Differenz 0.081 entsprechen? Die Antwort gibt der Werth von x in der Proportion

$$0.081 : 10 = 0.031 : x,$$

aus welcher x = 4 folgt.

Der letzte Näherungswerth von E ist somit 1.64. Setzt man denselben zur Probe in den Bruch ein, so erhält man die [illegible] — 0.785 hinreichend übereinstimmende Zahl 0.784.

IV.

Als weitere Beispiele können die für unsere Kenntniss vom natürlichen Luftwechsel fundamentalen Versuche dienen, welche Pettenkofer[1]) in den Monaten März, Oktober und Dezember des Jahres 1857 in seinem Arbeitszimmer angestellt.

1) [illegible] Luftwechsel [illegible] Wohn- [illegible] 1858.

aber unter Vernachlässigung seiner eigenen Kohlensäureproduktion nach der für diesen Fall ($\zeta = 0$) mit der Hagenbach'schen identischen ersten Formel von Seidel und unter der Annahme berechnet hat, dass die zuströmende Luft $0{,}5\,^0\!/_{00}$ Kohlensäure enthalte.

Mit Hilfe der Tafel ist es nun leicht möglich, jene Ungenauigkeit zu beseitigen. Man findet in der folgenden Zusammenstellung die Werthe der Lufterneuerung des 75 cbm grossen Zimmers unter der Annahme berechnet, dass der Kohlensäuregehalt der zuströmenden Luft $c = 0{,}4\,^0\!/_{00}$ war und der Beobachter stündlich 22,5 Liter Kohlensäure producirte, also ζ den Werth 0,3 hatte.

Es sind dabei zweimal die Kohlensäurebestimmungen anders combinirt, indem der Gelegenheitsversuch Nr. 5 und der vom Beobachter selbst als wahrscheinlich fehlerhaft beanstandete Versuch Nr. 11 weggelassen wurden. Im Übrigen sind die von Pettenkofer berechneten Zahlen beigesetzt.

Man sieht, dass selbst bei der ausgleichenden Annahme $c = 0{,}4$ (statt des ursprünglichen 0,5) die neuen Zahlen sämmtlich — zuweilen nicht unerheblich — grösser ausfallen wie die alten und dass zugleich die an den einzelnen Versuchstagen unter nahe gleichen Umständen gewonnene Resultate einander näher liegen, als dieses nach der älteren Berechnung der Fall war.

Wollte man den Einfluss isoliren, welchen die Vernachlässigung der Kohlensäureproduktion des im Raume anwesenden Beobachters auf das Resultat ausübt, so müsste man entweder die Versuche Pettenkofers mit $c = 0{,}5$, $\zeta = 0{,}3$ rechnen und die Resultate mit den älteren vergleichen oder, was leichter ist, meine Rechnung unter den Annahmen $c = 0{,}4$, $\zeta = 0$ wiederholen. Der Einfluss ist um so grösser, je kleiner der Kohlensäuregehalt der Zimmerluft ist, und wächst bei den am stärksten betroffenen Versuchen (7—8 und 18—19) bis zu 40 Procent des Werthes an.

Zusammenstellung

der neu berechneten Pettenkofer'schen Versuche über den Luftwechsel in einem Zimmer von 75 cbm Luftinhalt, ausgeführt in den Monaten März, Oktober und Dezember des Jahres 1857.

Nr. des Originals	Dauer des Versuchs in Minuten	Beobachtet c_1 (pro mille)	Beobachtet c_2 (pro mille)	Angenommen: c (pro mille)	Mittlere Temperatur-Differenz Cels.	Untere Temperatur Cels.	Lufterneuerung nach neuer Berechnung	Lufterneuerung nach älterer Berechnung	Datum	Bemerkungen.
1—2	30'	6,00	3,07	0,4	21,5°	6°	1,56	1,52	7. März	Die Beobachtungen wurden stets Mittags zwischen 11½ und 3 Uhr angestellt.
2—3	30	3,07	2,04	„	18,5	„	1,12	1,02	„ „	
4—6	60	14,09	5,12	„	21,2	0	1,10	—	9. März	Der Beobachter war im Zimmer anwesend, die Kohlensäureproduktion desselben wird zu 22,5 Liter pr. Stunde angenommen.
6—7	60	5,12	2,15	„	18,5	0	1,10	1,03	„ „	Das Zimmer liegt hochparterre, wendet eine Seite mit Fenster nach Süden, grenzt mit zwei Wänden (östlich und nördlich) an den Hausflur, mit der 4. Wand an ein Nebenzimmer. Die östliche und westliche Wand haben je eine Thüre.
7—8	60	2,15	1,20	„	17,5	0	1,05	0,86	„ „	
9—10	40	4,84	3,94	„	5,3	17,2	0,42	0,35	20. Okt.	
10—12	65	3,94	2,98	„	4,5	19,4	0,39	—	„ „	
12—13	30	2,98	2,66	„	3,4	19,1	0,39	0,28	„ „	
13—14	15	2,66	2,38	„	3,2	18,9	0,67	0,56	„ „	1 Fensterflügel offen.
15—16	30	4,21	2,91	„	19,0	—1	0,93	0,86	11. Dzb.	Die Ritzen der Fenster und Thüren waren mit Papier verklebt.
16—17	30	2,91	2,21	„	19,0	—1	0,79	0,67	„ „	
17—18	30	2,21	1,76	„	19,3	—1	0,77	0,61	„ „	
18—19	30	1,76	1,17	„	20,5	—1	1,43	1,26	„ „	Heizung offen.

Die Versuche sind in demselben Zimmer in verschiedenen Jahreszeiten bei verschiedenen Temperaturen angestellt. Die Motoren des Luftwechsels können jedesmal nur zwei gewesen sein: Temperaturdifferenz und Winddruck. Macht man die Hypothese, dass erstere allein wirkte — also die Messungen, wie es nach einer mir durch die Güte des Herrn Autors zugekommenen mündlichen Mittheilung in der That angestrebt wurde, bei Windstille ausgeführt sind — so lassen sich die vier Mittelwerthe (1 — 3), (4 — 8), (9 — 13), (15 — 18) vergleichbar machen, indem man aus jedem derselben den Luftwechsel berechnet, welcher stattgefunden hätte, wenn die äussere Temperatur 0° C., die innere +1° C. gewesen wäre.

Der durch Temperaturdifferenzen veranlasste Luftwechsel ist, insoferne er nur durch kapillare Wege stattfindet, der Gewichtsdifferenz zweier Luftsäulen von gleicher Höhe (h) proportional, und zwar, wenn die äussere Temperatur t, die innere T, der Barometerstand B ist, dem Ausdrucke

$$h \cdot 1{,}293 \frac{B}{760} \left(\frac{1}{1 + \alpha t} - \frac{1}{1 + \alpha T} \right),$$

welcher ersetzt werden kann durch

$$h \cdot 1{,}293 \frac{B}{760} \frac{T - t}{273 + T + t}.$$

Der Luftwechsel eines Zimmers von constanter Beschaffenheit ist demnach der Temperaturdifferenz nicht streng proportional, sondern auch einigermassen von den Temperaturen selbst beeinflusst.

Für $t = 0$, $T = 1$ erhält man

$$h \cdot 1{,}293 \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{274}.$$

Es stehen somit die Lufterneuerungen E und E_0, welche in demselben Raume einerseits bei den allgemeinen Tempe-

raturen (T, t), andererseits bei den besonderen (1° und 0° C.) vor sich gehen, in der Proportion:

$$E : E_0 = \frac{T - t}{273 + T + t} : \frac{1}{274},$$

oder es ist

$$E_0 = \frac{E}{T - t} \cdot \frac{273 + T + t}{274}.$$

Die Vernachlässigung des zweiten Faktors beträgt z. B. bei $T = 24°$, $t = 10°$ . . . 12 Prozent des Werthes von E_0 (der reducirten Lufterneuerung).

Ich habe nun aus den umgerechneten Versuchsresultaten Pettenkofers die E_0 berechnet und als Mittelwerthe erhalten:

Für den	7. März	$E_0 = 0{,}075$	bei	$t = 6°$ C.
„ „	9. „	$E_0 = 0{,}061$	„	$t = 0°$ C.
„ „	20. Okt.	$E_0 = 0{,}108$	„	$t = 19°$ C.
Für den	11. Dez.	$E_0 = 0{,}047$	bei	$t = -1°$ C.

Die reduzirten Lufterneuerungen (E), welche unter der Voraussetzung, dass die E in einem Raume von constanter Durchlässigkeit der Begrenzung durch Temperaturdifferenzen allein veranlasst seien, gleich gross ausfallen müssten, weichen demnach erheblich von einander ab.

Dass die Beobachtungen vom 11. Dez. einen kleineren Werth von E_0 liefern, ist selbstverständlich, da sie nach absichtlicher Verminderung der Durchlässigkeit durch Verklebung der Thür- und Fenster-Ritzen mit Papier angestellt worden sind. Die übrigen drei Werthe ordnen sich offenbar nach den äusseren Temperaturen, in dem Sinne, dass sie um so grösser ausfallen, je höher jene Temperaturen sind, und der Zusammenhang ist ein so einfacher, dass sich die 3 reduzirten Lufterneuerungen durch die Formel

$$E_0 = 0{,}061 + 0{,}0025\ t$$

exakt darstellen lassen.

Demnach wäre am 11. Dezember $E_0 = 0{,}0585$ zu erwarten gewesen, und der Einfluss, welchen das Verkleben der Ritzen hatte, ist auf $\frac{115}{470}$ oder ungefähr 25 Procent des beobachteten Luftwechsels anzuschlagen. Damit ist vielleicht der Beitrag, welchen die Ritzen der Fenster und Thüren zum Luftwechsel lieferten, voll bemessen, insbesondere wenn das Papier, mit welchem verklebt wurde, noch feucht war.

Im Uebrigen kann man in der einfachen Beziehung zwischen der reduzirten Lufterneuerung E_0 und der äusseren Temperatur t, wie sie in einer Gleichung von der Form

$$E_0 = a + b\,t$$

hervortritt, eine schöne Bestätigung für die an sich sehr wahrscheinliche und auch schon früher von Märker und von C. Lang ausgesprochene Ansicht finden, dass die Begrenzungen unserer Wohnräume bei höherer Temperatur für Luft durchlässiger sind als bei tiefer. Denn wenn eine solche Beziehung existirt, so kann sie jedenfalls durch eine Reihenentwickelung von der Form

$$a + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots .$$

dargestellt werden, von welcher, wie es scheint, die ersten beiden Glieder für das beschränkte Intervall der Temperaturen, welches die Versuche umfassen, genügen.

Es ist nicht nöthig, bei der Beziehung zwischen der Durchlässigkeit der Wohnungsgrenzen und der Temperatur die Gedanken auf die Erweiterungen zu beschränken, welche die Poren der Steine . . . durch Ausdehnung des Materiales erfahren. Es wird vielmehr neben dieser Wirkung der Wärme auch der Einfluss in Betracht zu ziehen sein, welchen sie auf die Feuchtigkeit der Wände . . . ausübt. Die Feuchtigkeit schliesst nicht nur die Poren der Steine, sondern sie verengt auch durch Quellung des Holzes die Fugen und Ritzen, denen ein grosser Antheil an der Durchlässigkeit zu-

zuschreiben ist. Hohe Temperaturen werden demnach die Durchlässigkeit auch dadurch vergrössern, dass sie zur Austreibung der Feuchtigkeit mitwirken oder deren Festsetzung (Condensation) in den Mauern verhindern.

Daraus folgt, dass man die grösste Durchlässigkeit und somit den grössten (reducirten) Luftwechsel nach einer Reihe trockener und warmer Tage, den geringsten nach kalter und feuchter Witterung, mittleren bei trockener Kälte und bei veränderlichem Sommerwetter zu erwarten hat.

Die Resultate der Pettenkofer'schen Versuche widerstreben dieser Erklärung nicht, zur Bestätigung derselben sind jedoch weitere Untersuchungen in Verbindung mit genauer Beschreibung der meteorologischen Verhältnisse erforderlich.

Tafel der Werthe von $1:(e^E-1)$

I. Abtheilung.

E	10′	15′	20′	25′	30′	40′	50′	60′	120′ (Min. Beobachtungszeit $t = \frac{10}{60} \ldots$)
0,10	59,5	39,5	29,5	23,5	19,5	14,5	11,5	9,5	4,5
0,12	49,5	32,8	24,5	19,5	16,2	12,0	9,5	7,8	3,7
0,14	42,4	28,1	20,9	16,7	13,8	10,2	8,0	6,6	3,1
0,16	37,0	24,5	18,3	14,5	12,0	8,9	7,0	5,8	2,7
0,18	32,8	21,7	16,2	12,8	10,6	7,8	6,2	5,1	2,3
0,20	29,5	19,5	14,5	11,5	9,5	7,0	5,5	4,5	2,03
0,22	26,8	17,7	13,1	10,4	8,6	6,4	5,0	4,1	1,83
0,24	24,5	16,2	12,0	9,5	7,8	5,8	4,5	3,7	1,63
0,26	22,6	14,9	11,1	8,8	7,2	5,3	4,1	3,4	1,47
0,28	20,9	13,8	10,2	8,1	6,6	4,9	3,8	3,1	1,34
0,30	19,5	12,8	9,5	7,5	6,2	4,52	3,53	2,86	1,22
0,32	18,3	12,0	8,9	7,0	5,8	4,22	3,28	2,65	1,13
0,34	17,2	11,3	8,3	6,6	5,4	3,94	3,06	2,47	1,05
0,36	16,2	10,6	7,8	6,2	5,1	3,69	2,86	2,31	0,97
0,38	15,3	10,0	7,4	5,8	4,8	3,46	2,69	2,17	0,89
0,40	14,5	9,5	7,0	5,5	4,52	3,27	2,53	2,03	0,82
0,42	13,8	9,0	6,7	5,2	4,29	3,11	2,39	1,91	0,76
0,44	13,1	8,6	6,4	4,9	4,08	2,94	2,26	1,81	0,71
0,46	12,5	8,2	6,1	4,7	3,87	2,79	2,14	1,71	0,66
0,48	12,0	7,8	5,8	4,5	3,69	2,65	2,03	1,62	0,62
0,50	11,5	7,5	5,5	4,31	3,53	2,53	1,93	1,54	0,58
0,52	11,1	7,2	5,3	4,13	3,38	2,42	1,84	1,47	0,55
0,54	10,6	6,9	5,1	3,97	3,24	2,31	1,75	1,40	0,52
0,56	10,2	6,6	4,9	3,82	3,11	2,21	1,68	1,34	0,49
0,58	9,8	6,4	4,7	3,67	2,98	2,12	1,61	1,28	0,46
0,60	9,5	6,2	4,52	3,53	2,86	2,03	1,54	1,22	0,43
0,62	9,2	6,0	4,36	3,41	2,75	1,94	1,48	1,17	0,41
0,64	8,9	5,8	4,22	3,29	2,65	1,86	1,42	1,12	0,39
0,66	8,6	5,6	4,08	3,18	2,56	1,79	1,36	1,07	0,37
0,68	8,3	5,4	3,94	3,07	2,47	1,73	1,31	1,02	0,35
0,70	8,1	5,21	3,80	2,96	2,39	1,68	1,26	0,98	0,33
0,72	7,8	5,06	3,68	2,87	2,31	1,62	1,21	0,94	0,312
0,74	7,6	4,92	3,57	2,78	2,24	1,57	1,17	0,91	0,297
0,76	7,4	4,78	3,47	2,69	2,17	1,52	1,13	0,88	0,282
0,78	7,2	4,65	3,37	2,61	2,10	1,47	1,09	0,85	0,267
0,80	7,01	4,52	3,28	2,53	2,03	1,42	1,05	0,82	0,253
0,82	6,83	4,40	3,20	2,46	1,97	1,38	1,02	0,79	0,240
0,84	6,66	4,29	3,11	2,39	1,91	1,34	0,98	0,76	0,228
0,86	6,49	4,18	3,02	2,32	1,86	1,30	0,95	0,74	0,217
0,88	6,33	4,08	2,94	2,26	1,81	1,26	0,92	0,71	0,206
0,90	6,18	3,97	2,86	2,20	1,76	1,22	0,89	0,68	0,197
0,92	6,01	3,87	2,79	2,14	1,71	1,18	0,87	0,66	0,188
0,94	5,91	3,78	2,72	2,08	1,66	1,14	0,84	0,64	0,180
0,96	5,78	3,69	2,65	2,03	1,62	1,11	0,82	0,62	0,172
0,98	5,65	3,61	2,59	1,98	1,58	1,08	0,79	0,60	0,164
1,00	5,52	3,53	2,53	1,93	1,54	1,05	0,77	0,58	0,156

Tafel der Werthe von $1:(e^{Et}-1)$

II. Abtheilung.

E	10′	15′	20′	25′	30′	40′	50′	60′	120′	(Min. Beobachtungszeit $t=\frac{10}{60}\ldots$)
1,0	5,52	3,53	2,53	1,93	1,54	1,05	0,769	0,582	0,156	
1,1	4,97	3,15	2,26	1,71	1,36	0,924	0,666	0,499	0,125	
1,2	4,52	2,86	2,03	1,54	1,22	0,816	0,582	0,431	0,100	
1,3	4,13	2,60	1,84	1,39	1,09	0,726	0,512	0,375	0,080	
1,4	3,80	2,39	1,68	1,26	0,98	0,648	0,452	0,327	0,065	
1,5	3,53	2,20	1,54	1,15	0,90	0,582	0,402	0,287	0,052	
1,6	3,28	2,03	1,42	1,05	0,816	0,525	0,358	0,253	0,042	
1,7	3,05	1,89	1,31	0,97	0,746	0,475	0,320	0,223	0,034	
1,8	2,86	1,76	1,22	0,90	0,684	0,431	0,287	0,197	0,028	
1,9	2,69	1,64	1,13	0,83	0,631	0,392	0,258	0,175	0,023	
2,0	2,53	1,54	1,05	0,77	0,582	0,358	0,233	0,156	0,018	
2,1	2,39	1,45	0,98	0,714	0,538	0,327	0,210	0,139	0,015	
2,2	2,26	1,36	0,92	0,666	0,499	0,300	0,190	0,125	0,012	
2,3	2,14	1,29	0,86	0,622	0,463	0,275	0,172	0,111	0,010	
2,4	2,03	1,22	0,82	0,582	0,431	0,253	0,156	0,100	0,008	
2,5	1,93	1,15	0,77	0,545	0,402	0,233	0,142	0,089	0,007	
2,6	1,84	1,09	0,725	0,512	0,375	0,214	0,129	0,080	0,006	
2,7	1,76	1,04	0,684	0,481	0,350	0,197	0,117	0,072	0,005	
2,8	1,68	0,99	0,648	0,452	0,327	0,183	0,107	0,065	0,004	
2,9	1,61	0,94	0,614	0,426	0,306	0,169	0,098	0,058	0,003	
3,0	1,54	0,90	0,582	0,402	0,287	0,156	0,090	0,052	0,0025	

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme.

Von Walther Dyck.

(Eingelaufen 8. Januar.)

(Mit Taf. I bis IV.)

---

§ 1.

Fragestellung und Disposition.

Die Untersuchungen über die gestaltlichen Verhältnisse des durch eine Differentialgleichung erster Ordnung mit reellen Coefficienten zwischen zwei Veränderlichen x, y:

$$(1.)\qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

in der Ebene (x, y) definirten Curvensystems haben sich vor allen Dingen mit den Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades

$$(2.)\qquad X + Y\frac{dy}{dx} = 0$$

(wo X, Y reelle eindeutige Functionen von x, y bedeuten) beschäftigt. Unter der Voraussetzung, dass „im Allgemeinen" die Entwicklung von X, Y an jeder endlichen Stelle x_0, y_0 nach ganzen Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$ möglich ist, und dabei die Glieder erster Ordnung der Entwicklung stets vor-

handen sind, lassen sich die singulären Stellen des durch die Gleichung (2.) definirten Curvensystems characterisiren durch das Verhalten der Curven des durch die Gleichung

$$(3.)\qquad (m_1 x + n_1 y) + (m_2 x + n_2 y)\frac{dy}{dx} = 0$$

gegebenen Systems im Punkte $x = 0$, $y = 0$, und es fügen sich durch eine geeignete Transformation auch etwa im Unendlichen vorhandene singuläre Stellen des Systemes (2.) in diese Characteristik ein. Je nach den Werten der reellen Coefficienten m, n in (3.) lassen sich drei Haupttypen von singulären Stellen unterscheiden — auf welche wir im Folgenden noch einzugehen haben werden.[1])

Von hier ab haben sich die Untersuchungen einmal auf specielle Fälle jener Typen ausgedehnt;[2]) weiter aber hat Poincaré in einer Reihe von Abhandlungen „Sur les courbes définies par une équation differentielle" Methoden aufgestellt, welche den Gesammtverlauf des durch eine Differentialgleichung (2.) definirten Curvensystems, welches die Ebene (x, y) einfach überdeckt, zu discutiren gestatten; überdies hat Poincaré diese Untersuchungen auch auf Differentialgleichungen höheren Grades und auf Systeme von Differentialgleichungen ausgedehnt.

Betrachten wir nun die „allgemeinen" Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(1.)\qquad F(x, y, y') = 0,$$

1) Man vergleiche hierzu etwa die Entwickelungen in Serret's Differential- und Integral-Rechnung (in der Bearbeitung von Harnack) pag. 68 ff. der 2. Abt. des II. Bandes, sowie die sogleich genauer zu besprechenden Untersuchungen von Poincaré im Journal de Mathematiques Serie 3, Bd. VII und VIII; Serie 4, Bd. I und II.

2) Vergl. z. B. Björling, Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen 1. O. und 1. Grades. Grunerts Archiv, 2. Reihe, Bd. 4.

indem wir hierfür festsetzen, dass die reelle Function F von x, y, y' für jedes die Gleichung (1.) befriedigende endliche Wertesystem x_0, y_0, y'_0 nach der Taylor'schen Reihe nach ganzen Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$, $y'-y'_0$ entwickelbar ist, wobei die Glieder erster Ordnung niemals sämmtlich fehlen, d. h. niemals die Gleichungen

$$(4.) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

für ein Wertesystem x_0, y_0, y'_0 gleichzeitig erfüllt sein sollen. Für den Verlauf des durch die Differentialgleichung definirten Curvensystems ist die „Discriminantencurve" wesentlich, für welche zwei von den verschiedenen, jedem Punkte x_0, y_0 zugeordneten Richtungen y'_0 zusammenfallen. Es sind die Punkte, für welche

$$(5.) \qquad F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

ist. Diese Discriminantencurve ist bekanntlich „im Allgemeinen" der Ort der Spitzen für das Curvensystem, wie dies zuerst de Morgan, Darboux und Cayley gezeigt haben.[1])

Von hier aus wandte sich die Untersuchung vor Allem auf die Frage nach den „singulären Lösungen" und die eben genannten Arbeiten von Darboux und Cayley entscheiden, unter welchen Umständen die Discriminantencurve oder ein sich abspaltender Teil derselben eine singuläre

1) Man vergl.: de Morgan's Aufsatz in den Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Band IX; — Darboux's zwei Noten in den Comptes rendus vom Jahre 1870 und insbesondere die ausführliche Darstellung „Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre," Bulletin des Sciences Mathém., I. Serie, Band IV (1873); und die Aufsätze Cayley's im Messenger of Mathematics, Band II (1873) und VI.

Lösung darstellt. Es muss dann jedenfalls neben den Gleichungen (5.) noch die weitere

$$(6.)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

für alle Punkte dieses Ortes erfüllt sein.

Weiterhin aber gibt die Möglichkeit eines Zerfallens der Discriminantencurve in eine Reihe mehrfach zählender Factoren Anlass, noch weitere besondere Vorkommnisse, wie den Ort von Berührungspunkten je zweier Curven des Systemes u. a. zu untersuchen.[1])

„Im Allgemeinen" treten jedoch alle solche Vorkommnisse nicht ein; die Discriminantencurve ist Spitzenort, und die Gleichungen (5.) und (6.) sind nur für einzelne Punkte gleichzeitig erfüllt; diese Punkte der Discriminantencurve sind dann wesentlich singuläre Stellen, definirt durch das Gleichungssystem:

$$(7.)\qquad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

1) Man vergl. hierzu neben den soeben genannten Arbeiten noch die Untersuchungen von Casorati aus den Jahren 1874—1881 in den Rendiconti und Memorie della R. Accad. dei Lincei, zum Teil abgedruckt im Bulletin von Darboux, 2. Serie Band III (1879). Ferner einen Aufsatz von Björling „Ueber die Coincidenzcurve der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung" im „Bihang" zu den „Handlingar" der k. schwed. Akad. d. W. Band 12, Abschnitt I (1887). — Weiter einen Aufsatz von Workman „Theory of the singular solutions . . ." im Quaterly Journal Band 22 (1887), in welchem die Litteratur ausführlich besprochen ist. — Sodann eine Note von Kapteyn im Bulletin von Darboux, 2. Serie Band XII (1888). — Auch eine Dissertation von C. Schmidt (Giessen 1884) ist zu nennen, welche indess weder auf Darboux noch auf Cayley u. a. Bezug nimmt.

und geometrisch characterisirt dadurch, dass in ihnen die Richtung der Tangente an die Integralcurve zusammenfällt mit der Richtung der Tangente an die Discriminantencurve.

Das Verhalten der Curven des Integralsystems in denselben ist meines Wissens noch nicht eingehend discutirt worden.

Es haben aber Briot und Bouquet in ihren fundamentalen Untersuchungen „Sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles"[1]) gezeigt, dass im Falle des Bestehens der Gleichungen (7.) die Lösung der Gleichung $F=0$ durch eine gewisse Transformation zurückgeführt werden kann auf die Behandlung einer Differentialgleichung ersten Grades, die an der betreffenden Stelle sich singulär verhält. Weiter zieht Poincaré in der schon erwähnten Abhandlung[2]) die fraglichen Punkte auch gestaltlich in seine Betrachtung. Indem er aber die geometrische Darstellung des Curvensystems (1.) nicht in die $(x\,y)$-Ebene verlegt, sondern — für seine Zwecke sehr übersichtlich — auf die Fläche

$$(8.)\qquad F(x, y, z)=0$$

$\left(\text{wo } z=\frac{dy}{dx}\right)$ und auf dieser Fläche ein entsprechendes einfach überdeckendes Curvensystem durch eine Differentialgleichung in Coordinaten u, v auf die Fläche darstellt, er-

1) Journal de l'école polyt. cah. 36. Hier seien noch unmittelbar anschliessende Untersuchungen von Poincaré (cah. 45.), Picard (Société math. de France Bd. 12) und insbesondere von Fuchs (Sitzungsber. der Akad. d. W. Berlin 1886) erwähnt. Indess kommen dieselben für die vorliegende, den „allgemeinen Fall" betreffende Discussion der gestaltlichen Verhältnisse nicht in Betracht.

2) Journal de Math., Serie 4, Bd. I, pag. 196 ff.

geben sich hier die durch Gleichung (3.) characterisirten Formen, wie sie bei Gleichungen ersten Grades auftreten.

Nun lässt sich allerdings aus den Poincaré'schen Formulirungen sofort erkennen, dass die Curvensysteme in der $(x\,y)$-Ebene aus der Projection der von ihm auf der Fläche $F(x, y, z) = 0$ betrachteten folgen. Es lässt sich auch der Umstand, dass die Discriminantencurve der Ort der Spitzen der Integralcurven ist, direct aus der Bemerkung ablesen, dass die auf der Fläche $F = 0$ verlaufenden Curven die „Umrisscurve" $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ (die dann in der Projection die Discriminantencurve abgiebt) in der (Projections-) Richtung der z-Axe durchsetzen. Das Verhalten des Curvensystems in den singulären Stellen (der Umrisscurve) bedarf aber noch einer speciellen Discussion, um aus ihm den Verlauf in der Projection auf die $x\,y$-Ebene abzulesen. Auf der Fläche $F = 0$ erscheinen die in Gleichungen von der Form (3.) gekennzeichneten drei Haupttypen, aber ihre Lage gegen die Umrisscurve und gegen die Projectionsrichtung (die z-Axe) ist in den einzelnen Fällen wesentlich und erst aus deren Fixirung ergiebt sich der Character der singulären Stelle in der $x\,y$-Ebene.[1])

Es erscheint mir daher nicht unwesentlich, auf eine genaue Discussion des Verlaufes der Curven in der Umgebung dieser singulären Stellen einzugehen und zwar in der $(x\,y)$-Ebene selbst. Sie ist in § 2 der vorliegenden Mitteilung ausgeführt, und zwar dadurch, dass in der Umgebung der singulären Stelle die allgemeine Differentialgleichung ersetzt wird durch eine Gleichung, welche die Glieder niedrigster Ordnung in der Entwickelung umfasst: Dies ist im Allgemeinen eine Differentialgleichung

1) Vergleiche Seite 39 des Folgenden.

zweiten Grades, welche die Eigenschaft besitzt, sich direct integriren zu lassen. Die von Briot und Bouquet (für den Fall auch noch weiterer Bedingungsgleichungen) gegebene Methode, jeden Zweig der Differentialgleichung durch eine Transformation auf eine Gleichung ersten Grades zurückzuführen, kommt hier einfach in der Integrationsmethode der Differentialgleichung zweiten Grades zum Ausdruck.

Es ergeben sich dabei drei wesentlich von einander verschiedene Haupttypen für diese „im Allgemeinen" sich bildenden Singularitäten einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche (eben jener Transformation entsprechend) den bei den Differentialgleichungen ersten Grades auftretenden Typen in bestimmter Weise zugeordnet sind.[1]) Dabei seien aber gleich hier zwei wesentliche Unterschiede zwischen dem Verlauf des Curvensystems im einen und andern Falle gekennzeichnet: Der erste folgt sofort aus den oben gemachten Bemerkungen; das Curvensystem umgibt bei den Differentialgleichungen ersten Grades die singuläre Stelle vollständig, während dasselbe in der Umgebung der singulären Stelle im Falle der allgemeinen Differentialgleichung auf das Innengebiet der Discriminantencurve, welches doppelt überdeckt wird,[2]) beschränkt ist. Und weiter: Bei den Gleichungen ersten Grades wird der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ an der singulären Stelle unbestimmt, während er für die allgemeinen Gleichungen an den durch die Gleichungen (7.) bezeichneten Stellen einen ganz bestimmten Wert besitzt. Es ist ein Vorkommniss viel speciellerer Art, wenn hier

1) Man vergleiche die Tafeln I, II, III.

2) Selbstverständlich abgesehen von dem Umstande, dass weitere Zweige des Systems, welche sich an der betreffenden Stelle nicht singulär verhalten, noch über der Stelle ausgebreitet sein können.

ein solches Unbestimmtwerden eintritt; dann wird nämlich die letzte der Gleichungen (7.) dadurch erfüllt, dass gleichzeitig

$$(9.) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

wird. Es ist nicht uninteressant, auch diese Punkte, für welche sich zunächst wieder Gleichungen von der Form (3.) zu Grunde legen lassen, weiter zu verfolgen.[1]) Ich will mich aber in der gegenwärtigen Mitteilung zunächst „auf den allgemeinen Fall" (wenn diese zur Abkürzung gewählte Bezeichnung gestattet ist) beschränken. —

Neben den durch die Gleichungen (7.) definirten „wesentlich" singulären Stellen treten nun für unsere Differentialgleichungen (soferne sie nur von höherem als zweiten Grade sind) im Allgemeinen noch Singularitäten auf, welche man als „ausserwesentliche" bezeichnen kann: Es sind diejenigen Stellen der Ebene (x, y), in welchen die Discriminantencurve eine Spitze besitzt, also definirt durch das Gleichungssystem:

$$(10.) \qquad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Ich [illegible] § [illegible] vergl. auch Tafel IV. Fig. IV) auf das Verhalten des [illegible]versystems in diesen Stellen kurz eingegangen.

M[illegible] Gleichungen (7.) und (10.) de[illegible] im Allgemeinen [illegible] erschöpft.

[illegible] der Curven [illegible] Systemes liefert nun [illegible] die Bestimmung des

[illegible] [illegible]punkten der Discriminanten-[illegible] [illegible] besitzt, wesentlich ist.

Characters der singulären Stellen die Möglichkeit, die Untersuchung der gestaltlichen Verhältnisse auf eine Reihe von je einfach von den Curven des Integralsystems überdeckten Schichten zu übertragen, deren jede durch (geschlossene) Teile der Discriminantencurve abgegrenzt ist und auf deren Rand — soferne im Innern der Gebiete keine singulären Stellen vorhanden sind — sich die singulären Punkte verteilen. Dabei nimmt jeder singuläre Punkt an zwei längs der Discriminantencurve zusammenhängenden Schichten Teil. So lassen sich für jedes Teilgebiet Relationen zwischen der „Characteristik“ (Zusammenhangszahl) desselben und den auf dem Rande befindlichen singulären Stellen aufstellen, wie sie Poincaré für jedes geschlossene Gebiet von $F=0$ und die auf ihm nach den Typen der Gleichungen (3.) unterschiedenen singulären Stellen gegeben hat, und von der Art wie ich sie für beliebige, ein zweidimensionales Gebiet einfach überdeckende Curvensysteme in Beiträgen zur Analysis situs (vergl. z. B. Math. Annalen Bd. 32, pag. 500) aufgestellt habe.

Auch bei diesen Abzählungen habe ich in der gegenwärtigen Mitteilung singuläre Stellen im Innern der Gebiete als „im Allgemeinen nicht auftretend“ nicht berücksichtigt. Solche Abzählungen bieten indess gerade auch bei specielleren Fragestellungen Interesse. Ich möchte gleich hier ein Beispiel erwähnen, welches H. A. Schwarz mit Bezug auf die singulären Stellen der Haupttangentencurven einer Minimalfläche aufgestellt hat[1]). Es war die in einer mündlichen Unterredung mir von Herrn Schwarz mitgeteilte Formel, welche mich, zusammen mit der Lektüre der Poincaré'schen Abhandlungen veranlasst hat, meine Studien über Analysis situs speciell auf die durch Differential-

1) „Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen.“ Gesammelte Mathematische Abhandlungen von H. A. Schwarz. Band I pag. 131 und Zusatz pag. 319—321.

gleichungen erster Ordnung definirten Curvensysteme anzuwenden. Ich denke dabei auch auf solche speciellere Fragestellungen bei nächster Gelegenheit einzugehen. Einige diesbezügliche Bemerkungen habe ich in § 5 mit Bezug auf den Verlauf der Haupttangentencurven einer Fläche angefügt. Es schien mir nämlich nicht uninteressant zu zeigen, dass die sämmtlichen drei Haupttypen wesentlich singulärer Punkte im Verlauf der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche vorkommen können an (parabolisch gekrümmten) Stellen, in welchen die Fläche eine ganz bestimmte Tangentialebene besitzt, sich also im gewöhnlichen Sinne regulär verhält[1]).

Der Character der in der vorliegenden Mitteilung untersuchten „im Allgemeinen vorhandenen" singulären Stellen eines Curvensystems ist wesentlich bedingt durch die Definition des Systems durch eine Differentialgleichung. Bekanntlich gelangt man zu ganz anderen Resultaten, wenn man von der Definition eines Curvensystems durch eine Gleichung zwischen x, y und einem willkürlichen Parameter ausgeht. Es schien mir passend, (in einem letzten § 6) die unter der letzteren Annahme „im Allgemeinen" eintretenden besonderen Vorkommnisse zusammenzustellen, wo dann der wesentliche Unterschied der beiden Annahmen klar zum Ausdruck gelangt.

1) Hierzu vergleiche man den Aufsatz von Klein im VI. Bande der mathematischen Annalen „Ueber Flächen dritter Ordnung," in welchem einer der hier zu besprechenden Typen dargestellt ist für den Verlauf der Haupttangentencurven in der Umgebung der sogenannten asymptotischen Punkte (a. a. O. pag. 576 und Tafel VI).

Bezüglich des Verhaltens der Haupttangentencurven in singulären Punkten einer Fläche habe ich zusammen mit Herrn Finsterwalder im math. Institut der techn. Hochschule Untersuchungen veranlasst, über die bei anderer Gelegenheit berichtet werden soll.

§ 2.

Die wesentlich singulären Stellen einer „allgemeinen" Differentialgleichung erster Ordnung.

Um das Verhalten des durch die Gleichung

$$(1.) \qquad F(x, y, y') = 0$$

definirten Curvensystems in der Umgebung eines singulären Punktes, für welchen

$$(7.) \qquad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

statthat, zu studiren, sei der singuläre Punkt im Coordinatenanfangspunkt $x = 0$, $y = 0$ angenommen und die x-Axe in ihm als Tangente an die Discriminantencurve, so dass

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0$$

ein Lösungssystem der Gleichungen (7.) bildet.

Die nach den Voraussetzungen über die Funktion F an jeder Stelle mögliche Potenzentwickelung gestaltet sich im Nullpunkt zunächst folgendermassen:

$$\underline{\overline{F}_2 y}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\underline{\overline{F}_{11} x^2} + 2\overline{F}_{12} xy + \overline{F}_{22} y^2) + (\underline{\overline{F}_{13} x} + \overline{F}_{23} y)y' + \tfrac{1}{2}\underline{\overline{F}_{33} y'^2}$$

$$+ \tfrac{1}{6}(\overline{F}_{111} x^3 + \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

Nun wird die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

erfüllt, wenn man setzt:

$$y = y' \cdot x \cdot v$$

wo v für $x = 0$ nicht verschwindet. Substituiren wir diesen Wert von y in der obigen Entwickelung, so erhalten wir Aufschluss über die Grössenordnung der einzelnen Terme derselben. Die oben durch Unterstreichen hervorgehobenen Glieder sind in x und y' von der zweiten Dimension, alle übrigen von höherer. Indem wir eine etwas kürzere Bezeichnungsweise für die Zahlencoefficienten jener Glieder einführen, von denen „im Allgemeinen" keines verschwindet, erhalten wir folgenden Satz:

Das Verhalten des durch die Differentialgleichung zweiten Grades:

$$(11.) \qquad y'^2 + 2\,c\,x\,y' + b\,x^2 + 2\,a\,y = 0$$

definirten Curvensystems in der Umgebung des Punktes $x = 0$, $y = 0$ ist typisch für die „im Allgemeinen" auftretenden, durch die Gleichungen (7.) definirten Singularitäten einer Differentialgleichung erster Ordnung.[1])

Die Integration dieser Differentialgleichung lässt sich sofort bewerkstelligen. Ich führe dieselbe, um die Beziehung der hier auftretenden Singularitäten zu den bei den Gleich-

---

1) Man vergleiche bezüglich der allgemeinen Formulirung der Rèduction einer Differentialgleichung auf die Glieder niedrigster Dimension, vor Allem die schon genannte Abhandlung von Briot und Bouquet (im 36. Heft des Journal de l'école Polyt.) Abschn. III und IV. Weitere Ausführungen darüber enthält auch ein neuerdings erschienener Aufsatz von Fine „On the Functions defined by differential equations, with an extension of the Puiseux Polygon-Construction of these equations. American Journal Bd. XI, 1889.

Wählt man für $F(x, y, z) = 0$, $y' = z$ wieder die Deutung als Fläche über der $(x\,y)$-Ebene, so besagt hier die Beschränkung auf die Glieder (10.), dass die Fläche, welche wegen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ im Coordinatenanfangspunkt die Ebene $(x\,z)$ berührt, ersetzt wird durch ein Paraboloid.

ungen 1. Grades stattfindenden möglichst scharf hervortreten zu lassen, im Folgenden näher aus:

Durch Differentiation nach x entsteht aus (11.) die Differentialgleichung ersten Grades in x und y':

$$(12.)\qquad (c x + y')\frac{dy'}{dx} + b x + (a + c) y' = 0$$

Es sei nun der Uebersichtlichkeit der folgenden Entwickelung wegen in dieser Differentialgleichung x durch die Bezeichnung x' ersetzt. Wir deuten dann den Verlauf der Curven dieses Systems (12.) in einer Ebene (x', y') und kehren von ihr zu den Curven des Systems (11.) zurück mit Hülfe der ein-zweideutigen Abbildung der Ebene (x', y') in die ursprüngliche Ebene (x, y):

$$(13.)\qquad \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -c x \pm \sqrt{(c^2 - b) x^2 - 2 a y}, \end{aligned}$$

wo dann umgekehrt:

$$(13a.)\qquad y = -\frac{1}{2a}(y'^2 + 2 c x' y' + b x'^2)$$

ist.

Das Integral der Differentialgleichung (12.) lässt sich nun bekanntlich in der Form[1])

$$(14.)\qquad (x' + \lambda_1 y')^{\varrho_1} \cdot (x' + \lambda_2 y')^{\varrho_2} = C$$

darstellen, wobei man hat:

$$\lambda_1 = \frac{a + 2c + \sqrt{D}}{2b}, \quad \lambda_2 = \frac{a + 2c - \sqrt{D}}{2b},$$

1) Es ist für das Folgende unerlässlich, hier eine Reihe bekannter Formeln zusammenzustellen, bezüglich deren man etwa Serret-Harnack, Diff. u. Integral-Rechnung II, 2 pag. 66 ff. vergleiche.

$$g_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{-a + \sqrt{D}}{\sqrt{D}}, \quad g_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{a + \sqrt{D}}{\sqrt{D}},$$

$$D = (a + 2\,c)^2 - 4\,b,$$

und hier ergeben sich nun die drei **Haupttypen der singulären Stellen der Differentialgleichung ersten Grades** folgendermassen:

I′. Für

$$(16.) \qquad (a + 2\,c)^2 - 4\,b < 0$$

werden die Wurzeln λ_1 und λ_2, und ebenso g_1 und g_2 imaginär. Die Integralcurven bilden ein **System logarithmischer Spiralen um den Nullpunkt.** [Fig. I′ der Tafel].

II′ und **III′**. Für

$$(17.) \qquad (a + 2\,c)^2 - 4\,b > 0$$

hat man zu unterscheiden, ob

II′. g_1 und g_2 gleiches Vorzeichen

III′. g_1 und g_2 verschiedenes Vorzeichen besitzen. Dies hängt davon ab, ob

$$(18.) \qquad c\,(a + c) - b \gtrless 0$$

ist.

Im **Falle II′** bilden die beiden Geraden

$$G_1 : x' + \lambda_1\,y' = 0 \text{ und } G_2 : x' + \lambda_2\,y' = 0$$

zwei ausgezeichnete Richtungen durch den singulären Punkt und es schliesst sich das Curvensystem an diese in der den Exponenten g_1 und g_2 entsprechenden Ordnung asymptotisch an. [Fig. II′ der Tafel.]

Im **Falle III′** laufen sämmtliche Curven des Integralsystems durch den singulären Punkt und berühren hier die

eine der beiden ausgezeichneten Geraden, und zwar die Gerade G_2, bez. G_1, je nachdem

(19.) $$-\frac{g_2}{g_1} \lessgtr 1$$

ist. [Fig. III′ der Tafel.]

Die Transformation (13.) verwandelt nun diese Typen in die von uns gewünschten für die singuläre Stelle $x = 0$, $y = 0$ der Differentialgleichung (11.). Die gestaltliche Umformung ergiebt sich dabei in übersichtlichster Weise: Die Ebene (x', y') wird derart auf die Ebene (x, y) abgebildet, dass das Geradenbüschel:

$$x' + \lambda y' = 0$$

übergeht in das System der die x-Axe berührenden Parabeln:

(20.) $$(b\lambda^2 - 2c\lambda + 1)x^2 + 2a\lambda^2 y = 0,$$

während die Parallelen zur y'-Axe wegen

$$x' = x$$

wieder in solche zur y-Axe verwandelt werden. Die Gerade

(21.) $$cx' + y' = 0$$

wird übergeführt in die Parabel

$$(b - c^2)x^2 + 2ay = 0$$

und diese bildet in der Ebene (x, y) die Discriminantencurve: Der Teil

$$(b - c^2)x^2 + 2ay < 0$$

dieser Ebene erscheint doppelt überdeckt bez. von den Bildern der beiden Hälften

$$cx' + y' \gtrless 0$$

der Ebene (x', y').

Für die weitere Characterisirung der Abbildung ist es nun wichtig, die gegenseitige Lage der Geraden

(24.) $G \equiv x' = 0,\ G_1 \equiv x' + \lambda_1 y' = 0,\ G_2 \equiv x' + \lambda_2 y' = 0$

und jener eben genannten

$$G_3 \equiv x' + \frac{1}{c} y' = 0$$

für die Fälle II und III genau zu bezeichnen.

Man schneide zu dem Ende die letzten drei Geraden durch eine Parallele zur y-Axe (G) und bezeichne die Ordinaten der Schnittpunkte bez. mit y_1, y_2, y_3, dann ist für die gegenseitige Lage, wie sich sofort aus den oben mitgeteilten Formeln ergibt, folgende einfache Beziehung massgebend:

(25.) $\quad y_2 - y_3 : y_3 - y_1 : y_2 - y_1 = g_2 : g_1 : g_1 + g_2$

a) Aus der ersten dieser Proportionen folgt unmittelbar, dass im Falle II, also für $\frac{g_2}{g_1} > 0$, die Geraden G und G_3 von den beiden anderen G_1 und G_2 getrennt werden, während sie im Falle III, für $\frac{g_2}{g_1} < 0$ nicht getrennt werden.

b) In letzterem Falle besagt dann der zweite Teil der Proportion (25.), also etwa:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = 1 + \frac{g_2}{g_1},$$

dass die Geraden G und G_1 von G_2 und G_3 getrennt, beziehungsweise nicht getrennt werden, je nachdem

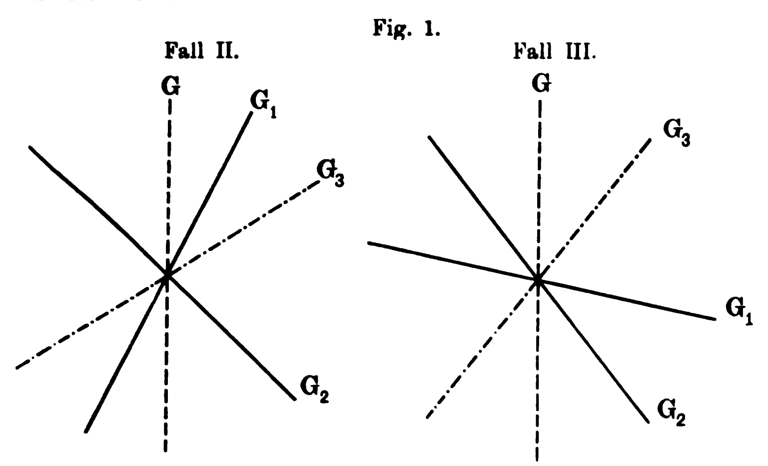
$$-\frac{g_2}{g_1} \lesseqgtr 1$$

ist, also (vergleiche die Formel (19.)) je nachdem die Gerade G_2 oder G_1 von den Curven des Integralsystems berührt wird. Diese letztere Bedingung lässt sich auch so aussprechen:

Im Falle III wird die Gerade G_3 und diejenige der beiden Geraden G_1, G_2, welche von den Curven des Systems nicht berührt wird, getrennt von der Geraden G und der zweiten der Geraden G_1, G_2.

Der Zusammenhalt der durch (a) und (b) gekennzeichneten möglichen Lagen ergibt also im Falle II wie III wesentlich nur je eine schematische Figur, welche die gegenseitige Lage der vier Geraden bezeichnet:

Fig. 1.



Dabei ist in Figur III die Gerade, welche von den Curven des Systems berührt wird, mit G_1 bezeichnet.

Nunmehr lässt sich das Resultat der Transformation auf unsere in den Figuren I′, II′, III′ der Tafeln dargestellten Typen auch gestaltlich mit aller Bestimmtheit angeben.

Man beachte dabei, dass alle Schnittpunkte unserer in der $(x' y')$-Ebene gegebenen Curven mit der Geraden

$$c x' + y' = 0$$

zu Spitzen auf der Discriminantencurve

$$(b - c^2)\, x^2 + 2\, a\, y = o$$

der (x, y)-Ebene Veranlassung geben [1]).

I. Fall I. Die logarithmischen Spiralen des Typus I′ ergeben in der (x, y)-Ebene Curven, welche im Innenbereich der Discriminantencurve unendlich oft um den singulären Punkt oscilliren, und dabei mit Spitzen auf die Discriminantencurve auftreffen. Vergl. Fig. (I) der Tafel, in welcher (wie auch in den folgenden Figuren) die Beziehung zur darüberstehenden Figur (I′) durch verschiedene Ausführung der entsprechenden Linien angedeutet ist [2]).

II. Im Falle II erhält man aus den Geraden G_1 und G_2

$$x' + \lambda_1\, y' = o \text{ und } x' + \lambda_2\, y' = o$$

(vergl. Formel (20)) die zwei durch den singulären Punkt laufenden Parabeln:

$$x^2 + 2\, \lambda_1\, y = o \quad \text{und} \quad x^2 + 2\, \lambda_2\, y = o,$$

---

1) Die Gerade

$$c\, x' + y' = o$$

verbindet in der (x', y')-Ebene die Punkte, für welche $y'' = \infty$, d. h. die Tangente parallel zur y'-Axe ist; so lässt sich (vergl. die Figuren I′, II′, III′ der Tafeln) aus diesem Umstand die oben entwickelte gegenseitige Lage der Geraden G_1, G_2, G_3 auch gestaltlich erschliessen.

2) In Figur I, wie in II und III ist ferner durch die ganz fein punktirte Linie die Curve der Wendepunkte für das System angedeutet; es ist dies die Curve, welche (vergl. Darboux a. a. O. Bulletin Band IV, pag. 161) durch Elimination von y' aus den zwei Gleichungen

$$F(x, y, y') = o, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = o$$

entsteht; in unserem Falle der Gleichung (10.) erhält man die Parabel

$$b\, (a^2 - c^2 + b)\, .\, x^2 + 2\, a\, (a + c)^2\, .\, y = o$$

welcher in der Ebene $(x'\, y')$ die gleichfalls punktirt angedeutete Gerade

$$b\, x' + (a + c)\, y' = o$$

entspricht.

welche die x-Axe im Coordinatenanfangspunkt zur Tangente haben, während die übrigen Curven des Systems in Zweigen mit Spitze und im anderen ohne Spitze in der durch Fig. II der Tafel characterisirten Weise verlaufen [1]).

III. Im Falle **III** laufen sämmtliche Curven des Systems die x-Axe berührend, wieder unter Auszeichnung der soeben in II gegebenen Parabeln durch den singulären Punkt hindurch. Dabei entstehen die Spitzen auf der Discriminantencurve in der in Figur III angedeuteten Weise.

Mit diesen drei Formen sind die im Allgemeinen bei jeder Differentialgleichung erster Ordnung, die nicht vom ersten Grade ist, auftretenden Typen der durch die Gleichungen (7.) definirten singulären Stellen erschöpft.

Analog wie bei den singulären Stellen der Differentialgleichungen ersten Grades ist auch hier nur im Falle II und III, wenn $\frac{g_2}{g_1}$ eine rationale Zahl ist, das System in der Umgebung der singulären Stelle mit einem algebraischen Curvensystem vergleichbar.

Mit Bezug auf die in den Tafeln gegebenen Zeichnungen seien noch die Formen hervorgehoben, in welchen in den Fällen I', II', III' das Unbestimmtwerden von y'' im Nullpunkt geometrisch zum Ausdruck kommt, und wie im Gegensatz dazu in den Figuren I, II, III die Convergenz des Differentialquotienten nach dem Werte $y' = o$ sich ausspricht.

Endlich sei noch erwähnt, dass für das Verhalten eines Curvensystems für im Unendlichen gelegene singuläre Stellen ganz dieselben Typen massgebend sind, soferne wir dabei die Ebene im projectiven Sinne auffassen, mit „einer unendlich weiten Geraden", eine Auffassung, die wir im Nachfolgenden beibehalten wollen.

1) Auf einen solchen Fall bezieht sich die von Klein (vergl. oben pag. 32) Anmerkung) Annalen VI gegebene Figur.

§ 3.

Die ausserwesentlich singulären Stellen einer „allgemeinen" Differentialgleichung erster Ordnung.

Zur Discussion der durch das Gleichungssystem

$$(10.) \qquad F = o, \ \frac{\partial F}{\partial y'} = o, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = o$$

definirten singulären Stellen unseres Curvensystems, den Spitzen der Discriminantencurve, sei wieder

$$x = o, \ y = o, \ y' = o$$

als Lösungssystem von (10.) angenommen. Die Entwickelung von F an dieser Stelle gestaltet sich dann folgendermassen:

$$\underline{\underline{\bar{F}_1 x}} + \underline{\bar{F}_2 y} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} (\bar{F}_{11} x^2 + 2 \bar{F}_{12} x y + \bar{F}_{22} y^2) + (\underline{\bar{F}_{13} x} + \bar{F}_{23} y) y'$$
$$+ \tfrac{1}{6} \underline{\underline{\bar{F}_{111} y'^3}} + \dots$$

Hier sind analog wie in § 2 die Glieder niedrigster Ordnung (durch doppeltes Unterstreichen) hervorgehoben und dann auch (durch einfaches Unterstreichen) die Glieder nächst höherer Ordnung. Für die Betrachtung des Curvensystems in der Umgebung der singulären Stelle legen wir also (mit kürzerer Bezeichnung) die Differentialgleichung dritten Grades zu Grunde:

$$(26.) \qquad o = a x - y + b x y' + c y'^3$$

bei welcher „im Allgemeinen" keines der Glieder fehlt.

Gehen wir zunächst auf die erste Annäherung durch

$$(27.) \qquad o = a x + c y'^3$$

ein, so kennzeichnet dieselbe die Singularität der einen durch den singulären Punkt laufenden Curve des Systems: y' als Parameter betrachtet, ergibt sich für x und

y eine Entwickelung nach ganzen Potenzen von y', welche mit y'^3 bezw. mit y'^4 beginnt[1]).

Die Discriminantencurve für Gleichung (27.) ist durch $x = o$ gebildet. Erst die Gleichung (26.) gibt für die Discriminantencurve in der singulären Stelle den Character der Spitze; man erhält hier für die Discriminantencurve die Gleichung

$$27\,c\,(a\,x - y)^2 + 4\,b^3\,x^3 = o$$

Der Umstand, dass längs der Geraden $x = o$ von den drei durch die Gleichung (26.) gegebenen Fortschreitungsrichtungen nur eine reell ist, lässt sofort erkennen, dass in der durch die Discriminantencurve zerschnittenen $(x\,y)$-Ebene der Teil vom Winkel Null in der Umgebung der singulären Stelle dreifach, der andere Teil einfach von den Curven des Systems überdeckt ist. Die Curve der Wendepunkte ist für (26.) eine Gerade, die nicht durch die Spitze der Discriminantencurve hindurchgeht, so dass die Umgebung der singulären Stelle frei von Wendepunkten ist. Das für die Gleichung (26.) als verallgemeinerter Clairaut'scher Gleichung auf die einfachste Weise herzustellende allgemeine Integral lässt die näheren Eigenschaften des Curvensystems im Einzelnen verfolgen. Für die specielle, durch den singulären Punkt laufende Curve ergibt sich für x und y die schon oben aus der Gleichung (27.) erschlossene Entwickelung nach ganzen Potenzen von y', welche die Bezeichnung der Stelle als ausserwesentlich singulär rechtfertigt. Der weitere Verlauf des Curvensystems in der Umgebung des Nullpunktes bietet die Auflösung dieser Singularität in Curven mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt, wie sie der Form nach auch bei der Auflösung jener Singularität im Gebiete algebraischer Curven entstehen. Man vergleiche die schematische Darstellung durch Fig. IV der IV. Tafel.

---

1) Vergl. Briot-Bouquet, a. a. O. Nr. 98, pag. 192.

§ 4.

Relationen zwischen der Anzahl der singulären Stellen in einem gegebenen, von der Discriminantencurve begrenzten Gebiete. Bemerkungen über den Gesammtverlauf der Curvensysteme.

Handelt es sich darum, sich über den Gesammtverlauf des durch unsere Differentialgleichung

$$(1.) \qquad F(x, y, y') = o$$

definirten Curvensystems zu orientiren, so wird man zunächst mit Hülfe der Discriminantencurve, längs welcher die verschiedenen Wertsysteme y', welche den Stellen (x, y) zugehören, zusammenhängen, die Ebene (x, y) in eine Anzahl nur einfach überdeckter Gebiete zerlegen — es sind dies, wenn wir wieder an die von Poincaré gewählte Deutung von $F = o$ als Fläche denken, die einzelnen Schichten der Projection dieser Fläche auf die (x, y)-Ebene. Nehmen wir z. B. F als eine rationale ganze Function von x, y, y', in y' vom Grade n an, so sind es eine Anzahl von höchstens n durch die Discriminantencurve von einander getrennten Gebieten (die ihrerseits wieder aus mehreren Stücken bestehen können). Ich habe in einer früheren Untersuchung[1]) ausführlich gezeigt, in welcher Weise wir diese einzelnen Gebiete und ihre gegenseitige Lage im Sinne der Analysis situs vollständig characterisiren können.

Jedem der Teilgebiete kommt nun eine „characteristische Zahl" K_i zu — die bekannte Zusammenhangszahl, die ich in der Form der „Kronecker'schen Cha-

1) Beiträge zur Analysis situs III. Mitteilung. Berichte der k. sächs. Gesellschaft d. W. vom März 1887 pag. 44.

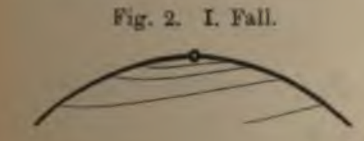
racteristiken"[1]) voraussetze. Die Characteristik K der ganzen Fläche $F = o$ ist dann

$$K = \Sigma K_i.$$

Eine analoge Zahl ergibt sich für jeden einzelnen, in sich geschlossenen Teil von $F = o$. Die Bemerkung, durch die Zerschneidung längs der Discriminantencurve auch für die einzelnen, je einfach überdeckten berandeten Teilgebiete die characteristischen Zahlen K_i zu fixiren, und diese als weitere Characteristiken für die Differentialgleichung zu verwenden, gestattet dann, den Verlauf des durch die Differentialgleichung gegebenen Curvensystems in der Ebene (x, y) noch eingehender zu verfolgen.

Im Allgemeinen befinden sich, wie oben gezeigt, die sämmtlichen singulären Stellen des Curvensystems auf der Discriminantencurve; jede von ihnen nimmt also an zwei übereinanderliegenden Gebieten Teil, so zwar, dass für die einzelnen Zweige der Curven des Integralsystems immer in der Spitze der Uebergang von dem einen in das andere Gebiet statthat. Dadurch erhalten für das einzelne, einfach überdeckte Gebiet die wesentlich singulären Stellen vom Typus I, II, III die durch die hier folgenden Figuren 2., 3. und 4. gegebene Gestalt:

Fig. 2. I. Fall.



Für die durch die Spitzen der Discriminantencurve gegebenen ausserwesentlich singulären Stellen muss bei der

1) Man vergleiche für das Folgende speciell etwa meinen Aufsatz zur Analysis situs im 32. Bande der math. Annalen pag. 474 ff. und weiterhin für die sogleich zu besprechende Relation pag. 500. Ferner sehe man die betr. Entwickelungen Poincaré's in den genannten Aufsätzen, insbesondere Capitel XIII.

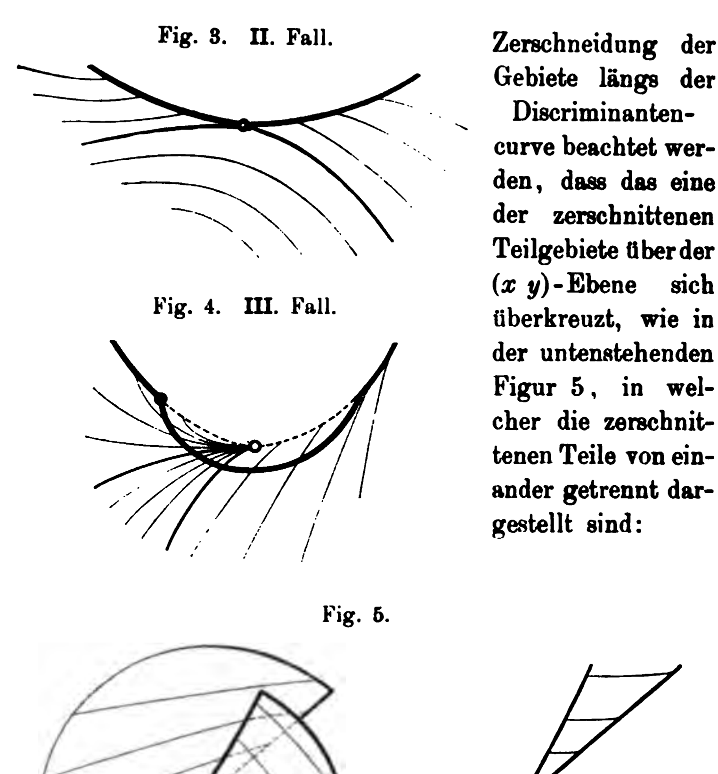
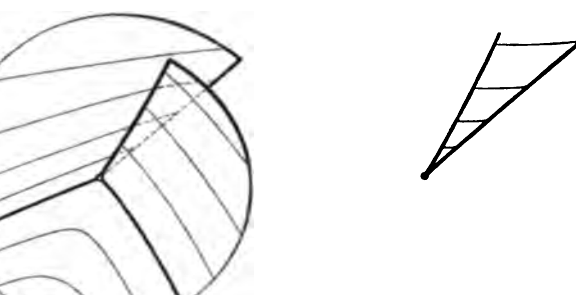


Fig. 3. II. Fall.

Fig. 4. III. Fall.

Zerschneidung der Gebiete längs der Discriminantencurve beachtet werden, dass das eine der zerschnittenen Teilgebiete über der $(x\ y)$-Ebene sich überkreuzt, wie in der untenstehenden Figur 5, in welcher die zerschnittenen Teile von einander getrennt dargestellt sind:

Fig. 5.



Hat man in der angegebenen Weise die Zerschneidung getroffen, so läuft in jedem Teilgebiet durch jeden Punkt des Innern sowie des Randes nur je eine Curve des Integralsystems. Von den wesentlich singulären Stellen I, II, III des Randes aber laufen beziehungsweise je 0, 2, ∞ viele Zweige aus; von den ausserwesentlich singulären Stellen ver-

laufen 2 Zweige in das eine, 0 Zweige in das andere der zerschnittenen Gebiete.

Zwischen diesen singulären Stellen und der Characteristik K_i des Teilgebietes besteht dann eine Relation, welche aus der allgemeinen, Annalen 32. pag. 501 gegebenen sich sofort ablesen lässt. Die wesentlich singulären Punkte von der Kategorie I seien als Punkte P_0 bezeichnet und in der Anzahl p_0 vorhanden, ebenso seien p_2 Punkte P_2 der Kategorie II und p_∞ Punkte P_∞ der III. Art vorhanden. Die letzteren Punkte erweisen sich dabei, wie die vorstehende Figur 4 zeigt, als s p e c i e l l e Formen von Punkten P_∞ des Randes, aequivalent denjenigen, welche auf pag. 502 jener Abhandlung und in der mittleren Fig. 12[f] der dortigen Tafel III gegeben sind. Durch Ausschneiden der singulären Stelle (wie in vorstehender Figur 4 durch die stark gezeichnete Linie angedeutet) ergibt sich nämlich unsere Stelle P_∞ für die Abzählung als aequivalent mit einer Stelle P_0. Die ausserwesentlich singulären Stellen sind als Punkte R_2 bezw. R_0 zu bezeichnen; sie seien in der Zahl r_2 bezw. r_0 in dem Teilgebiete vorhanden.

Die „P u n k t c h a r a c t e r i s t i k e n“ für die Abzählung von K_i sind sonach

für die Punkte P_0, P_2, P_∞ beziehungsweise

$$+\tfrac{1}{2},\quad -\tfrac{1}{2},\quad +\tfrac{1}{2},$$

für die Punkte R_0, R_2 beziehungsweise

$$+\tfrac{1}{2},\quad -\tfrac{1}{2},$$

und so ergibt sich aus der eben citirten Formel:

F ü r j e d e s T e i l g e b i e t v o n d e r C h a r a c t e r i s t i k K_i b e s t e h t d i e R e l a t i o n:

$$(28.)\qquad K_i = \frac{(p_0 + p_\infty - p_2) + (r_0 - r_2)}{2}.$$

Summirt man über die sämmtlichen Teilgebiete und beachtet, dass dann jeder singuläre Punkt zweimal vorkommt, so folgt:

$$(29.)\qquad K = \Sigma K_i = s_0 + s - s_2,$$

wo jetzt die s die Gesammtanzahlen der wesentlichen Singularitäten I^ter^, II^ter^ und III^ter^ Art bedeuten, und die Zahlen für die ausserwesentlich singulären Punkte R_0, R_2, die immer paarweise auftreten, in Wegfall kommen.

Formeln von der Gestalt (29.) erhält man für jeden in sich geschlossenen Teil der Fläche $F = o$. Diese sind (bis auf die Zählweise) identisch mit den von Poincaré a. a. O.[1]) gegebenen.

Bezüglich der Allgemeingültigkeit der Formeln (28.) und (29.) sei noch erwähnt, dass es keinerlei Unterschied macht, ob etwa einige Teilgebiete sich durch das Unendliche hinerstrecken. Solche Gebiete sind dann (soferne sie nicht durch eine blosse Projection ganz ins Endliche gebracht werden können) Gebiete „von umkehrbarer Indicatrix", was aber, wie ich schon Annalen 32 hervorgehoben, für die zu Grunde gelegte Art, den Zusammenhang abzuzählen, ohne jeden Einfluss ist[2]).

Für die Ausführung der in Formel (28.) angedeuteten Summation über die Punkte P und R für ein Teilgebiet von der Characteristik K_i werden nun die Punkte R_2 und R_0

1) Journal de math. Serie 4 Bd. I pag. 203.

2) Darin und in der gleichfalls hier benutzten directen Summirbarkeit der Formeln liegt der Vorteil der Abzählung des Zusammenhanges mit Hülfe der Punktcharacteristiken. Poincaré betrachtet, um der Schwierigkeit zu entgehen, die unendlich weiten Elemente der Ebene übersichtlich in die Formulirung einzubegreifen, die Projection der Ebene auf eine Kugel vom Centrum aus. Hier tritt also der Character der Ebene als Fläche mit umkehrbarer Indicatrix dadurch hervor, dass die Ebene zweimal auf die Kugel abgebildet erscheint, wobei dann der Aequator als „Uebergangslinie" die Stelle der unendlich weiten Geraden in der Ebene vertritt.

(wie Fig. 5 zeigt) durch die im Sinne der Analysis situs zu bestimmende Gestalt des Teilgebietes von selbst getrennt. Für die Unterscheidung der Punkte P_0, P_∞ und P_2 dienen die Ungleichungen (16.), (17.), (18.), deren Gestalt dieselben wieder als Punktcharacteristiken eines Functionensystems im Kronecker'schen Sinne erkennen lässt, wie dies ja aus der ganzen Fragestellung ohne Weiteres deutlich ist[1]).

Hat man nun, um ein einzelnes Teilgebiet von der Characteristik K_i — das aus einem Stücke bestehen möge — zu studiren, die Art und Verteilung der singulären Stellen auf dem Rande fixirt, eine Aufgabe, die neben der Bestimmung von Punktcharacteristiken im Wesentlichen lediglich die wiederholte Anwendung des Sturm'schen Satzes erfordert[2]),

1) Bezüglich einer geometrischen Characteristik, welche, wie in Formel (28) und (29), die Punkte P_0 und P_∞ einerseits und die Punkte P_2 andererseits zusammenordnet, mag noch das Folgende bemerkt sein:

Man beschränke sich in der Umgebung der singulären Stelle auf das durch die Figuren I, II und III der Tafeln bezeichnete Gebiet, welches doppelt von den Curven des Systems überdeckt ist. Construirt man hier das Orthogonalsystem derjenigen Trajectorien, welche je die Winkel des ursprünglichen Systems halbiren, so ergibt sich leicht: Die singulären Stellen des ursprünglichen Systems (welche nicht singulär sind für das System der Trajectorien) werden durch Berührungen einer Trajectorie des Systems mit der Discriminantencurve bezeichnet, und zwar berührt diese Trajectorie die Discriminantencurve in den Punkten P_0 bezw. P_∞ von aussen, in den Punkten P_2 von innen. Dabei sind von diesen in die singulären Stellen fallenden Berührungspunkten noch leicht diejenigen weiteren Berührungsstellen der Trajectorien mit der Discriminantencurve zu trennen, in welchen eine Curve des Integralsystems (also die betr. Spitzentangente) senkrecht steht auf der Discriminantencurve.

2) Vergl. den schon erwähnten Aufsatz III zur Analysis situs, Berichte der sächs. Ges. d. W. vom März 1887.

so lassen sich die gestaltlichen Möglichkeiten für ein dieses Gebiet überdeckendes Curvensystem auf eine Reihe von kanonischen Formen zurückführen, zu denen noch die Aenderung der Systemcurven je um gewisse „Periodenwege", welche die verschiedenen Teilränder des Gebietes umkreisen, hinzutreten.

Ich denke in weiterer Ausführung dieser Untersuchungen, die ganz im Sinne der Poincaré'schen Darstellungen liegen, auf die hiermit gegebenen Mannigfaltigkeiten noch näher einzugehen. Hier seien nur noch folgende besondere Fälle erwähnt, bei denen wir voraussetzen, dass ausserwesentlich singuläre Punkte R fehlen sollen (wie dies z. B. bei den Haupttangentencurven einer Fläche, und überhaupt für jedes durch eine Differentialgleichung zweiten Grades definirte System im Allgemeinen der Fall ist). Man entnimmt dann der Formel (28.) unmittelbar die folgenden Sätze:

1. Im Falle eines „einfach zusammenhängenden, einfach berandeten" Gebietes, für welches $K_i = 1$ ist, sind mindestens zwei singuläre Stellen vom Typus I oder III vorhanden.

Dabei ist bemerkenswert, dass für diese Minimalzahl der singulären Stellen der leicht darzustellende Gesammtverlauf des Curvensystems im Sinne der Analysis situs vollständig festgelegt ist mit der Unterscheidung der folgenden drei Fälle: Im Gebiete liegen

a) 2 singuläre Stellen vom Typus I

b) 1 singuläre Stelle vom Typus I und 1 vom Typus III

c) 2 singuläre Stellen vom Typus III. —

Die Discussion des Gesammtverlaufes des durch die Differentialgleichung (11.) definirten Curvensystems, welches das Gebiet $(b - c^2)\,x^2 + 2\,a\,y < o$ doppelt überdeckt, ist nicht ohne Interesse und kann, soferne es sich dabei um den „elliptischen" Teil der Ebene handelt (wie in Fig. I.) als

Beispiel für den Verlauf von speciellen Curvensystemen in einem Gebiete $K_i = 1$ dienen.

2. Im Falle $K_i = -n$[1]) sind in dem Gebiete mindestens $2n$ Stellen vom Typus II vorhanden; die Art der Verteilung dieser Stellen auf die verschiedenen Ränder des Gebietes liefert dabei die kanonischen Formen für den Gesammtverlauf des Systems.

Speciell hat man: Nur für die Characteristik $K_i = o$ eines Teilgebietes kann es eintreten, dass das überdeckende Curvensystem keinerlei singuläre Stellen besitzt.

§ 5.

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Haupttangentencurven einer Fläche $z = f(x, y)$.

Eine nicht uninteressante Anwendung unserer Untersuchungen lässt sich für die Theorie der Haupttangentencurven einer Fläche

$$(30.)\qquad z = f(x, y)$$

machen. Hier hat man es für die Projection der Haupttangentencurven auf die (x, y)-Ebene mit einer Differentialgleichung zweiten Grades:

$$(31.)\qquad F(x, y, y') = f_{22}\, y'^2 + 2 f_{12}\, y' + f_{11} = o$$

zu tuen, in welcher die f_{ik} die zweiten partiellen Ableitungen von f nach x, y bezeichnen: Die Discriminantencurve ist hier einfach die parabolische Curve:

$$(32.)\qquad f_{12}^2 - f_{11} f_{22} = o$$

der Fläche Auf ihr liegen im Allgemeinen stets wesentlich

1) Für aus einem Stück bestehende, in die Ebene ausbreitbare Gebiete ist die Zahl K_i stets ≤ 1; die Zahl der Randcurven des Gebietes ist dabei gleich $2 - K_i$.

singuläre Stellen der Haupttangentencurven, die Punkte, für welche ausser der Gleichung (31.) $F=o$, noch (Formel 7) die anderen:

$$(33.)\qquad \begin{aligned} f_{22}\,y' + f_{12} &= o \\ f_{222}\,y'^3 + 3f_{122}\,y'^2 + 3f_{112}\,y' + f_{111} &= o \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Es ergibt sich nun, dass in der Tat die Differentialgleichung (31.) allgemein genug ist, um für eine Fläche $z=f(x,y)$ singuläre Punkte der Haupttangentencurven von allen **drei Typen** auftreten zu lassen, ohne dass darum an der betreffenden Stelle in der Entwickelung der Function $z-f(x\,y)$ die Glieder **erster** Ordnung verschwinden, d. h. ohne dass die Fläche an einer solchen Stelle aufhört eine ganz bestimmte Tangentialebene zu besitzen.

Es sei der Coordinatenanfangspunkt eine solche singuläre Stelle. Entwickeln wir dort die Function $z=f(x,y)$:

$$\begin{aligned} z = \;& f_1\,x + f_2\,y + \\ & + \tfrac{1}{2}\left\{ f_{11}\,x^2 + 2f_{12}\,xy + \underline{f_{22}\,y^2} \right\} \\ & + \tfrac{1}{6}\left\{ f_{111}\,x^3 + \underline{3f_{112}\,x^2y} + 3f_{122}\,xy^2 + f_{222}\,y^3 \right\} \\ & + \tfrac{1}{24}\left\{ \underline{f_{1111}\,x^4} + \ldots \right. \end{aligned}$$

und setzen nun weiter

$$x = 0,\quad y = 0,\quad y' = [illegible]$$

als ein Lösungssystem der drei Gleichungen [illegible] voraus, so wird im Nullpunkt

$$f_{11} = 0,\quad f_{12} = 0,\quad f_{111} = [illegible]$$

Wenn wir jetzt die Differentialgleichung [illegible] und [illegible]

greifen, so erhalten wir vier Glieder, welche aus den drei in der obigen Entwickelung unterstrichenen Gliedern hervorgehen. In der auf pag. 34 angewendeten kürzeren Bezeichnung gelangen wir so zu der Differentialgleichung:

(31a.) $y'^2 + 4axy' + bx^2 + 2ay = o$,

welche den Verlauf der Haupttangentencurven in der Umgebung des Nullpunktes characterisirt.

Nach den Formeln (11.), (16.), (17.) und (18.) des § 2 ist dann im Punkte $x = o$, $y = o$ eine wesentlich singuläre Stelle vom

Typus I für $25a^2 - 4b < o$

Typus II für $25a^2 - 4b > o$ und $6a^2 - b > o$

Typus III für $25a^2 - 4b > o$ und $6a^2 - b < o$

(w. z. b. w.).

Wesentlich anders beschaffen, um dies noch kurz zu erwähnen, sind bekanntlich die gestaltlichen Verhältnisse der Krümmungslinien einer allgemeinen Fläche, überhaupt irgend welcher, durch eine Differentialgleichung zweiten Grades definirter Orthogonalsysteme. Hier existirt keine reell verlaufende Discriminantencurve, vielmehr reducirt sich dieselbe auf einzelne (in allen Fällen $K \gtrless o$ stets vorhandene) isolirte, mehrfach zählende Punkte. Diese erweisen sich demnach für das Curvensystem als singuläre Stellen von (in unserem Sinne) höherer Art.

§ 6.

Singuläre Stellen eines Curvensystems, welches durch eine „allgemeine" Gleichung $\Phi(x, y, c) = o$ mit einem Parameter c definirt ist.

Um den Unterschied genau zu kennzeichnen, welcher für die Definition eines Curvensystems, ausgehend von der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad F(x, y, y') = o$$

oder von einer Curvengleichung

$$(34.)\qquad \Phi(x, y, c) = o$$

mit einem willkürlichen Parameter, sich ergibt, seien jetz noch kurz die „im Allgemeinen“ eintretenden singulären Stellen eines durch (34.) definirten Systems zusammengestellt. Dabei machen wir für die Function Φ von x, y, c nunmehr dieselben Voraussetzungen, die wir bisher für die Function F von x, y, y' festgehalten haben.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = o$$

gibt wieder die „Discriminantencurve“. Deuten wir für $c = z$ wieder $\Phi(x, y, z) = o$ als Fläche über der (x, y)-Ebene, so sind jetzt einfach die Horizontalschnitte derselben die Curven des Systems. Diese Horizontalschnitte durchschneiden im Allgemeinen die „Umrisscurve“ $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = o$ auf der Fläche; in der Projection **berühren** sie die Projection der Umrisscurve, die Discriminantencurve.

Die auf der Discriminantencurve auftretenden singulären Stellen sind: Erstens diejenigen, welche durch das (den Gleichungen (7.) analoge) System:

$$(35.)\qquad \Phi = o, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = o \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} = o$$

gegeben sind — für welche auf der Fläche $\Phi = o$ ein Horizontalschnitt die Umrisscurve berührt; zweitens diejenigen Stellen, für welche (den Gleichungen (10.) analog) die Beziehungen:

$$(36.)\qquad \Phi = o \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = o \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2} = o$$

statthaben, es sind die Spitzen der Discriminantencurve.

In der Projection auf die (x, y)-Ebene ist für die durch (35.) gegebenen Punkte die Berührung von Systemcurve und Discriminantencurve vierpunktig. — In der Umgebung der durch (36.) bezeichneten Spitzen der Discriminantencurve verhält sich das Curvensystem (wie Fig. V der Tafel IV darstellt) völlig allgemein; in jedem Punkt der Discriminantencurve, und so auch in der Spitze, berührt eine Curve des Systems, in der Spitze in Richtung der Spitzentangente.

Weiter aber bilden ausser diesen auf der Discriminantencurve gelegenen singulären Stellen noch die Punkte, für welche gleichzeitig

$$(37.) \qquad \Phi = o, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = o$$

statthat, singuläre Punkte unseres Curvensystems[1]). Es sind die Doppelpunkte der Systemcurven, die sich in isolirte und in Doppelpunkte mit 2 reellen Aesten trennen.

Stellt man nun die den Formeln (28.) und (29.) analogen Beziehungen zwischen den singulären Stellen eines solchen Systems und den zugehörigen Characteristiken K und K_i derselben auf, so ist folgendes zu beachten:

Betrachten wir wieder die von den Curven des Systems einfach überdeckten Teilgebiete, welche sich über der Ebene (x, y) (beziehungsweise auf der Fläche $\Phi = o$) durch die Discriminantencurve von einander trennen, so besitzt ein solches Gebiet einmal singuläre Stellen auf dem Rande.

1) Das gleichzeitige Bestehen der analogen Gleichungen

$$F = o, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = o$$

für die Differentialgleichung (1) bezeichnet gewisse Wendepunkte des zugehörigen Curvensystems, also keine singulären Stellen in dem hier zu Grunde gelegten Sinne.

Durch einen beliebigen Punkt des Randes läuft eine Systemcurve; die durch die Gleichungen (35.) definirten singulären Stellen sind als Punkte $\overset{r}{\Pi}_2$ und $\overset{r}{\Pi}_0$ zu bezeichnen, indem nämlich an den Berührungsstellen einer Horizontalcurve mit der Umrisscurve in dem einen der beiden, durch die Umrisscurve getrennten Flächenteile zwei Curvenzweige verlaufen, in dem anderen keiner. — Die durch die Gleichungen (36.) definirten Punkte des Randes verhalten sich wie gewöhnliche Punkte des Randes, wie wir erkennen, wenn wir an Fig. V (Tafel IV) die Zerschneidung längs der Umrisscurve vornehmen, welche in Fig. 5 auf pag. 46 für den analogen Fall angedeutet ist. Es ist dann unmittelbar ersichtlich, dass vom singulären Punkte aus je eine Curve des Systems in die beiden dort getrennten Gebietsteile verläuft.

Im Innern der Gebiete sind dann weitere singuläre Punkte $\overset{i}{\Pi}_0$ und $\overset{i}{\Pi}_4$ vorhanden (wenn wir an der Bezeichnung des Index nach der Anzahl der von einem Punkt auslaufenden Aeste festhalten).

Für die Characteristik K_i eines Flächenteiles ergibt sich sonach (aus der Annalen 32 pag. 501 gegebenen Formel) die folgende Beziehung zu den durch die Gleichungen (35.) und (37.) gegebenen singulären Stellen:

$$(38.)\qquad K_i = \tfrac{1}{2}(\overset{r}{\pi}_0 - \overset{r}{\pi}_2) + (\overset{i}{\pi}_0 - \overset{i}{\pi}_4),$$

in welcher die $\overset{r}{\pi}_\nu, \overset{i}{\pi}_\nu$ die Anzahlen der betreffenden singulären Stellen bezeichnen.

Dehnt man die Formel über die ganze Fläche aus, so fallen hier auch noch die Stellen (35.) des Randes einfach heraus, weil stets eine Stelle $\overset{r}{\Pi}_0$ mit einer anderen $\overset{r}{\Pi}_2$ correspondirt und man erhält die bekannte Formel:

$$(39.)\qquad K = \sigma_0 - \overset{i}{\sigma}_4 \quad .$$

Das Resultat des Vergleiches der für die eine und andere Definition eines Curvensystems „im Allgemeinen" eintretenden **singulären Stellen** lässt sich der Hauptsache nach folgendermassen zusammenfassen:

Sehen wir ab von dem verschiedenen (aber stets „algebraischen") Verhalten der Systeme längs der Discriminantencurve, die im einen Fall als Ort von Spitzen, im andern Fall als Ort der Berührungspunkte der Systemcurven erscheint; sehen wir ebenso ab von dem ebenfalls „algebraischen" Character der Systemcurven in den Spitzen der Discriminantencurve, so kommt der **wichtigste** Unterschied der beiden Definitionen dadurch zum Ausdruck, dass die weiteren, im „Allgemeinen" auftretenden singulären Stellen eines Curvensystems **wesentlich singulär** (transcendenter Natur) sind, wenn wir ausgehen von der Definition durch eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, y') = o$$

dagegen **ausserwesentlich singulär** (algebraischer Natur), soferne eine Gleichung

$$\Phi(x, y, c) = o$$

mit einem Parameter zu Grunde gelegt wird, vorausgesetzt, dass den Funktionen F und Φ die Eingangs bezeichnete Eigenschaft, „algebraischer" Natur zu sein, beigelegt wird.

———

Sitzung vom 7. Februar 1891.

1. Herr LEONHARD SOHNCKE legt eine Abhandlung des Herrn Dr. C. LUDWIG WEBER, Direktor der hiesigen elektrotechnischen Versuchsstation „zur Messung der magnetischen Inklination" vor.

2. Herr AUREL VOSS hält einen Vortrag „über spezielle Differentialinvarianten in der Flächentheorie". Derselbe soll anderweit veröffentlicht werden.

Zur Messung der magnetischen Inklination.

Von C. L. Weber.

(Eingelaufen 7. Februar.)

Unter den Elementen des Erdmagnetismus ist ohne Zweifel die Inklination dasjenige, dessen genaue Bestimmung noch die grössten Schwierigkeiten darbietet.

Obwohl die bestehenden Methoden im Laufe der Jahre wesentliche Verbesserungen erfahren haben, so genügen sie doch nicht allen Anforderungen und die Frage, welche von den bekannten Methoden die beste sei, ist keineswegs abgeschlossen. Bei diesem Stand der Dinge muss auch das Bestreben, neue Wege zu diesem Ziele aufzusuchen, gerechtfertigt erscheinen; und selbst, wenn hiebei kein Fortschritt sich ergeben sollte, so wäre doch eine kritische Discussion derjenigen Verfahren, die überhaupt möglich sind, eine wichtige Aufgabe; insoferne nämlich, als dadurch der Ueberblick über das ganze Problem erleichtert wird.

Von diesem Gedanken geleitet, habe ich vor 2 Jahren 3 neue Methoden beschrieben, die sich auf die Anwendnng eines bisher zu diesem Zweck noch nicht benützten Princips gründen[1]). Dieses Princip scheint eine sehr grosse Zahl von Abänderungen zuzulassen. so dass sich im Anschluss an die 3 erwähnten noch eine ganze Reihe von mehr oder weniger ähnlichen Verfahren auffinden liess[2]), von denen jedes als eine selbständige Methode betrachtet werden kann.

Obwohl nun eine vollständige und erschöpfende Discussion aller sich bietenden Möglichkeiten für die Beleuchtung des vorliegenden Problems von Werth wäre, so soll doch im Folgenden blos eine dieser Methoden besprochen werden, die, wie mir scheint, vor vielen anderen gewisse Vortheile bietet. Einige Resultate, welche mit derselben erlangt worden sind, dürften diese Meinung bestätigen.

Grundgedanke.

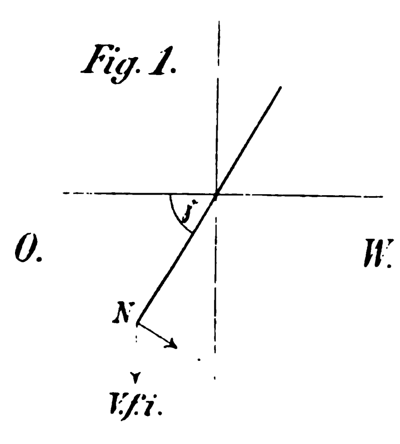
Dem neuen Verfahren liegt folgende Ueberlegung zu Grunde. Es sei gegeben ein Stromkreis, der um einen horizontalen Durchmesser als Axe (Schneide etc.) leicht beweglich ist. Es sei der Schwerpunkt so gelegen, dass die magnetische Axe des Kreises in der Ruhelage, die er ohne Strom, unter dem Einfluss der Schwere einnimmt, einen Winkel γ mit der Horizontalen macht, der etwas grösser ist als die Inklination.

Liegt die Schwingungsebene senkrecht zum magnetischen Meridian, und durchläuft ein Strom den Kreis in solcher Richtung, dass an dem nach unten zeigenden Ende der magnetischen Axe ein Nordpol entsteht, so tritt ein Drehmoment auf von der Grösse:

$$V \cdot f \cdot i \cos \gamma$$

1) C. L. Weber. Wied. Ann. 35. p. 810. 1888.

2) Siehe auch: Tageblatt der 61. Naturforscher-Versammlung zu Köln. 1888. p. 14.

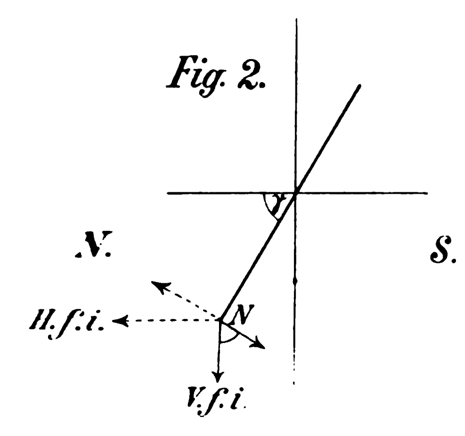


wo V die Vertical-Intensität, f die Windungsfläche. i die Stromstärke, γ den erwähnten Winkel bezeichnet.

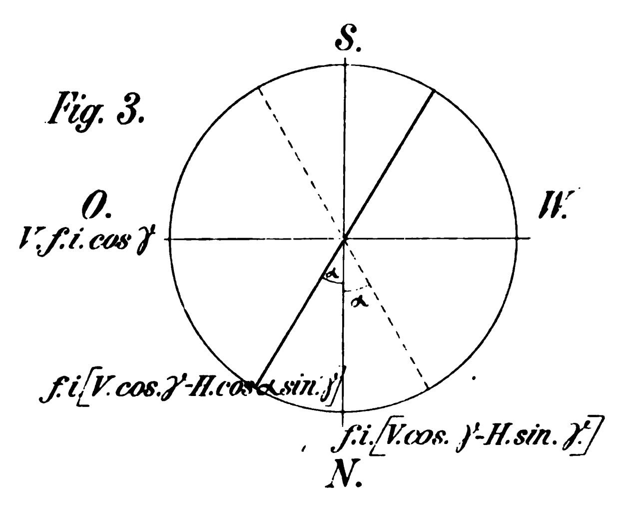
Liegt derselbe bewegliche Stromkreis mit seiner Schwingungsebene im Meridian, so tritt zu diesem Drehmoment noch ein zweites hinzu, herrührend von der Horizontalcomponente H und von der Grösse:

$$\pm H \cdot f \cdot i \cdot \sin \gamma$$

Wenn das zum Nordpol gewordene Ende der magnetischen Axe gegen Norden geneigt ist, so subtrahiren sich beide Momente.



Dreht man jetzt die gedachte Vorrichtung um eine verticale Axe, so dass die Schwingungsebene allmählig von der Nord-Süd- nach der Ost-West-Richtung übergeht, so bleibt in allen Zwischenlagen das von der Vertical-Componente herrührende Drehmoment in ungeänderter Grösse erhalten; das von der Horizontalcomponente herrührende dagegen hat in einer Zwischenlage, die um den $\sphericalangle\, \alpha$ von der Nord-Süd-Richtung abweicht, nur noch die Grösse: $H f i \sin \gamma \cdot \cos \alpha$.



Das gesammte Moment ist also in dieser Lage

$$R = V f i \cos\gamma - H f i \sin\gamma \quad \cos\alpha$$

Ist γ so gewählt, dass $V f i \cos\gamma < H f i \sin\gamma$; ist also γ grösser als die Inklination, so ist es offenbar möglich, einen $\sphericalangle\ \alpha$ zu finden, so dass

$$R = o \quad \text{wird.}$$

In dieser Lage wird also beim Durchlaufen des Stromes durch den Kreis kein Drehmoment auftreten; der im stromlosen Zustand in einer bestimmten Ruhelage befindliche Kreis wird beim Schliessen des Stromes keinen Ausschlag geben. Man hat:

$$V \cdot f i \cdot \cos\gamma = H \cdot f i \cdot \sin\gamma \cos\alpha \quad \text{also:}$$

$$\frac{V}{H} = tg\,\gamma \cdot \cos\alpha = tg\,I.$$

Man findet also die Inklination I, wenn es möglich ist, die Winkel γ und α zu messen.

Man erkennt sofort, dass dieser Weg gewisse Vortheile bietet: Stromstärke und Windungsfläche braucht man nicht

zu kennen; erstere braucht nicht constant zu sein, denn man hat eine reine Nullmethode: den Winkel γ wird man vor der eigentlichen Beobachtung ein für alle mal ermitteln und nur seine jedesmalige Veränderung beobachten; die Genauigkeit lässt sich sehr hoch steigern; denn wenn γ so gewählt ist, dass α klein wird, so entspricht einer verhältnissmässig grossen Zunahme von α eine kleine von $\cos\alpha$. Man braucht also α nur mit mässiger Genauigkeit zu kennen, um I mit vielmal grösserer Genauigkeit zu bestimmen. Im übrigen hängt die Genauigkeit des Endresultates ab von der Sicherheit, mit der $\sphericalangle\gamma$ gemessen werden kann. Schliesslich wird man unabhängig von der Kenntniss des magnetischen Meridians, da man die dem $\sphericalangle\alpha$ entsprechende Azimuthalebene auf beiden Seiten des Meridians aufsuchen und den $\sphericalangle\alpha$ durch Halbiren der Ablesungsdifferenz am Horizontalkreis finden kann.

Ausführung.

Anforderungen. Ein zur Ausführung des gegebenen Grundgedankens geeigneter Stromkreis muss bei möglichst grosser Windungsfläche ein geringes Gewicht besitzen. Um die horizontale Axe soll er mit der nöthigen Empfindlichkeit drehbar sein, welche Drehbewegung durch die Zuführung des Stromes zu dem beweglichen Kreis nicht beeinträchtigt werden darf. Der ganze Apparat muss um eine verticale Axe so gedreht werden können, dass man die Grösse der Drehungen an einem horizontalen Theilkreis ablesen kann. Endlich müssen Vorrichtungen angebracht sein, um die Grösse des $\sphericalangle\gamma$; d. h. die Neigung der magnetischen Axe des Kreises genau messen und die etwaigen Veränderungen derselben verfolgen zu können.

Instrument. Das von mir zur Erprobung des Verfahrens benützte Instrument darf blos als improvisirtes Werk-

zeug betrachtet werden. Es wurde aus dem früher[1]) beschriebenen Apparat hergestellt durch Entfernung des Wagebalkens und Zufügung eines Horizontalkreises. Mit der verticalen Tragsäule wurden Fernrohr und Scala fest verbunden.

Es besteht demnach aus folgenden Theilen. Ein Dreifuss mit Stellschrauben trägt eine in konischem Zapfenlager drehbare verticale Säule. Mit derselben dreht sich ein Theilkreis, dessen Nonien am Dreifusse befestigt sind. Auf dem oberen Ende der Säule befinden sich isolirt zwei Iridiumplatten als Lager für die Schneiden des Stromkreises. Dieser hat circa 10 cm Radius und circa 500 Windungen. Mit Hilfe einiger radial angeordneter Streben ist er an einem nahe quadratischen Messingrahmen befestigt, der auf seiner inneren oberen Seite die Schneide trägt; letztere ist aus Iridium gefertigt, vom Rahmen isolirt und um den Strom zu- und abzuführen, in 2 Theile getrennt, die durch dünne Drähte mit den Windungen in Verbindung stehen. Die Stromzuführung geschieht also mit Hilfe der Lagerplatten durch die Schneide, was sich über Erwarten gut bewährt.

Zum Beobachten und Justiren sind am Stromkreis 2 Spiegel angebracht. Der eine (I) ist nahe den Schneiden befestigt und steht in der Ruhelage nahezu vertical; er dient zur Beobachtung der Schwingungen; der zweite ist mit den Windungen (resp. dem Rahmen derselben) fest verbunden: seine Ebene wird parallel der Windungsebene justirt. Beide können mit 3 Schrauben und Spiralfedern beliebig justirt werden.

Das Fernrohr ist mit Hilfe eines ausladenden, versteiften Armes an der verticalen Säule befestigt und trägt eine kurze Scala in circa 0.25 m Abstand vom Spiegel I.

Zu dieser Einrichtung kommt noch eine Arretirungsvorrichtung hinzu und endlich ein Schutzkasten gegen Luftströmungen (bei meinen Versuchen aus Pappe).

1) L. c.

Justirung. Nachdem in bekannter Weise die verticale Drehaxe genau vertical, die Lager der Schneiden genau horizontal gestellt sind, ist die wichtigste Justirung diejenige, welche es ermöglicht, den $\sphericalangle \gamma$ zu bestimmen; d. h. den Winkel, den die magnetische Axe des Stromkreises in der Ruhelage mit der Horizontalen macht. Diese Arbeit wird in 3 Theile zerlegt. Man justirt 1) Spiegel II so, dass seine Ebene parallel ist der mittleren Windungsebene des Stromkreises. 2) Man misst den Winkel zwischen den Ebenen der beiden Spiegel I und II. 3) Man bestimmt diejenige Ablesung, die sich am Fernrohr und Scala im Spiegel I ergiebt, wenn die Spiegelnormale I genau horizontal liegt. Offenbar ist dann für jede beliebige Ruhelage der $\sphericalangle \gamma$ aus der Scalenablesung zu ermitteln, wenn der Scalenwerth bekannt ist.

Ein Weg, um diese Justirungen zu erreichen, ist folgender. Man setzt den Stromkeis auf ein passendes Gestell, am besten auf ein Goniometer und macht nun beide Spiegelebenen parallel zur Schneide. Man kann hiebei genau so verfahren, wie bei der Justirung eines Prismas auf einem Goniometer zum Zwecke der Messung des brechenden Winkels. Die spiegelnden Prismenflächen der Schneiden können dabei benützt werden, um die Schneide parallel der Drehaxe des Goniometers zu stellen.

Um nun den Spiegel II zur mittleren Windungsebene parallel zu stellen, benützt man den mit seiner Ebene vertical aufgestellten Stromkreis als Multiplicator, hängt einen Magnet mit collimirtem Spiegel in seine Mitte und dreht die Windungsebene genau in die Ost-Westlage, was daran erkannt wird, dass ein Strom, der sie durchfliesst, den erwähnten Magnet nicht ablenkt. Es liegt dann auch die Ebene des Magnetspiegels in Ost-West und man hat nur den Spiegel II zum Magnetspiegel parallel zu stellen. Letzteres ist mit Fernrohr und Scala, eventuell Senkelfaden

leicht genau zu machen, besonders wenn beide Spiegel nahe neben- oder übereinander sind, und es gibt dann die Normale zu Spiegel II genau die Richtung der magnetischen Axe des Stromkreises an; seine Ebene ist parallel der mittleren Windungsebene.

Ad 2) hat man nun den Winkel zwischen Spiegel I und II zu messen. Dies geschieht genau so, wie man den brechenden Winkel eines Prismas auf dem Goniometer bestimmt; die dazu nöthige Aufstellung ist nach Obigem schon geschehen.

Ad 3). Setzt man den Stromkreis wieder auf seine Unterlage und neigt ihn durch passende Belastung so lange, bis man in einem horizontal gestellten Fernrohr (Nivellirinstrument, Kathetometer oder Beobachtungsfernrohr selbst) das vom Spiegel I reflectirte Fadenkreuz mit dem Fadenkreuz selbst zur Deckung gebracht hat; oder bis das Spiegelbild einer mit dem Nivellirfernrohr in gleicher Höhe befindlichen Marke am Fadenkreuz erscheint. Alsdann liest man am Ablesefernrohr den einstehenden Theilstrich der Scala ab. In dieser Lage gibt dann der sub 2) gemessene Winkel direkt die Neigung (γ) der magnetischen Axe des Stromkreises an. Für eine andere Ruhelage ergibt sich der jeweilige Winkel γ aus der betreffenden Scalenablesung mit Hilfe des Abstands von Spiegel und Scala.

Es ist leicht möglich, das Instrument so einzurichten, dass alle diese Justirungen an ihm selbst ausgeführt werden können; da es ja den Hauptbestandtheil eines Goniometers: horizontalen Theilkreis und Beobachtungsfernrohr bereits besitzt.

Es ist wichtig zu wissen, dass diese Justirung, beziehungsweise [illegible] derselben, auch auf andere Art [illegible] werden können. Um z. B. die beiden Spiegel[illegible] parallel der Normale zu stellen, kann man einen [illegible] Hilfsspiegel und ein [illegible] benützen. Man

richtet den dritten Spiegel so, dass seine Normale zur Schneide parallel, also seine Ebene parallel der Schwingungsebene ist, was daran erkannt wird, dass bei schwingendem Stromkreis das Spiegelbild einer festen Marke sich nicht bewegt. Alsdann richtet man irgend eine Visirlinie (2 Senkelfäden), so dass sie senkrecht zur Spiegelebene steht und dreht nun das Instrument um genau 90° um die verticale Axe. Sind die beiden Spiegel I und II zur Schneide parallel, so muss jetzt die vorher gerichtete Visirlinie auch auf diesen Spiegeln senkrecht stehen; ist es nicht der Fall, so kann man die Spiegel justiren.

Um den Spiegel II zur mittleren Windungsebene parallel zu stellen, kann man auch des Magnets entrathen. Man hängt den Stromkreis an einem Metallfaden auf, der den Strom zuführt, während ein als Dämpfer in eine Flüssigkeit tauchender Draht die zweite Leitung bildet; geht ein Strom hindurch, so stellt sich die Axe in den Meridian, und nachdem man die Torsion aufgehoben hat, kann man durch Umhängen des Kreises den Spiegel II gerade so collimiren wie bei einem Magnet; womit die Forderung sub 1) erfüllt wird [1]).

Verfahren beim Beobachten. Nachdem Alles, wie beschrieben, justirt und für eine bestimmte Ruhelage, die durch die Scalenablesung am Beobachtungsfernrohr definirt ist, der entsprechende Neigungswinkel γ ermittelt worden, kann man mit dem Beobachten beginnen.

Der Strom wurde mir von einer Batterie ganz kleiner Grove-Elemente geliefert (30 an der Zahl). Eine Quecksilberwippe war in den Stromkreis geschaltet, um beliebig öffnen und schliessen, eventuell die Schwingungen dämpfen zu können.

---

1) Ueber einige Auswege, welche die direkte Messung des $\sphericalangle \gamma$ ganz umgehen, siehe am Schluss.

Man stellt nun zunächst die Schwingungsebene des Instrumentes ungefähr in den Meridian und probirt, ob beim Stromschluss in einer bestimmten Richtung der bewegliche Kreis nach grösseren oder nach kleineren Scalentheilen ausschlägt. Hierauf dreht man die Schwingungsebene um ein grosses Stück — etwa 20° — nach einer Seite z. B. nach Ost, bis der Ausschlag nach der entgegengesetzten Richtung erfolgt; darauf wird nach Massgabe der erfolgten Ablenkung zurückgedreht und so fort, bis man das Azimuth, dem der Ausschlag 0 zugehört, in ein Intervall von 10 bis 5 Minuten eingeschlossen hat; die zuletzt beobachtete Ruhelage wird ebenfalls notirt.

Nun erfolgt ein zweiter Satz von Probeeinstellungen auf der anderen Seite, also westlich; darauf wird die Nullstellung östlich wiederholt und so weiter, wobei man in der Regel eine allmählige Verschiebung in der Ruhelage, also eine Veränderung des Winkels γ bemerkt, weshalb auch die einzelnen, auf derselben Seite abgelesenen Azimuthe nicht die gleichen sind. Das Auffinden der einzelnen Azimuthe erfolgt, nachdem die beiden ersten festgelegt sind, in der Regel mit 3 bis 5 Einstellungen; um die Empfindlichkeit zu vergrössern, kann man die Stromimpulse multipliciren, andrerseits dämpfen.

Die weitere Behandlung der Ablesungen erläutert sich am besten an der Hand eines Beispieles. Man hatte durch die vorausgegangene Justirung ermittelt, dass für eine bestimmte Ruhelage, bei welcher die Ablesung am Beobachtungsfernrohr den Scalentheil: 82,7 ergab, der Winkel γ die Grösse hatte: 66° 36′ 24″.

In der Zeit von $3^h 25$ bis $4^h 6'$ am 23./7. 90 wurden die dem Ausschlag Null entsprechenden Azimuthe abwechselnd in Ost und West nebst den zugehörigen Ruhelagen in folgender Weise beobachtet:

Azimuth:	177° 45′	151° 45′	177° 30′	152° 15′
Ruhelage:	82,4	82,05	81,65	81,6
	177° 15′	152° 15′	176° 55′	
	81,5	81,45	81,2.	

Um nun für 2 Azimuthe Ost und West denselben Winkel γ zu haben, interpolirt man linear zwischen den Einstellungen auf derselben Seite z. B. Ost ein Azimuth, welches dem in der Zwischenzeit westlich beobachteten γ entspricht etc.

Man erhält so durch Interpolation zwischen 1 und 3 einen Werth 2′; aus 2 und 4 einen Werth 3′ etc., die dann mit den direkten Ablesungen 2 und 3 etc. combinirt werden. Aus obigen Zahlen z. B. erhält man die ersten 3 Columnen der folgenden Tabelle:

Nr.	Ruhelage Scalentheile	Azimuthe		α	γ	I[1])
		Ost	West			
2 ; 2′	82,05	177° 38′	151° 45′	12° 56′,5	66° 33′ 40″	66° 1′ 7″
3 ; 3′	81,65	177° 30′	152° 13′	12° 38′,5	31′ 55″	0′ 51″
4 ; 4′	81,6	177° 25′	152° 15′	12° 35′,0	31′ 42″	0′ 53″
5 ; 5′	81,5	177° 15′	152° 15′	12° 30′,0	31′ 17″	0′ 53″
6 ; 6′	81,45	177° 12′	152° 15′	12° 28′,5	31′ 4″	0′ 47″

Aus je 2 Azimuthen ergibt sich nun ein Winkel α; berechnet man ferner mit Hilfe der Angabe, dass die Scalenablesung 82,7 einem Werthe $\gamma = 66^\circ\, 36'\, 24''$ entspricht und dem Scalenabstand (402,8 Scalentheile) den zu jeder einzelnen Ruhelage gehörigen Werth von γ, so erhält man die beiden folgenden Spalten obiger Tabelle.

Je ein Werth von α und γ ergeben dann eine Zahl für die Inklination; aus den 7 mitgetheilten Einstellungen also 5 Werthe der Inklination, deren Grösse in der letzten Spalte erscheint.

---

1) Es muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass die absoluten Beträge von I durch Eisengehalt des improvisirten Apparates und andere Localeinflüsse gefälscht sind.

Resultate.

Zur weiteren Kennzeichnung des Verfahrens sollen noch einige Beobachtungsreihen mitgetheilt werden, wobei nochmals betont sei, dass die absoluten Werthe durch Localeinflüsse fehlerhaft sind.

Datum: 14. VII. $2^h 45' - 4^h 0'$			Datum: 16. VII. $9^h 25' - 10^h 18'$		
a	γ	I	a	γ	I
16° 16',5	66° 35' 33"	65° 43' 36"	16° 20'	66° 35' 33"	65° 48' 16"
16° 13',5	66° 35' 8"	43' 29"	16° 8'	34' 42"	43' 37"
16° 5'	66° 34' 17"	43' 32"	15° 47'	32' 35"	43' 42"
16° 56',5	66° 33' 26"	43' 36"	15° 44'	31' 44"	43' 11"
15° 54'	66° 33' 1"	43' 27"	15° 24'	29' 37"	43' 2"
	Mittel:	65° 43' 32"	15° 16'	27' 55"	42' 14"
				Mittel:	65° 43' 10"

Datum: 16. VII. $2^h 0' - 2^h 55'$			Datum: 18. VII. $10^h - 10^h 40'$		
a	γ	I	a	γ	I
15° 54'	66° 30' 28"	65° 40' 48"	15° 28',7	66° 26' 21"	65° 41' 18"
15° 37',5	28' 35"	40' 36"	15° 31',2	28' 46"	41' 28"
15° 35',7	29' 14"	41' 12"	15° 18',7	26' 39"	40' 34"
15° 32',5	28' 21"	40' 53"	15° 21',2	27' 5"	40' 44"
15° 26'	27' 30"	40' 40"	15° 18',7	26' 39"	40' 34"
15° 12'	26' 13"	40' 48"	15° 10'	25' 23"	40' 9"
	Mittel:	65° 40' 49"		Mittel:	65° 40' 48"

Diese Zahlen zeigen, dass mit dem neuen Verfahren selbst unter ungünstigen Verhältnissen Resultate erzielt werden, die concurriren können mit den besten bisher verwendeten Methoden (Scherings und Wilds geneigter Erdinductor). Ein grosser Vorzug des Verfahrens dürfte darin liegen, dass man unabhängig wird von einer besonderen Bestimmung des magnetischen Meridians und der Variationen in Deklination. Man erhält vielmehr zugleich mit der Inklinationsmessung auch eine Festlegung des Meridians. Ein weiterer Vortheil liegt darin, dass man, wie beim Nadelinklinatorium, nur ein

einziges Instrument zu justiren und zu beobachten hat; dasselbe kann so construirt werden, dass man auch zu den einzelnen Justirungen keinen weiteren Hilfsapparat benöthigt.

Man wird finden, dass die Genauigkeit des Endresultates zum grossen Theil abhängig ist von der Exaktheit, mit der die Justirung, insbesondere die Bestimmung des Winkels γ möglich ist. Aus der gegebenen Beschreibung dieser Justirmethoden dürfte aber auch hervorgehen, dass dieselben in allen ihren Theilen mit derjenigen Sicherheit durchgeführt werden können, deren die Messung von Winkeln mit Hilfe eines Theilkreises oder mit Spiegel und Scala überhaupt fähig ist.

Da nun diese Justirung vor der eigentlichen Beobachtung und unabhängig von derselben vorgenommen wird, so kann ein hohes Maass von Zeit und Sorgfalt ihr gewidmet werden, und es lässt sich so erreichen, dass sie in Bezug auf Genauigkeit übereinstimmt mit der Empfindlichkeit, die in den Schlussbeobachtungen zu Tage tritt.

Dabei ist nochmals hervor zu heben, dass die Justirungen auf verschiedene Weisen vorgenommen werden können, die zur gegenseitigen Controlle dienen; auch ist es sehr wohl möglich, noch weitere Vereinfachungen oder Verbesserungen in dieser Richtung ausfindig zu machen, wofür sich im Anhang einige Andeutungen finden.

Ich glaube daher, dass der im Vorstehenden beschriebene neue Weg zur Bestimmung der Inklination einige Beachtung verdient und dass es sich sehr wohl lohnen würde, das Verfahren mit Hilfe eines zweckmässig gebauten Apparates weiter zu studiren und auszuarbeiten, wozu mir selbst leider die Hilfsmittel und die Gelegenheit fehlen.

Schluss.

Da ich die beschriebene Methode nicht als etwas vollständig Fertiges, sondern blos als einen Vorschlag, als eine Studie betrachte, deren weitere Ausarbeitung Anderen oder wenigstens einer gelegeneren Zeit überlassen sein möge, so habe ich auch von einer ausführlicheren Diskussion derselben abgesehen und möchte nur anhangsweise einige Gesichtspunkte nach dieser Richtung hin entwickeln.

Betrachtet man in der Formel:

$$x = tg\, I = tg\, \gamma \cdot \cos \alpha$$

den Winkel γ als vollständig bestimmt, so ergibt die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\, tg\, \gamma \cdot \sin \alpha;$$

dass die Bestimmung von x mit Hilfe von α um so genauer wird, je kleiner α ist, je mehr sich also γ dem wahren Werthe der Inklination nähert, wie man auch von vorneherein einsieht.

Man könnte auf Grund dieser Verhältnisse glauben, dass es besser sei, den Winkel α überhaupt nahezu gleich Null zu machen, d. h. blos im Meridian zu beobachten und nur γ so lange zu ändern, bis es mit I übereinstimmt, d. h. die schwingende Windungsfläche so lange durch zugefügte Belastungen zu neigen, bis ihre Axe genau mit der Inklination übereinstimmt, alsdann wird auch der Ausschlag Null beobachtet.

Ich halte dies Verfahren aber nicht für vortheilhaft; denn abgesehen davon, dass dies eine besondere Meridianbestimmung voraussetzt, wird man doch über die Grösse der möglicherweise vorhandenen Abweichung vom Meridian Aufschluss suchen müssen und zu diesem Zwecke um die verticale Axe drehen.

Auch lassen sich die einzelnen Veränderungen von γ nicht mit derjenigen Schärfe bestimmen, mit der man die zugehörigen α beobachten kann.

Um dies zu übersehen betrachten wir in der Formel

$$tg\, I = tg\, \gamma \cdot \cos \alpha$$

die Inklination I als constant; dann liefert eine Differentiation die Gleichung

$$o = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \gamma}\, d\gamma - tg\, \gamma \sin \alpha\, d\alpha$$

also:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \sin \gamma \cos \gamma\, tg\, \alpha =$$

$$= \sin^2 \gamma \cdot \sin \alpha\, ctg\, I$$

und wenn man γ durch I und α ausdrückt:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \sin \alpha\, ctg\, I \cdot \frac{tg^2 \gamma}{1 + tg^2 \gamma}$$

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = (1 + ctg^2 \gamma)\, \frac{tg\, I}{\sin \alpha};$$

da $ctg^2 \gamma = \cos \alpha\, ctg\, I$, so erhält man:

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{tg\, I}{\sin \alpha}\,(1 + \cos^2 \alpha\, ctg\, I)$$

Da nun die Tangente der Inklination bei uns nahezu $= 2$ ist, so bleibt $d\alpha$ stets grösser als das zugehörige $d\gamma$ und selbst für den extremen Werth $\alpha = 90^0$ ergibt sich noch $d\alpha$ nahe $= 2 \cdot d\gamma$.

Es zeigt diese Gleichung, dass kleine Veränderungen, die im Winkel γ vorkommen und die sich etwa während der Messung der Beobachtung entziehen, sofort bemerkbar werden durch eine selbst im ungünstigsten Falle noch doppelt so grosse Aenderung in α. Man kann also durch wiederholte Einstellung auf α die unmerklichen Aenderungen in γ eliminiren.

Bringt man aber willkürlich messbare Veränderungen in γ hervor und bestimmt für die neue Neigung $(\gamma + \delta)$ den zugehörigen Einstellungswinkel α_1, so kann man diese zweite Beobachtung mit der ersten (γ, α) combiniren und es ergibt sich so eine Abänderung des Verfahrens, bei der die directe Messung des Winkel γ ganz umgangen und durch die Beobachtung seiner Veränderung δ ersetzt wird.

Man erhält nämlich aus den Gleichungen:

$$tg\, I = tg\, \gamma \cos\alpha = tg\,(\gamma + \delta)\cos\alpha_1$$
$$= \frac{tg\,\gamma + tg\,\delta}{1 - tg\,\gamma\, tg\,\delta}\cos\alpha_1$$

die weitere

$$tg^2\gamma + tg\,\gamma \cdot \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha}{tg\,\delta\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}$$

woraus

$$tg\,\gamma =$$
$$= \tfrac{1}{2}\, ctg\,\delta\left(1 - \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}\right) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\, ctg^2\delta\left(1 - \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}\right)^2 + \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}}$$

Man kann also γ aus δ, α und α_1 berechnen und aus diesem Werthe die Inklination bestimmen.

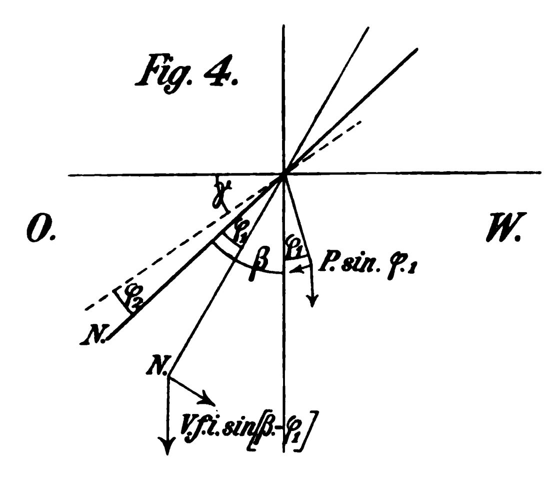
Um die directe Bestimmung des Winkels γ zu umgehen, kann man endlich einen zweiten Weg einschlagen, der sich mit derselben Anordnung des Apparates durchführen lässt, aber nicht mehr auf eine Nullmethode führt, sondern die Beobachtung von Ablenkungswinkeln nöthigt macht[1]).

Hat man nämlich östlich und westlich vom Meridian beobachtet und damit die Grösse α und die Lage des Meridians bestimmt, so kann man die Neigung γ finden, indem

1) Eine diesbezügliche Andeutung findet sich bereits in einer früheren Abhandlung: C. L. Weber: Wiedem 35. p. 816. 1888 und ein darauf gegründetes selbständiges Verfahren: Tageblatt der 61. Naturforscher-Versammlung zu Köln, 1888. p. 14. unter IV.

man in der nun bekannten Ost-West-Ebene die beim Schliessen des Stromes in 2 verschiedenen Richtungen auftretenden Ablenkungen ermittelt.

In dieser Lage (Schwingungsebene Ost-West) entstehen beim Stromschluss zwei Drehmomente: von Seite der Verticalintensität und von Seiten der Schwere. Erstere sucht die Axe vertical zu stellen und dreht so lange, bis das von der Schwere ausgeübte Moment ihr Gleichgewicht hält. Ist in der Ruhelage die Neigung der Axe des Stromkreises gegen



die Verticale $= \beta = 90 - \gamma$, während der Schwerpunkt genau vertical unter der Drehaxe liegt, so gilt für eine Ablenkung φ_1, die durch Stromschluss in einer bestimmten Richtung hervorgebracht wird, die Gleichung:

$$V \cdot f i \cdot \sin(\beta - \varphi_1) = P \cdot \sin \varphi_1;$$

schliesst man den Strom in umgekehrter Richtung, so ergibt sich ein Ausschlag φ_2 nach der entgegengesetzten Seite, so dass

$$V \cdot f i \sin(\beta + \varphi_2) = P \cdot \sin \varphi_2$$

worin P die Masse des beweglichen Theiles multiplizirt mit

dem Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehaxe. Aus beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{\sin(\beta - \varphi_1)}{\sin(\beta + \varphi_2)} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}$$

oder

$$\sin \beta \, ctg\, \varphi_1 - \cos \beta = \sin \beta \, ctg\, \varphi_2 + \cos \beta$$

oder

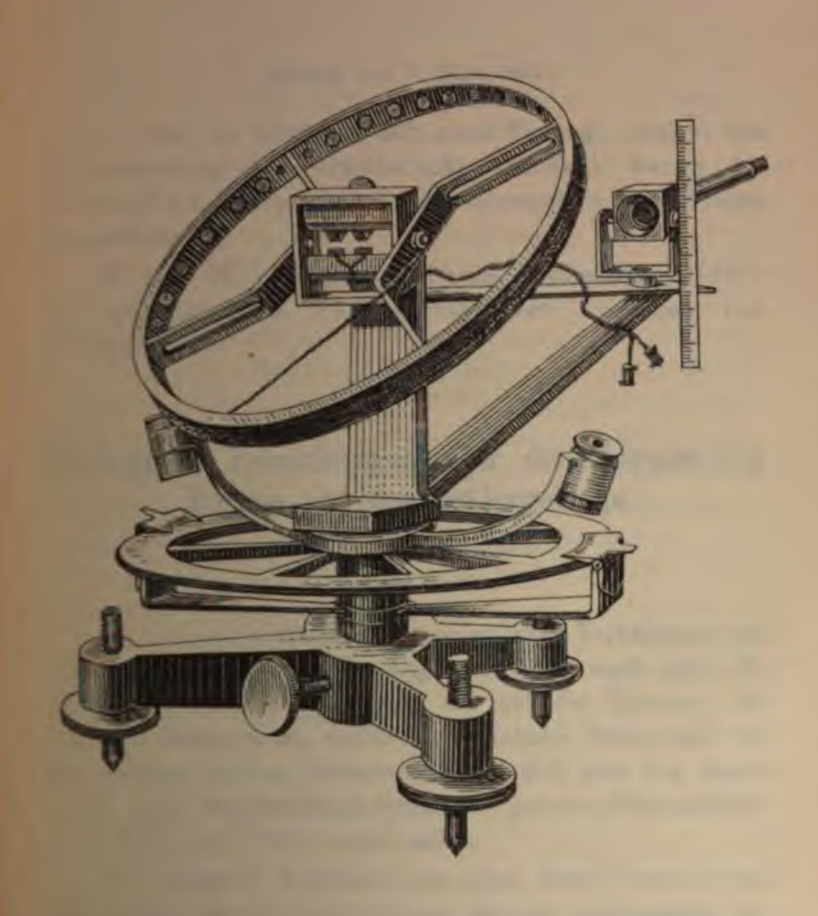
$$tg\, \beta \cdot (cotg\, \varphi_1 - cotg\, \varphi_2) = 2$$

also

$$tg\, \beta = \frac{2}{ctg\, \varphi_1 - ctg\, \varphi_2} = 2 \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} = ctg\, \gamma$$

so dass also γ aus den beiden Ablenkungen: φ_1 und φ_2 ermittelt werden kann.

Obgleich von diesen indirecten Bestimmungen von γ nicht jene Genauigkeit erwartet werden kann, wie von einer directen Ausmessung, so sind sie doch als Controllen von Werth, zumal da sie sich mit dem für die vorgeschlagene Methode adjustirten Instrument ohne Weiteres ausführen lassen.



Sitzung vom 7. März 1891.

1. Herr N. Rüdinger hält einen Vortrag: „Ueber die Umwandlung Lieberkühn'scher Drüsen durch die Follikel im Wurmfortsatz des Menschen.“ (Mit einer Doppeltafel.)

2. Herr W. v. Gümbel macht eine Mittheilung: „Ueber die geologischen Verhältnisse der Thermen von Bormio.“

Geologische Bemerkungen über die Thermen von Bormio und das Ortlergebirge.

Von C. W. v. Gümbel.

(Eingelaufen 31. März.)

In meiner Schilderung der geologischen Verhältnisse von Gastein (Sitzber. d. bayer. Akad. d. Wiss. math.-phys. Cl. 1889. Bd. XIX. S. 341) habe ich auf die Thermen von Bormio hingewiesen, welche eine ähnliche Temperatur wie die warmen Quellen Gasteins besitzen, sich aber von diesen durch ihren beträchtlichen Gehalt an gelösten Mineralstoffen in auffallender Weise unterscheiden.

Ein längerer Aufenthalt im alten Bade Bormio und im Gebiete des Ortlergebirges hat mir Gelegenheit gegeben, die geologischen Verhältnisse näher kennen zu lernen, welche in dieser Gegend herrschen und der Entstehung der so eigenartigen Quellen von Bormio zu Grunde liegen. Obwohl die vorgenommenen Untersuchungen einen

Anspruch auf Vollständigkeit nicht machen können und wollen, so haben sie doch zu einigen Ergebnissen geführt, welche für eine spätere eingehendere Erforschung dieser Gegend von Nutzen sein können und wenigstens über die Quellenverhältnisse nähere Aufschlüsse zu geben geeignet scheinen. Sie sind desshalb in dem Folgenden kurz zusammengestellt.

Die Thermen von Bormio treten am Südrande des gewaltigen Kalkstocks der Ortlergruppe da zu Tag, wo die Kalkschichten dieses Gebirgsmassivs auf einem thonig-schiefrigen, impermeablen Fundamente aufruhen und der ganze mächtige Gebirgsstock von einer tief einschneidenden Querbucht, nämlich jener der Adda, bis unter diese Unterlage durchbrochen ist. Zwar kommen die Hauptquellen jetzt nicht auf der tiefsten Thalsohle der Addaschlucht zum Vorschein, wie man folgern könnte, wenn man den Ursprungsort der Quellen mit dem Thaleinschnitt in unmittelbar genetischem Zusammenhange sich dächte, sondern sie brechen 80—100 m höher an dem Berggehänge zu Tage aus. Dies hat jedoch seinen Grund in dem Umstande, dass der grossartige Gebirgseinschnitt, der von Bormio bis auf die Passhöhe des Stilfser Jochs emporzieht, da, wo jetzt die Hauptquellen bei dem alten Bade ausfliessen, in früherer, wie sich nachweisen lässt, diluvialer Zeit, nicht bis zur jetzigen Thalsohle, sondern nur bis etwa zur Höhe des alten Bades eingetieft war, so dass die Quellen zur Zeit ihrer vermuthlich ersten Entstehung allerdings auf der damals tiefsten Einbuchtung ihren Ausfluss sich verschafft haben, den sie dann auch später und bis jetzt als den bereits gebahnten und die geringsten Widerstände bietenden Weg beibehalten haben. Dass die Quellen bereits in sehr früher Zeit auf beträchtlicher Höhe ausgeflossen sind, das deutet die mächtige, wahrscheinlich diluviale Conglomeratbildung an, deren durch eine dem jetzigen Quellenabsatz entsprechende Kalksinter-

masse verkittete Geröllbänke sich oberhalb des Bades wie eine krustenartige Decke über die Gehänge ausgebreitet zeigen.

Ausser den Hauptquellen im alten Bade treten aber auch noch Quellen an tiefer liegenden Stellen zu Tag, z. B. die Plinius-, Augen-, Ostgothen- und Nibelungenquelle und in der Addaschlucht selbst sollen sich im Winter, wenn dieselbe zugänglich ist, noch 16 kleinere Quellen beobachten lassen.

Die Quellen brechen aus stark zerklüfteten, oft Breccienartigen, dolomitischen, schwärzlichen Kalkfelsen auf Klüften oder Aushöhlungen, welche sie sich nach und nach ausgebildet haben, hervor. Die Hauptrichtung der zahllosen, sich schneidenden Klüfte ist nach St. 3 und 9 gerichtet. Am besten lässt sich der Quellenausfluss in dem gegen 40 m langen Quellenstollen beobachten, der hinter dem alten Bad schon zu einer unbekannt alten Zeit in dem anstehenden Felsen getrieben worden ist. Nicht weit vom Eingange sprudelt hier aus einer ausgehöhlten Spalte die sog. Martinsquelle mit 38° C. Wärme und liefert beiläufig 3 Sekundenliter Mineralwasser. Früher sollen in diesem Stollen noch an mehreren Stellen Ergüsse stattgefunden haben, die jetzt nicht mehr fliessen. Auch die Martinsquelle soll zuweilen grossen Schwankungen in der Ergiebigkeit unterliegen und sich sehr verschwächen, sobald zur Winterszeit die Oberfläche der ganzen Umgegend mit Eis bedeckt ist.

Etwas tiefer als diese Hauptquelle für das alte Bad liegt die Quelle des sog. römischen Bads (Frauenheil) nebst dem sog. Kleinkindersprudel mit 36,6° C. und 7,5 Sekundenliter Wasser. Ihr Austrittpunkt aus einer mit einem Gewölbe umschlossenen Felsenhöhlung hinter der Martinskirche lässt sich in diesem engen Raume des Wasserdunstes wegen nicht genauer beobachten. Beide Thermen liefern das Wasser für das neue Bad. Ganz in der Nähe derselben entspringt eine weitere Mineralquelle, Cassiodora oder äussere Ostgothenquelle, an einer schwer zugänglichen Stelle aus einer Ge-

steinsspalte und fliesst, Dampfwolken bildend, durch ein Gerinne und über die mit einer weissen und z. Th. gelben Sinterkruste überzogenen Felsen unbenützt ab. Sie soll eine Temperatur von 39° C. besitzen und 1,7 Sekundenliter Wasser liefern. Die zur Trinkkur benützte Pliniusquelle kommt etwas tiefer am Thalgehänge aus einer deutlichen Felsenspalte mit 38,3° C. (nach meinen öfteren Messungen) und 1,9 Sekundenliter Erguss zu Tag.

Eigenartig ist die sog. Augenquelle (St. Carlsquelle) wegen ihres ockerigen Absatzes; sie liefert nur lauwarmes Wasser, das wohl als eine im Geröll abzweigte und bei dem Durchfliessen durch letzteres mit Eisencarbonat angereicherte Ader der Hauptquellen anzusehen ist. Entfernter von diesen Hauptquellpunkten am Steilgehänge der Addaschlucht entspringen noch zwei grössere Thermen, die sog. innere Ostgothen- und die Nibelungenquelle. Uebrigens beobachtete ich in der ganzen Umgebung des alten Bades an sehr zahlreichen Stellen Quellen, welche einen gegen die Lufttemperatur erhöhten Wärmegrad erkennen liessen und gleichfalls als Thermen oder Abzweigungen von solchen gelten müssen. Das wird auch durch die an den Felsen der ganzen Umgegend beobachteten Vorkommen von Salzausblühungen bestätigt, welche, wie Untersuchungen gelehrt haben, fast rein aus Bittersalz mit nur geringer Beimengung von Glauber- und Kochsalz bestehen. Ueberhaupt scheint mir das ganze Erdreich an diesem Gehänge weit und breit erwärmt zu sein, wodurch die ungewöhnlich üppige Vegetation in dieser Gegend ihre Erklärung findet.

Zusammenfassende Messungen des Ergusses aller Quellen liegen nicht vor. Der Schätzung nach mag derselbe 18—20 Sekundenliter und die mittlere Temperatur 38—39° C. betragen.

Was die chemische Zusammensetzung des Mineralwassers anbelangt, so zeichnet sich dieselbe durch das Vorwalten der Sulphate neben beträchtlichen Mengen von Kalkcarbonaten

bei geringem Gehalte an Chlorverbindungen vor den Quellen von Pfäffers und Leuk, denen die Thermen von Bormio sonst am nächsten stehen, aus.

Wir besitzen eine neuere Analyse nur von der Martinsquelle, welche Dr. v. Planta-Reichenau[1]) vorgenommen hat. Demnach enthält das Wasser in 1000 Theilen:

Chlornatrium	0,0112
Schwefelsaures Natron . .	0,0604
Schwefelsaures Kali . . .	0,0181
Schwefelsaure Magnesia . .	0,2520
Schwefelsaure Kalkerde . .	0,4863
Kohlensaure Kalkerde . .	0,1735
Kohlensaures Eisenoxydul .	0,0025
Kohlensaures Manganoxydul .	0,0014
Phosphorsäure	0,00004
Kieselsäure	0,0207
	1,02614
Direkt bestimmt	0,9996

Um die Uebereinstimmung oder Abweichung in dem Gehalt der verschiedenen Quellen erkennen zu können, wurden einige derselben einer Analyse durch Herrn Ad. Schwager unterworfen und dabei in dem Wasser der Plinius- (I) und Ostgothenquelle (II) folgende Gemengtheile in 1 Ltr. gefunden:

	Plinius-quelle	Ostgothen-quelle
Kalciumsulphat	0,4423	0,4280
Magnesiumsulphat . . .	0,2400	0,2362
Natriumsulphat	0,0767	0,0795
Kaliumsulphat	0,0037	0,0007
Chlornatrium	0,0012	0,0010
Chlorkalium	0,0109	0,0109

1) Dr. A. v. Planta-Reichenau, Chem. Untersuchung der Heilquellen von Bormio. Chur 1860.

	Plinius-quelle	Ostgothen-quelle
Kalkcarbonat	0,1283	0,1429
Magnesiumcarbonat . .	0,0038	0,0019
Kieselsäure	0,0164	0,0062
Thonerde	0,0137	0,0042
Phosphors., Mangan etc.	Spuren	Spuren
Eisenoxyd	0,0005	0,0009
	0,9375	0,9124

Es ergiebt sich daraus im Vergleich zu dem Gehalte der Martinsquelle, dass ein bemerkenswerther Unterschied nicht besteht, um so weniger, wenn man die gegenwärtige Beschaffenheit der letzteren in Rechnung zieht. Nach meiner Untersuchung liefert die Martinsquelle jetzt 0,973 gr bei 110° C. getrockneten Rückstand in 1 Liter mit 0,07331 MgO und 0,4206 SO_3; die Quelle des römischen Bades unter gleichen Verhältnissen 0,8650 gr Trockenrückstand mit 0,0568 MgO und 0,5070 SO_3 neben 0,0025 Cl. Die Augenquelle endlich ergab 0,9740 gr Trockenrückstand mit einem bemerkenswerth-hohen Gehalt an Eisenoxyd, nämlich 0,0100 gr. Als Hauptbestandtheile der verschiedenen Quellen erweisen sich demnach mit grosser Uebereinstimmung Gyps, Bittersalz, Glaubersalz und Kalkcarbonat, Salze, welehe die aus Gypsstöcken kommenden Wasser gewöhnlich zu enthalten pflegen, wie z. B. jene von Leuk in der Schweiz. Auch die Quellen von Bormio entnehmen ihren Mineralgehalt unzweifelhaft einer Gypsablagerung, wie wir später ausführlicher erörtern werden. Auffallend ist dabei der geringe Gehalt an Chlornatrium, was eine Armuth oder einen Mangel an Steinsalz in dem betreffenden Gypsstock andeutet. Noch auffallender ist das fast gänzliche Fehlen von Schwefelwasserstoff sowohl in dem Quellwasser selbst, wie auch in den mit aufsteigenden Gasen. v. Planta[1]) konnte nur quantitativ unbestimmbare Spuren

1) v. Planta a. a. O. S. 15.

dieses Gases nachweisen. Um so bemerkenswerther ist das reichliche Auftreten dieses Gases in dem Schlamm, welcher bei längerem Verweilen des Mineralwassers in dem Reservoir des römischen Bades sich absetzt und für die sog. Schlammbäder benützt wird. Dieser schwärzlich gefärbte, stark nach Schwefelwasserstoff riechende Absatz enthält an Algenfäden[1]) ausgeschiedenen Schwefel und überdies eine im Vergleich zu dem geringen Gehalt des Wassers an Eisensalzen beträchtlich scheinende Menge von Schwefeleisen, welches eben die schwarze Färbung verursacht. Ausserdem finden sich darin Gyps, Kalkcarbonat und eine beträchtliche Anzahl von Organismen, welche in dem warmen Wasser vortrefflich gedeihen und wuchern. Reichlich sind besonders Fadenalgen und Diatomeen vertreten. Es ist wohl nicht zweifelhaft, dass erst durch den Einfluss der abgestorbenen organischen Stoffe und durch die Lebensthätigkeit von Spaltpilzen eine Zersetzung der Sulphate bewirkt wird, so dass dadurch Schwefel, Schwefelwasserstoff und Schwefeleisen sich erzeugten. v. Planta giebt als Hauptbestandtheile des Schlamms an: Schwefelfäden, organische Stoffe, Schwefelwasserstoff, dann Schwefeleisen, Kalk, Magnesia, Schwefelsäure und Kohlensäure. Ich habe eine selbst geschöpfte Probe dieses Schlamms in lufttrocknem Zustande untersucht und gefunden, dass derselbe durch Schwefelkohlenstoff ausziehbaren Schwefel 0,125 in 1 Gramm enthält. An Schwefeleisen finden sich in einem Gramm der Masse 0,0004, ausserdem vorherrschend Magnesiumcarbonat (24,3%) neben Kalkcarbonat (13,8%), sehr wenig Gyps ($SO_3 = 1,1\%$), Kieselsäure (0,5%) und Spuren von Arsensäure und Phosphorsäure. Im Verhältniss zu der Zusammensetzung des Sinterabsatzes ist die grosse Menge des Magnesiumcarbonats auffällig. Es scheint während des Verbleibens des

1) Vgl. Ch. G. Brügger in Jahresber. der Naturforsch. Gesell. in Zürich. N. F. VIII, 1863. S. 231.

Mineralwassers im Behälter sich eine Umsetzung von Bittersalz und Kalkcarbonat vollzogen zu haben.

Im Verhältnisse zu dem Gehalt der Quellen an Kalkcarbonat ist die Sinterbildung, namentlich da, wo das Wasser vertheilt über die Felsen abfliesst, eine sehr beträchtliche. Neugebildete derartige rosenroth und saftgrün gefärbte Absätze sind so innig mit Algen[1]) durchwebt, dass sie sich wie Lappen abheben lassen, während die älteren Sinterkrusten mehr oder weniger arm an organischen Beimengungen sind. Die röthliche Färbung wird vorzugsweise durch *Leptothrix dictyothrix*, und *Scytonema Bormiense*. die grüne hauptsächlich durch *Aphanocapsa thermalis*, *Chroococcus membraninus*, *Lyngbya conglutinata*, *Chthonoblastus Plantae*, *Phormidium Lyngbyanum* u. s. w. verursacht. Die Zusammensetzung eines solchen beim Austrocknen lederartigen neugebildeten Lappens (nach einer Analyse von Herrn A. Schwager) (I) und die einer alten Sinterkruste (II) ist folgende:

	I.	II.
Kalkcarbonat	83,44	92,80
Bittererdecarbonat	1,22	1,14
Kalksulphat	3,18	1,31
Kali	0,12	Sp.
Natron	0,12	
Thonerde	1,63	3,50
Manganhaltiges Eisenoxyd	0,72	
Kieselerde	0,92	
Organisches (und Wasser)	8,61	1,25
	99,96	100,00

Bei dem Reichthum der Quellen an gelöstem Kalksulphat ist die Ausscheidung von Gyps eine verhältnissmässig geringe; das Kalkcarbonat aber scheidet sich rasch und in

1) Vgl. Brügger in Jahresb. d Naturforsch. Ges. Graubündens, N. F. VIII, 1863. S. 2[illegible].

grosser Menge ab, weil es den Quellen an freier Kohlensäure fehlt.

Streifenweise ist der Sinterabsatz durch einen Gehalt an Eisenoxydhydrat etwas gelblich gefärbt. Vorherrschend aus Eisenocker zusammengesetzt ist der Absatz an der Augenquelle. Derselbe bildet eine braungelbe pulverige Masse, welche gewissen ockerigen Brauneisensteinen sehr ähnlich ist und nicht unbeträchtliche Mengen von Arsen enthält. Eine von Hrn. A. Schwager vorgenommene Untersuchung ergab in diesem Ocker folgende Nebenbestandtheile in Procenten:

Arsensäure	3,55
Arsenigsäure	1,18
Antimonsäure	1,27
Zinnoxydul	0,31
Blei	Spuren
Phosphorsäure	0,24
Kieselsäure	4,20
	10,75

Dazu kommt dann noch

Eisenoxydhydrat	64,00
Manganoxyd	Spuren
Kalk	13,25
Bittererde	Spur
Kohlensäure	11,00
Organisches und Wasser . .	0,85

Nachprüfungen haben in Folge dieser Entdeckung in allen Trockenrückständen in dem Schlamm sowohl wie in den gelbgefärbten Sinterkrusten das Vorhandensein von Arsen in Spuren erkennen lassen.

Dieser Arsengehalt in sehr geringer Menge verleiht dem Thermalwasser von Bormio eine erhöhte therapeutische Bedeutung und verdient besondere Beachtung. Derselbe

scheint von der Zersetzung des Arsenkieses herzurühren, welcher in dem von dem Mineralwasser durchzogenen Schichtgestein vorkommt.

Wenn wir nun weiter nach den Ursachen der Entstehung und des Gehaltes der Quellen von Bormio fragen, so können uns nur die geologischen Verhältnisse dieser Gegend Anhaltspunkte für die Beantwortung geben. Wir werden daher darauf hingewiesen, zunächst einen Blick auf den geologischen Bau der Umgebung des Bades, und da diese nur einen kleinen Theil des grossen Gebirgsstocks der Ortlergruppe ausmacht, auf jenen der letzteren selbst zu werfen.[1])

Der Graubündener Kalkzug im Allgemeinen.

Die durch die Höhe (3905 m), Massenhaftigkeit, grossartige Wildheit seiner Felswände und die beträchtliche Ausbreitung der Gletscher berühmte Gruppe des Ortlergebirges verdankt diese Eigenartigkeit, welche sie vor fast allen Hochalpenstöcken auszeichnet, wesentlich der Entwicklung der Kalkschichten, die seine Hauptmasse ausmachen. Während wir sonst in den Centralketten der Alpen nur ältere krystallinische Bildungen zu finden gewohnt sind, sehen wir den Ortler als ein jüngeres Kalkgebirge über den Urgebirgsbildungen ausgebreitet mitten im Centralstock mächtig

1) Vgl. Leonhardi, Das Veltlin, 1860; Ch. G. Brügger, Ostrhaetische Studien, 1863; Theobald, Das Bündner Münsterthal im Jahresber. d. Naturf Ges. Graubündens, N. F. VIII, 1863. S. 53; Theobald, Geol. Beschreibung von Graubünden 1864, und 2. Theil, 1866; Ders. und J. J. Weilenmann, Die Bäder von Bormio (ohne Jahreszahl); Theobald, Bormio u. s. Bäder, Chur 1865; Dr. C. Meyer, Ahrens und Ch. G. Brügger, Die Thermen von Bormio, 1869; G. Stache im Jahrb. d. k. k. geol. Reichs. 1877. S. 162; Stache und C. v. John, Geolog. u. petrog. Beiträge das. 1879. S. 318; Stache, in Verh. d. geol. Reichs. 1873, 222; Ders. das. 1878, 174; v. Mojsisovics, Geolog. Bedeut. d. Rheinlinie im Jahrb. d. geolog. Reichs. 1873, 152.

emporragen und hier eine gewisse Verbindung oder nähere Beziehung zwischen den nördlichen und südlichen Kalknebenzonen vermittelt, ohne sich jedoch beiden unmittelbar anzuschliessen. Die westlichsten Ausläufer dieses centralalpinen Kalkgebirges, die wir zusammen den Graubündener Triaskalkzug nennen wollen, beginnen schon südlich von Chur in dem Gebirge an der Albula sich anzusetzen; von hier an breiten sie sich dann am oberen Engadin weiter aus, ziehen bis zu den Quellen der Etsch und erreichen das Maximum ihrer Entwicklung im Ortlerstock, wo sie in dem Zuge nach Osten plötzlich abbrechen und endigen. Nur die Kalkköpfe südlich von Innsbruck und das kalkige Gebirge der Radstädter Tauern nehmen eine ähnliche Stellung ein und lassen vielfach analoge Verhältnisse mit dem Graubündener Kalkzug erkennen. Es sind dies die Reste eines ehemals wohl zusammenhängenden inneralpinen Kalkgebirgszugs.[1]) Im Bezug auf die geologische Stellung dieses Gliedes der jüngeren Kalkbildungen der Westalpen äussert schon Escher v. d. Linth,[2]) es sei kaum zweifelhaft, dass die Dolomitmassen des östlichen Bündens und des Stilfserjochs die Fortsetzung des vorarlbergischen sei und auch ich habe bereits 1861 in der Beschreibung des bayerischen Alpengebirges (S. 139) auf diesen Zusammenhang hingewiesen. Damit übereinstimmend spricht sich auch v. Mojsisovics[3]) aus, dass aus Vorarlberg eine Bucht des Triasmeeres südlich bis zur Bernina und von da östlich bis zum Ortler in die Mittelzone hineingereicht habe.

---

1) Es wird hier wie im Nachfolgenden der ganze Schichtencomplex als „Kalkbildungen und Kalkschichten", wenn er auch neben Kalk sehr häufig aus Dolomit oder oft auch aus Mergel besteht, bezeichnet.

2) Geolog. Bemerk. ü. d. nördlichen Vorarlberg u. e. angrenz Gegenden, 1853, S. 48.

3) Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst. 1873, Bd. XXIII, S. 143.

Gleichwohl ist es trotz der beträchtlichen Mächtigkeit dieser Kalkschichten, welche sich hier auf dem langen Zug von Chur bis zur Königsspitze entwickelt zeigen und trotz der nicht zu verkennenden reichen Gliederung des Schichtenbaues bis jetzt noch in geringem Grade geglückt, befriedigende Resultate in Bezug auf Gliederung und Gleichstellung der unterscheidbaren Stufen mit denen der Kalkgebilde einer der Nebenzonen zu gewinnen. Es rührt dies hauptsächlich von der trostlosen Armuth der Schichten an organischen Einschlüssen und von der eigenthümlichen, durch fast alle Schichten hindurch gleich bleibenden Gesteinsbeschaffenheit her, welche den Vergleich mit den Gliedern der zunächst benachbarten Kalkablagerungen erschweren.

Zwar hat der bewunderungswürdig fleissige und unnachahmbar eifrige Theobald,[1]) welcher, wie kein anderer Geologe, diese Gebirge genau durchforscht hat, die Grenzen festgelegt, innerhalb welcher die mächtigen Kalkmassen dieses Gebiets in das System einzureihen sind, nämlich zwischen den alpinen Muschelkalk und den *Belemniten* führenden Liasschiefer, im Einzelnen aber hat er diese einzuschaltende Glieder zu schematisch mit den in den benachbarten Kalkalpen unterschiedenen Abtheilungen der Trias in Parallele gestellt, ohne für eine derartige in's Einzelne gehende Eintheilung immer genügende Anhaltspunkte durch Versteinerungen gewonnen zu haben. Indem er sich vornehmlich nur auf die Gesteinsbeschaffenheit und die Lagerungsverhältnisse stützt, gelangt er für den Graubündener Kalkzug zu nachstehender Reihenfolge der Schichten in absteigender Ordnung:

1. Im Hangenden: Lias (Steinsbergkalk und Algäuschiefer).
2. Rhätische Stufe (Kössener Schichten).

1) Beiträge z. geol. Karte der Schweiz, III. Abth. Bl. XX, 1866.

3. Hauptdolomit.
4. Obere Rauhwacke und graue, den Raibler Schichten vergleichbare Kalke.
5. Arlberger (Hallstätter-) Kalke.
6. Partnachschichten.
7. Graue und schwärzliche Kalke und Streifenschiefer (unterer Muschelkalk).
8. Untere Rauchwacke und Guttenstein-Kalk (unterer Muschelkalk).
9. Verrucano (Perm), dem er graubraune Schiefer und rostige Quarzite anreiht.
10. Als Basis betrachtet er den sog. Casannaschiefer und Gneiss-artige Schiefer, die ihm als metermorphosirte Bildungen gelten.

Abgesehen von Lias und den rhätischen Schichten, welche durch Versteinerungen als ganz sicher nachgewiesen gelten können, führt Theobald nur *Bactryllien* (*? Schmidti*) aus dem Virgloriakalk *Dadocrinus gracilis*, *Gervillia substriata*, *Myophoria* (?) und unbestimmbare Bivalwen im Ortlergebiete an. Ganz unklar bleibt bei ihm die Abgrenzung der Triasbildungen nach unten. Hierher stellt Theobald den sog. Verrucano, welchen er aber bereits für permisch hält, wonach der alpine Buntsandstein, bezw. die Werfener Schiefer, in diesem Gebiete nicht entwickelt wären.

Bei einem mehrjährigen Besuch des Engadins in Tarasp und St. Moritz habe auch ich mich näher mit den geologischen Verhältnissen des Graubündener Kalkzuges beschäftigt und über die Ergebnisse einen kurzen Bericht erstattet.[1])

Der Lias und die rhätische Stufe konnten ganz unzweifelhaft an mehreren Stellen nachgewiesen werden. Auch

---

1) Geologisches aus dem Engadin im Jahresber. d. Naturf. Gesellschaft Graubündens, Jahrg. 31 und Verhandl. d. k. k. geol. Reichsanst. 1887. S. 291.

der Muschelkalk wurde an charakteristischen Versteinerungen sowohl bei Tarasp, als im Chiamuera-Thale erkannt. Etwas höher liegen dünngeschichtete, schwarze Mergelschiefer mit Fischschuppen, *Bactryllien* und *Ostracoden*, welche gleichfalls einer bestimmten Stufe zu entsprechen scheinen. Ferner fand ich in einem hellgrauen, durch Verwitterung gelblich gefärbten Mergel in der Nähe des Passes Sür Som zwischen Zernetz und Münster zahlreiche Versteinerungen vom Typus jene der Raibler Schichten. Es deutet dies an, dass trotz der Armuth an organischen Ueberresten innerhalb mächtiger Schichtencomplexe durch eine sehr genaue Untersuchung des Gebiets Anhaltspunkte zu einer schärferen Gliederung sich wohl gewinnen lassen.

Was die den Muschelkalk unterlagernden Bildungen anbelangt, so glaube ich mich durch eine ausgedehnte Untersuchung dieser Grenzschichten vom Davoser Thal an über Filisur nach Bellaluna und dem Stulser Thal, dann bei Ponte im Engadin, bei Tarasp, insbesondere im Ofen-Passthal überzeugt zu haben, dass die von Theobald im Verrucano zusammengefassten graubraunen Schiefer und rostischen Quarzite, welche stellenweise in ein Augengneiss-ähnliches Gestein und in Sericitschiefer verlaufen, stellenweise durch ächte Conglomerate und rothe Sandsteine mit zwischengelagerten grünlichen und röthlichen Schiefern ersetzt werden und stets concordant unter dem schwarzen Kalke ihre Stelle einnehmen, den Werfener Schichten bezw. dem alpinen Buntsandstein entsprechen. Man vergleiche nur die hierhergehörigen Schichten bei Werfen selbst und zwischen Bischofshofen und Mitterberg mit jenen im Samina-Thale bei Vaduz am östlichen Rheinthalrande, mit den Felsen, worauf Filisur steht, mit den Schichten im Eingang des Chiamuera-Thales bei Ponte, mit dem Sandstein des Ofen-Passes bei Ilg Fuorn oder im Spöl-Thale bei Livigno und endlich mit den *Myophoria costata* einschliessenden, petrographisch gleichen

Schichten von Bovegno unfern Collio und von Nona in den Bergamasker Alpen,[1]) um sich zu überzeugen, dass man es bei allen diesen Abänderungen nur mit örtlichen Ausbildungsweisen ein und derselben Schichtenstufe zu thun hat.

Zuletzt, so viel ich weiss, hat sich G. Diener[2]) mit der sorgfältigen Erforschung eines grossen Theils des Graubündener Gebirges befasst. Abgesehen von den Bündener Schiefern, die uns hier nicht beschäftigen und von denen ich — um das gleich hier anzuführen — im engeren Gebiet des Ortler nichts Entsprechendes gesehen habe, stimmt G. Diener im Allgemeinen mit den Ansichten Theobalds in so weit überein, als sich dies aus den Lagerungsverhältnissen folgern lässt. Leider gelang es auch ihm nicht, durch Petrefaktenfunde die Schichtenglieder bestimmter abzugrenzen.

Ohne vollständige Orientirung über alle einzelnen Glieder im Aufbau des Kalkzugs in Graubünden erlangt zu haben, betreten wir nun das engere Gebiet des Ortlerstocks, um hier Umschau zu halten.

Der Ortlerstock.

Schon eine ganz flüchtige Untersuchung des höchsten und grossartigsten Gliedes der mittelalpinen Graubündener Kalkzone im eigentlichen Ortlerstock genügt, um zu erkennen, dass der mächtige Schichtenbau von Kalk- und Dolomitmassen auf drei Seiten einem älteren krystallinisch ausgebildeten Schiefergebirge in der Art aufsitzt, dass das letztere ringsum aus ungefähr gleichen Gesteinsschichten bestehend eine flache Mulde bildet. Im Grossen und Ganzen fallen dementsprechend die Schiefer am Nordrande gegen S. und SW., am Südrande nach N. und NO. Die Grenze

---

1) Gümbel, Sitz. d. Akad. d. Wiss. in München, 1880. S. 194 und 235.

2) Dr C. Diener, Geol. Stud. im Sw. Graubünden in d. Sitzungsb. d. Wiener Akad. d. Wiss., math.-naturw. Cl. Bd. 97, I. 1888.

zwischen den kalkig dolomitischen Gebirgsgliedern und der Schieferunterlage verläuft auf der Südseite von Livigno her am Fusse der Cima di Plator und des Mt. della Scala zum alten Bad Bormio in fast genau W-O-Richtung. Auf dieser Strecke begegnen wir Aufschlüssen an dem alten Passübergang unterhalb den beiden Wachtthürmen (Pass la Scala) und längs dem nach Bormio führenden Wege namentlich in den Wasserrissen oberhalb der einzelstehenden Kirche zwischen Premadio und Torripiano. In der Addaschlucht selbst und an den Felsen, aus welchen die Thermen von Bormio hervorbrechen, verdecken mächtige Lagen von Gehängeschutt und zum Theil ältere Diluvial-Conglomeratbänke die Grenzregion bis auf einzelne, aus der Ueberdeckung aufragende Felsenköpfe. Eine ähnliche Schuttmasse verbreitet sich auch weiter ostwärts am Fusse der Kalkwände des Mt. Cristallo über das nördliche Gehänge von Valle del Zebru, in dem nur durch einzelne tief einschneidende wilde Schluchten wie Val Campello, V. d'Uzza und mehrere unbenannte Gräben bis zum Val Marmotta und dem Zebrugletscher anstehendes Gestein blossgelegt und der Beobachtung zugänglich wird. Daraus erkennt man, dass die Grenze zwischen Kalk- und Schiefergebirge unter der Wand des Mt. Cristallo von einer Einsattelung des Dosso Reit gegen Casa del Zebru streicht und der Thalsohle bei Prato Beghino und der Alphütte Il Pastore ganz nahe kommt, um von da an über das Königsjoch oder über Passo Cedek zum Suldenthal hin über zu biegen. Die Königswand und die Felsschroffen an der Königsspitz bestehen aus Kalk- und Dolomitschichten, das Schrötterhorn aus krystallinischem Schiefergestein, dazwischen verläuft die Gebirgsscheide durch einen oder den anderen der genannten Pässe. So viel sich aus der Ferne beurtheilen lässt, besteht die Kreilspitze auch aus Kalk, sodass die Gesteinsgrenze auf den Cedekpass treffen würde. Doch ist dies noch genauer zu ermitteln.

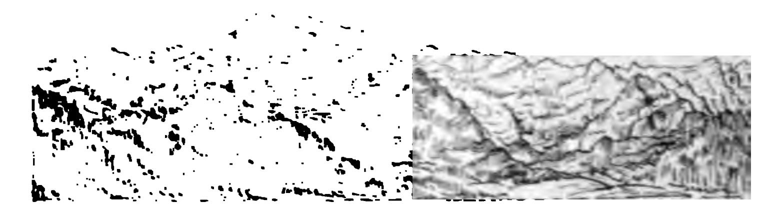


Königsspitz. Ortlerspitz. St. Gertrud Marltkopf.
Ansicht des Ortlergebirges vom Suldener Thale (St. Gertrud) aus mit der Ortlerspitz, Königswand und dem Suldenthal.
(Erklärung der Buchstaben im Texte.)

Auf der Suldenseite macht sich die Grenzlinie jenseits des Suldenferners am Sattel der hinteren Gratspitze wieder deutlich bemerkbar und wendet sich nun in fast rein nördlicher Richtung zum Ende der Welt am Kuhbergrücken und zum Sattel des Marltberges da, wo der von St. Gertrud zur Payerhütte führende Steig sich abwärts zu den Tabarettawänden umbiegt. Hier bietet sich eines der am besten aufgeschlossenen und am bequemsten zugänglichen Profile, das wir später näher beschreiben werden. Von diesem Sattelpunkt zieht sich die Grenze unter den Tabaretta-, Bärenkopf- und Hochleiten-Spitz-Wänden zum Sattel zwischen Hochleitenspitz und Zumbanellberg und schlägt von da wieder eine südwestliche Richtung gegen die hl. Dreibrunnen im Trafoier-Thal und dicht hinter den Häusern von Franzenshöhe vorüber zum Sattel am Stilfser Joch ein, das fast genau auf der Gesteinsscheide eingetieft ist.

Im Gebiete des Braulio-Thales verläuft die Grenzlinie zunächst von der Passhöhe am Gehänge auf der Südseite der Strasse, welche sie nahe am 15. Kilometerstein durchschneidet, um sich gegen das Umbrail Joch zu wenden, sodass hier eine direkte Fortsetzung des Kalkgebirges vom Ortlerstock zu den westlichen Kalkbergen des Mt. Braulio, Pedenollo, Mt. della Scala u. s. w. quer durch das Braulio-Thal und die Addaschlucht besteht.

Im Grossen und Ganzen bemerkt man auf dieser langen Grenzlinie — einzelne Strecken, namentlich an Verwerfungsspalten ausgenommen — eine wirklich oder doch nahezu concordante Auflagerung der kalkischen Schichten auf den krystallinischen Schiefern. In deutlich discordanter Lagerung stehen z. B. die Schichten auf der Passhöhe des Stilfser Joches an, wo die schieferigen Phyllite nordwestlich einfallen, während die zunächst angeschlossenen schwarzen schieferigen Kalke eine Neigung nach SO. besitzen, weil hier eine Verwerfungsspalte hindurch zieht.



Hochleitensp. Tabarettawände. Ortlersp. Trafoitha. Madatschsp. Mt. Cristallo
Ortlergruppe von der Strasse bei der Franz Josephs-Höhe.
(Erklärung der Buchstaben im Texte.)

Von der Passhöhe überblickt man einen grossen Theil des kalkigen bezw. dolomitischen Aufbaues des Ortlerhauptstocks längs der nördlichen Auflagerungsgrenze auf den krystallinischen Schieferschichten. Von dem äussersten nördlichen Punkte unter der Hochleitenspitz an zeigen die Kalkschichten über den Bärenkopf, die Tabarettawände, die Felsen unter der Ortlerspitz und den unteren Ortlergletscher bis gegen das Trafoier Thal ein südöstliches Einfallen, das in den wenigen zunächst am Ortler selbst über das Gletschereis vorstehenden Felsen in eine nahezu söhlige Lagerung überzugehen scheint. An den Madatschwänden stellt sich wieder ein steileres Einfallen ein, wobei zugleich die Schichten stark gefaltet und zusammengebogen sind. Weiter nach Süden zu, schon im Val Vitelli, wenden sich die Schichten und nehmen an den Wänden unter dem Gletscher des Mt. Cristallo schliesslich

eine nordwestliche Neigung an, mit welcher sie am ganzen Südabbruch des Kalkstocks dem gleichförmig einfallenden Schiefer aufgelagert sind.

Um nun die Schichten, mit welchen das mächtige Kalkgebirge aufgebaut ist, im Einzelnen näher kennen zu lernen, erweist sich unter allen mir bekannt gewordenen Aufschlüssen namentlich in Bezug auf die tiefsten Lagen und den Anschluss an die krystallinischen Schiefer keiner lehrreicher, als jener am Marltkopf längs dem Steig, auf welchem man gewöhnlich von Sulden aus zur Payerhütte und der Ortlerspitze aufzusteigen pflegt, während für die Untersuchung der hangenden Gesteinsregionen der alte Passweg der Scala bis ins Fräle-Thal gute Gelegenheit bietet.

Profil am Marltkopf.



Profil am Marltkopf (Steig zur Payerhütte) mit dem Marltgletscher.
(Erklärung der Buchstaben im Texte.)

Sobald man von St. Gertrud in Sulden kommend den Marltbach und die grossartige vom Marltferner abstammende Trümmerhalde (T) überschritten hat, betritt man den von der Höhe herabziehenden felsigen Marlt-Rücken, über welchen der Steig aufwärts zu den Tabarettawänden emporführt. Die ersten anstehenden Felsen bei etwa 2050 m Meereshöhe bestehen hier aus quarzitischen Augengneiss-artigen Schichten, welche öfter mit glimmerig glänzenden Phylliten wechseln (a). Die wellig gebogenen Schichten fallen im Allgemeinen mit

ungefähr 10° nach W. ein. Der Weg führt nun aufwärts über ziemlich stark verwitterte zweiglimmerige Gneisse (b) zu einer zackigen Felswand aus Sericitquarzitschiefer und Augengneiss mit grossen Orthoklas-Knollen (2125 m) (c). Hier biegt sich der Steig wieder auf die Trümmerhalde und kehrt erst da zum Bergrücken zurück, wo derselbe oberhalb des schroffen Felsriffs aus weicheren, leicht verwitternden phyllitischen Schiefern (d) besteht. Bei 2240 m beginnt eine weitere felsige Region mit theils feinen, theils grossaugigen zweiglimmerigen Gneissen und sericitischem Quarzitschiefer (e), welche nach oben in vorwaltend phyllitische Schiefer (f) übergehen. Die Schichten sind immer noch gleichförmig mit 10—18° nach W. geneigt. In dieser Region der Phyllitschiefer (f) setzt bei 2475 m ein ungefähr 1 m mächtiger, in St. 12 streichender, stark verwitterter Suldenit oder Ortlerit-Gang (s) auf, der noch weit über den Rücken bis zum Steilabfall gegen die Tabarettawände hin sich verfolgen lässt. Zahlreiche Blöcke dieses oder eines ähnlichen Gesteins gewahrt man schon unten in der Schutthalde des Marltbachs; es ist wahrscheinlich, dass zahlreiche Gänge dieser Felsart hier das Schiefergebirge durchschwärmen.

Die Region der phyllitischen Schiefer, welche mehrfach mit grünen, chloritschieferähnlichen Lagen, wie wir sie später näher kennen lernen werden, wechseln und zahlreiche Quarzlinsen und quarzitische Zwischenschichten in sich schliessen, reicht aufwärts bis etwa 2480 m. Hier stellen sich nun durch ihre helle Farbe hervorstechende quarzitische, sericitische Flaserschiefer (g) ein, welche Linsen, Streifen und dünne Lagen eines gelblichen dolomitischen Minerals umschliessen, von zahlreichen, durch Verwitterung in eine Brauneisensubstanz übergegangenen Butzen begleitet werden und mehrfach eine Art Trümmerbeschaffenheit annehmen. Es sind dies die von Theobald als Verrucano bezeichneten Gesteine, welche hier jedoch weder mit Sandsteinen, noch mit Con-

glomeratbänken vergesellschaftet sind. Die gelben Butzen bestehen aus:

Eisenoxyd	5,8
Thonerde	0,1
Manganoxydul	0,6
Kalkcarbonat	39,9
Magnesiumcarbonat	16,2
Kieselsäure	0,3
Kohlensäure	2,4
In Säuren Unlöslichem (Quarz, Glimmer, Thon)	23,4
Wasser	11,3
	100,7

Es werden diese Einschlüsse von gelben dolomitischen Linsen, namentlich die oft sehr eisenhaltigen, besonders dadurch bemerkenswerth, dass sie sich stellenweise zu mächtigen Lagen erweitern und durch ihre Verwitterung einen ockrigen Brauneisenstein liefern. Es sind dies jene Eisenablagerungen, welche in früherer Zeit an mehreren Stellen namentlich an der Südabdachung des Gebirgsstock ausgebeutet und auf mehreren Eisenhütten, bis in die neueste Zeit zu Premadio, verschmolzen wurden, wie die analogen Eisenerze in den Bergamasker Alpen und in den Werfener Schiefern bei Werfen.

Mit Säuren behandelt brausen die sericitischen Schiefer schwach auf und geben an 5 % Salzsäure 2,7 % ab, welche aus

Eisenoxyd	1,15
Kalkcarbonat	1,34
Bittererde	Spur
Wasser	0,21
	2,70

bestehen.

Der Rest enthält in %:

Kiesel- und Titansäure	78,75
Thonerde	13,00
Eisenoxyd	1,00
Kali	1,93
Natron	0,72
Wasser	3,70
	99,10

Demnach macht die Hauptmasse des Gesteins Kieselsäure aus, welcher eine thonige Substanz und sericitische Schuppen beigemengt sind. Ein Feldspathbestandtheil lässt sich in Dünnschliffen nicht erkennen.

Diese rostfleckigen, quarzitischen Flaserschiefer reichen im Marltprofil bis zum Sattel dieses Bergrückens, über welchen der Steig sich nun abwärts zu den Tabarettawänden umbiegt. Schicht für Schicht aufgeschlossen zeigen diese Grenzschichten einen deutlichen, allerdings raschen Uebergang in tief schwarze, splittrige, blättrig verwitternde, 8 m mächtige Kalkschiefer (1 des Profils) mit noch halbkrystallinisch ausgebildeten, schwach glimmerglänzenden Thonflasern und Ueberzügen, welche fast dasselbe Aussehen besitzen, wie manche Phyllite. Solche halbkrystallinisch entwickelte, phyllitähnliche Thonflasern wiederholten sich in Zwischenlagen noch mehrfach innerhalb der nächst höheren Schichten. Mir scheint dieses Verhältniss von grosser Wichtigkeit zu sein. Es wird doch wohl Niemand dieselbe als Folge einer Metamorphose, sei es durch Druck oder Contakt, deuten wollen. Dafür lässt sich hier nicht der Schein einer Veranlassung auffinden.

Diese krystallinische, phyllitähnliche Ausbildung der den Kalk sonst in Form von gewöhnlichem erdigen Thon begleitenden Flasern beweist vielmehr, dass, wie auch bei den unterlagernden Flaserschiefern, die eine krystallinische Entwicklung begünstigenden Verhältnisse an dieser Stelle und in gleicher

Weise in dem ganzen Gebirgsstock in analoger Weise weiter fortgedauert haben, wie sie vorher hier geherrscht hatten, während in anderen Gegenden die thonigen Absätze in gewöhnlicher Weise abgesetzt wurden und eine erdige Beschaffenheit beibehalten haben.

Die Kalkschiefer (1) nehmen nach oben eine festere Beschaffenheit an, gehen in etwas dickere Lagen über, enthalten eigenthümliche wulstige, *Rhizocorallium* entfernt ähnliche Concretionen und weisse streifige Kalkspathauscheidungen, welche an organische Einschlüsse erinnern. Deutliche Versteinerungen wurden jedoch nicht entdeckt. Man könnte diese im Ganzen 30 m mächtigen Schichten Streifenkalke[1]) nennen. Sie schliessen eine mächtigen Bank, weisslichen, fleckweise etwas röthlichen Kalks ein. Bei 2550 m legen sich darüber gleichförmig dichte Bänke eines gelblich angewitterten, trümmerigen, Breccien-, oft Rauhwacke-artigen etwa 5 m mächtigen Dolomites an. Dieses Gestein besteht aus:

Kalkcarbonat	72,07
Bittererdecarbonat	25,01
Eisenoxyd (urspr. wohl Siderit)	1,00
Ungelöstem Rückstand . .	1,12
	100,00

Nach oben gehen diese Schichten in schwarze, weissgeaderte, etwas gelblich verwitternde Dolomite vom Typus der Guttensteiner Stufe über, welche die obersten, in zackigen Felsriffen anstehenden Kalkgebilde unter den nun in fast senkrechten Wänden ansteigenden schwarzgrauen Dolomite

1) Es sei hier die Bemerkung wiederholt, dass man bei der Bezeichnung Kalk und Dolomit eine scharfe Unterscheidung nicht machen kann, man müsste denn jede einzelne Schicht chemisch analysiren, da sehr häufig körnige, dolomitisch aussehende Gesteine als zum Kalk gehörig sich erweisen, wie andererseits dichte kalkähnliche Gesteine eine dolomitische Zusammensetzung besitzen.

des Ortlerstocks zusammensetzen. Man klettert, auf dem Steig, welcher an den Tabarettawänden zur Payerhütte führt, über die Köpfe dieser Kalk- und Dolomitschichten, die nur von wenig mächtigen, mergeligen schlecht aufgeschlossenen Mergelbänken unterbrochen werden, zum Sattel empor. Auch die obersten aus dem Gletschereis des Ortler Ferners aufragenden Felsköpfe bestehen noch aus dem gleichen dolomitischen Gestein. Dass in diesem ungemein mächtigen Schichtencomplexe noch verschiedene, bisher nicht getrennte Triasglieder verborgen stecken, ist nicht zweifelhaft. Aber die enorme Ausbreitung der Gletschermassen hindert hier eine nähere Untersuchung, jedoch findet man in dem von der Ortlerwand auf den Marltgletscher und den Endderwelt-Ferner herabgestürzten Gesteinsbrocken nicht gerade selten einzelne Stücke, welche durch eingeschlossene Versteinerungen auf das Vorhandensein mehrerer Unterabtheilungen hinweisen. Ein solcher tiefschwarzer, krystallinisch körniger Kalkbrocken mit 94,60 Kalkcarbonat, 2,75% Bittererdecarbonat, 2,00% Thon, 0,58% Eisenoxyd, 0,05 kohligen Bestandtheilen und Spuren von Phosphorsäure umschliesst zahlreiche weissschalige Ueberreste von Gastropoden und Bivalven. Unter ersteren befinden sich namentlich *Natica*-ähnliche Formen und solche, welche der *Neritopsis ornata* Schäff. sehr nahe stehen, wenn nicht mit derselben identisch sind.

Die Grenze zwischen dem Phyllitschiefer und den Triasschichten verläuft von dem Marltsattel nordwärts unter den Kalkwänden des Bärenkopfs und der Hochleitenspitz deutlich erkennbar bis zu einer Einsattelung zwischen der letzteren und dem Zumpanellberg und senkt sich dann zum Trafoierthal. Südwärts stösst man wieder auf die hier weniger vollständig aufgeschlossene Gesteinsscheide am Kuhberg vor dem Endderwelt-Ferner. Auch an dieser Stelle wiederholt sich dieselbe Schichtenfolge, wie am Marltrücken. Tiefer

am Gehänge gegen das Suldenthal sind es Augengneisse, quarzitische Schiefer, höher Phyllite und grüne chloritische Schiefer, welche die Unterlage der ihnen gleichmässig aufgesetzten sericitischen Quarzite mit rostigen Flecken und gelben dolomitischen Linsen bilden. Höher an dem Bergrücken in der Nähe des sog. Signals ragen gelblich verwitternde, trümmerige Dolomite in zackigen Felsen als die letzten zugänglichen Schichten unter der Steilwand des Ortler empor. Jenseits des Endderwelt-Ferners zieht die Scheidelinie deutlich durch den Sattel zwischen dem hinteren Grat und den Felswänden des Sulder-Ferners fort und verliert sich endlich unter der Eismasse dieses Gletschers, um erst an dem südlichen Abbruch des Kalkstockes im Zebruthal wieder deutlich zum Vorschein zu kommen. Hier fand ich an einer nördlichen Seitenschlucht bei den Alphütten Prato Beghino unterhalb eines kleinen Wasserfalls einen ziemlich guten Gebirgsaufschluss, der insofern recht bemerkenswerth erscheint, als auch an diesen Stellen dieselben rostfleckigen, quarzitischen Flaserschiefer, wie am Marltsattel, den gleichförmig auflagernden tiefsten Kalkschichten zur Basis dienen; nur fallen hier die Lagen unter geringer Neigung nach NO. ein und bilden demnach mit den Schichten im Suldenthale eine schwach vertiefte Mulde.

In dieser Seitenschlucht des Zebruthales stehen oberhalb eines verstürzten Felsblockes zunächst sericitische, flaserige, rostfleckige Quarzitschiefer an, auf welche nach oben eine gelbliche Dolomitbank und darüber wieder grünlichweisse quarzitische Schiefer, wie in den tiefen Lagen folgen. Eine mächtige Bank dichten weissen und blassröthlichen Kalks bildet in gleichförmiger Lagerung das Hangende und auf diese legen sich intensiv schwarze schieferige Kalke und über diesen schwarze weissgeaderte Dolomite an, genau in der Reihenfolge, wie am Suldenthalgehänge. Tiefer abwärts im Zebruthale stehen dann vorwaltend Augengneiss-artige und

quarzitische Schiefer an, welche auf der nördlichen Thalseite nach NO., auf der südlichen nach SW. einfallen, so dass das Thal ungefähr in eine Sattellinie eingetieft erscheint. Zahlreiche Blöcke des schon erwähnten Eruptiv-Gesteins, Palaeophyr (Suldenit und Ortlerit), mit Uebergängen in eine Tonalit-artige Felsart, deuten auch hier das Vorkommen zahlreicher Gänge desselben an.

Weiter abwärts im Thale stellen sich mehr und mehr phyllitische Schiefer ein, welche von der Brücke unterhalb der Casa del Zebru gegen die Berghäuser an den Gehängen bei St. Antonio mit grünen chloritischen Schiefern sich in die Herrschaft theilen. In dieser Region legt sich auch ein am Gehänge fortstreichendes Lager von weissem, körnigem Kalk an, das sich weithin verfolgen lässt.

Näher gegen Bormio zu erblickt man hoch oben unter den Kalkwänden des Mt. Cristallo in den auslaufenden Schluchten des Val. d' Uzza eine Lage eines blendendweissen Gesteins. Um es zu erreichen, steigt man auf dem östlichen steilen Gehänge dieser Thalschlucht über ziemlich constant nach NO. einfallende phyllitische und chloritische Schiefer, in welchen auch als Zwischenschicht der körnige Kalk wieder ausstreicht, zu einer felsigen Region von quarzitischen Schiefern und feinkörnigen Augengneissen empor, in welchen sich das Thal mit zahlreichen tiefen, wild zerrissenen Seitenfurchen vergabelt. Merkwürdig ist hier eine in die Felsen eingesprengte, jetzt verfallene Canalanlage, welche in alter Zeit zur Bewässerung der tiefer liegenden Alpweiden gedient zu haben scheint. Ueber diesen zackigen Felsenriff legen sich wieder graue phyllitische, leicht verwitternde und ein weniger schroff ansteigendes Gehänge bildende Schiefer bei etwa 2340 m Höhe an. Es folgen dann zunächst darüber quarzitische, braunfleckige, flaserige Quarzitschiefer, wie im Marltprofil und dann bei 2450 m das blendendweisse Gestein, das sich nun als Gyps zu erkennen giebt. Derselbe bildet hier

einen sehr mächtigen Stock zwischen den flaserigen Quarziten und den schwarzen schieferigen Kalken oder Dolomiten und ragt oben an den letzten Ausläufern der Uzzaschlucht in Erdpyramiden-ähnliche Pfeiler zernagt auf.

Von hier streicht die Gesteinsscheide zwischen krystallinischem Schiefer und dem Kalkgebirge über den Sattel zwischen Dosso Reit und der Cristallowand zum Val Campello, in welchem mächtiger Schutt die unmittelbare Uebereinanderlagerung der verschiedenen Gesteinsschichten streckenweise überdeckt, wie dies auch in der Nähe des alten Bades und am Ausgang der engen Addaschlucht der Fall ist. Nur vereinzelt ragen hier Felsköpfe aus dem Gehängeschutt hervor. So ist an der alten Passstrasse zwischen Stadt Bormio und dem alten Bade ein Riff chloritischen Schiefers, der wohl in die Reihe der Pietra verde Gastaldi's[1]) gehört, blossgelegt, dessen Schichten gleichfalls in St. 3 mit 15° nach NO. einfallen. Ein ähnlicher Schiefer wurde bei dem Fundamentgraben des neuen Bades aufgefunden.

Dieser grüne Schiefer besteht nach Untersuchungen der Dünnschliffe aus einer innigen Vermengung von intensiv grünen chloritischen Blättchen, lichtgrüner faseriger Hornblende, gelbgrünem Epidot (besonders reichlich) und Quarz neben zerstreut eingebetteten Kalkspaththeilchen, Eisenerzen (Schwefelkies, Magnet- oder Titaneisen) und weisslichen Schüppchen. Mit schwacher, 5% Salzsäure behandelt zeigt sich ein geringes Aufbrausen und es gehen 4,7% in Lösung. Diese Lösung enthält

$$\begin{array}{l} 3{,}06\,\%\ CaCO_3 \\ 0{,}40\,\%\ MgCO_3 \\ 1{,}20\,\%\ (Fe^2 + Al^2)\,O_3 \\ \underline{0{,}04\,\%\ SiO_2} \\ 4{,}70\,\% \end{array}$$

1) Gastaldi, Studii geologici sulla Alpi occidentali, Firenze 1871. —

Der Rückstand mit concentrirter Salzsäure unter Luftabschluss in der Kochhitze behandelt gab weiter 25,48% Lösung (die SiO_2 ausgeschlossen) mit:

Eisenoxyd	4,75
Thonerde	3,50
Eisenoxydul	5,75
Kalkerde	2,00
Bittererde	6,48
Wasser	3,00
	25,48

Dazu

Kieselsäure	6,00

Bei dieser Lösung scheint sich hauptsächlich der Chloritähnliche Bestandtheil zersetzt zu haben, der allgemein in den Phylliten enthalten ist und vom typischen Chlorit durch seine verhältnissmässig leichte Zersetzbarkeit durch Salzsäure sich unterscheidet. Ich habe diesen Gemengtheil desshalb unter der Bezeichnung „Phyllochlorit" (Geog. v. Bayern, I. Bd. S. 166) vom eigentlichen Chlorit unterschieden.

Der letzte Rest ist immer noch grünlich gefärbt und erweist sich zusammengesetzt aus faseriger hellgrüner Hornblende, gelblichem Epidot mit Quarz und spärlichen schuppigen Theilchen. Nach dem spezifischen Gewicht getrennt theilt sich der Rest in

Epidot	5
Hornblende	30
Quarz	60
Unbestimmt	5

Der Flusssäure-Aufschluss ergab ein Gehalt von 8,4% Chloralkalien, in welchem Kalium nur in ganz geringen Mengen vertreten war. Der weisse schuppige Gemengtheil dürfte demnach aus Paragonit bestehen.

Auch die Felsen des alten Bades stehen isolirt zwischen Schuttmassen der Trümmerhalde vor dem tiefen Einschnitte von Val di Braulio zwischen Mt. Cristallo und Mt. della Scala, durch welchen die Jochstrasse sich empor windet, zu Tag an. Ebenso herrscht auch noch westwärts von der Addaschlucht an den steilen Gehängen unter den Kalkwänden des Mt. della Scala bis zu beträchtlicher Höhe streckenweise zu Conglomerat verkittetes Geröll und nur einzelne Striche festeren phyllitischen und chloritischen Quarzitschiefers treten, terrassenförmig über einander gestellt, gesimsartig hervor. Hoch oben über denselben ist ein mächtiger Gypsstock, wie in der Uzzaschlucht, in gleicher Lage sichtbar. Streichen und Fallen dieser Schichten ist genau das gleiche wie im Osten der Addaschlucht, wodurch eine unmittelbare Fortsetzung des ganzen Schichtenzuges im Osten und Westen der Addaschlucht nachgewiesen ist. Damit stimmt auch die Lage und Schichtenstellung der zackigen Felswände, auf welchen hoch oben das alte Bad mit seinen Thermen burgartig sich erhebt. Es sind diese Felsen keine herabgebrochenen Bergtrümmer, sondern die Köpfe anstehender breccienartiger Dolomite mit 64,51% $CaCo_3$ und 35,49% $MgCO_3$, wie solche im ganzen Ortlerstock regelmässig nahe an der Grenze gegen das unterlagernde Schiefergebirge sich einzustellen pflegen. Dies ergiebt sich auch aus den Aufschlüssen, welche wir oberhalb des alten Bades der Passstrasse entlang beobachten können. Ehe wir dieses öfters unterbrochene Profil weiter verfolgen, erscheint es für die Orientirung zweckmässig, vorerst die fast ununterbrochen aufgeschlossene Schichtenfolge näher kennen zu lernen, welche sich uns an dem alten Passwege zum Frälethal bei den zwei Wachtthürmen vorbei bis zum nördlichen Gehänge dieses Thales darbietet. Ein sehr bequemer Weg führt vom neuen Bad über Premadio auf dem schon beschriebenen Südabhang des Mt. della Scale an ziemlich häufig zu Tag ausstreichenden

Phylliten und chloritischen Schiefer vorüber allmälig in die Höhe. Die Schiefer fallen hier noch constant in St. 3 mit 10—15° nach NO. ein. Auch die Einlagerung von weissem körnigen Kalk, welche wir im Zebruthale und in der Uzzaschlucht bereits kennen gelernt haben, taucht in der entsprechenden Streichlinie wieder auf. Wir gelangen endlich zu einer breiten kesselartigen Einbuchtung, erfüllt mit Gebirgsschutt und grossen Kalkfelsblöcken, unter denen mächtige Quellen (bei 1625 m mit 6,5° C.) hervorbrechen. Diese Vertiefung unmittelbar vor der Steilwand, über welche der Weg zu der mit den zwei verfallenen Thürmen gekrönten engen Passschlucht emporzieht, scheint durch Auswaschung eines in dieser Schichtenregion zu vermuthenden Gypsstockes entstanden zu sein. In der durch ungemein reiches Vorkommen von Edelweiss ausgezeichneten Schutthalde sah ich zum ersten Mal in diesem Gebirgstheil Bruchstücke eines rothgefärbten Trümmergesteins, welches unzweifelhaft dem sog. Verrucano entspricht, wie es von da westwärts bei Livigno und in dem Ofener Passthal öfters anstehend zu beobachten ist.

Bei dem Aufsteigen zum Pass überschreiten wir zuerst — die tieferen Schichten sind hier von Schutt überdeckt und verhüllt — äusserlich graue, etwas gelblich angewitterte, im Innern schwarze, trümmerige Dolomite, wie sie am alten Bade anstehen, dann wohlgeschichtete, dünnbankige, schwarze Dolomite mit weissen Kalkspathadern, in welchen die Scharte (1875 m) eingeschnitten ist. Jenseits derselben erweitert sich die Furth zu einer verebneten Fläche, auf der eine Kapelle steht. Die Kalkwände bestehen hier aus grauen, weissfleckigen Dolomitschichten, für welche weisse Kalkspathadern und kleine weisse rundliche Kalkspathknöllchen charakteristisch sind. Gegen die Seen hin legen sich mit gleichem NO-Einfallen ähnliche Schichten mit zahlreichen hellen Streifen und dann intensiv schwarze, weissaderige

Dolomite mit Zwischenlagen von weichem schwarzem Schiefer bis zur Wegbiegung und Senkung gegen das Frälethal in ununterbrochener Aufeinanderfolge an. Die gleichen Schichten sieht man weithin beiderseits sowohl am Mt. della Scale wie an der Cima di Plator bis zu den Berghöhen fortstreichen. An der erwähnten Wegbiegung stossen wir auf zahlreiche, karrenfeldartig ausgefurchte Bänke eines blaugrauen Kalkes, wechsellagernd mit weichen, schwarzen Mergelschichten. Indem die weichen Zwischenlagen auswittern, entstehen wildzerrissene Felsgruppen, welche in spitzen Riffen aufragen und mit dem Auge bis hoch an den Gehängen von Cima di Plator sich verfolgen lassen. Das Gestein ist erfüllt von zahllosen kleinen *Gasteropoden*, welche theilweise ausgewittert über die Oberfläche vorstehen, aber doch zu undeutlich sind, um eine genaue Artenbestimmung zu gestatten. Es sind Formen vom Typus der *Holopella alpina* und der *Turritella Zitteli* neben *Loxonema*-artigen Steinkernen. Ungemein zahlreiche schwarze Pünktchen gaben Veranlassung, das Gestein in Dünnschliffen zu untersuchen. Dabei zeigte sich, dass der Kalk von einer erstaunlich grossen Menge von *Foraminiferen* erfüllt ist, welche alle einer Art, und zwar nach den Quarschnitten zu urtheilen, der Gruppe der *Trochammina* oder *Endothyra* angehören. Ein ähnlicher Reichthum an *Foraminiferen*-Einschlüssen ist bis jetzt in den Alpen nur noch in den Bellerophonkalken bekannt geworden. Von dieser Stelle senkt sich der Weg allmälig zur Thalsohle und durchschneidet eine sehr mächtige Region schwarzgrauer, in kleinste Trümmer zerklüfteter Dolomite, welche ihrer petrographischen Beschaffenheit nach dem Hauptdolomit anderer Gegenden gleich kommen. Wo der Weg die Thalsohle erreicht, legen sich am Rande des Thales darüber graue, gelblich angewitterte, flaserige Mergelkalke voll von rhätischen Versteinerungen an. Sie werden von eigenthümlichen, halbglimmerglänzenden Zwischenschichten begleitet, deren thonige

Bestandtheile eine sericitische Beschaffenheit zu besitzen scheinen. Sie erinnern an die Phyllit-ähnlichen Schiefer in den liegendsten Schichten des Kalkgebirges am Marltkopf. Eine Reihe schmaler, langgezogener, parallel neben einander fortlaufender Hügel zieht sich an dem Thalrande fort. Die jähen aufragenden Kuppen derselben bestehen aus karrenfeldartig ausgewitterten Bänken eines harten, grauen, z. Th. weisslichen, seltenen röthlichen Kalks, während in den Eintiefungen zwischen den einzelnen Hügelrücken weiche, leichtverwitternde Mergel ausstreichen. Man wird hierbei lebhaft an das Vorkommen gewisser Dachsteinkalke erinnert. Doch glückte es mir nicht, Versteinerungen in diesen Schichten aufzufinden. Erst am Fusse des am nördlichen Thalrande aufsteigenden Berggehänges von Piz Ciumbraida finden wir geschlossene Lagen eines hell- und dunkelgrau gefleckten Mergelkalkes und schieferiger Mergel anstehen, welche den Liasfleckenmergel oder Algäuschiefer, wie sie sich am P. Lischana bei Tarasp vorfinden, entsprechen. Ihre Schichten fallen conform mit jenen am südlichen Thalgehänge nach NO. ein.

In diesem breiten, mit vortrefflichen Weidflächen versehenen Fräletbale haben sich bereits aus zahlreichen Quellen die Gewässer zur Adda gesammelt und fliessen ostwärts in eine enge unzugängliche Felsschlucht zur Ponte del Piano, wo der Bach des Brauliothales sich mit der Adda vereinigt. Hoch am Gehänge verläuft ein Steig aus dem Frälethale zu dieser Brücke und der Jochstrasse. Schlägt man diesen Weg ein, so stossen wir in der Nähe der östlichsten Alphütte der Thalverebnung auf das Ausgehende der rhätischen Mergelkalke, in der Fortsetzung jener am oberen Thalrande und steigen dann über die aufgewitterten Schichtenköpfe der Dachsteinkalk ähnlichen Gesteinsbänke zu einem Sattel empor, von dem sich nun der Steig zu der wilden Schlucht des Forcolabachs senkt. Hier begegnen wir erst wieder sehr

mächtigen, dem Hauptdolomit ähnlichen, stark zerklüfteten Dolomiten mit einer Bank von Rauhwacken und grobgeschichteten, weiss punktirten Streifenkalken oder Dolomiten, unter denen sich an der Bachsohle tief schwarz gefärbte lettige Schiefer herausheben, wie solche in der Nähe des 6ten Kilometersteins an der Jochstrasse ausstreichen.

Ein grosser Granitblock von der Beschaffenheit des Berninagranit auf 2075 m neben dem Steig liegend erinnern uns an Moränenschutt aus entfernten Gebirgstheilen hergeführt, welcher hier einst wohl weit verbreitet war, durch spätere Abwaschungen aber grossentheils wieder weggefegt worden ist.

Von der Forcolaschlucht an herrschen streifige, weissgefleckte Kalke und Dolomite, denen sich näher gegen die Jochstrasse hin mergelige und dünnschichtige Lagen beigesellen. Sie scheinen aus der Tiefe der Addaschlucht sich am östlichen Steilabfall des Mt. della Scala emporzuziehen und hier jene steilaufgerichteten, vielfach gebogenen und gewundenen, stark ausgewitterten Felsriffe zusammenzusetzen, welche man von der Jochstrasse aus mit dem Auge weithin verfolgen kann. Sie setzen auch ostwärts über die Jochstrasse in der Nähe des 6. Kilometersteins hinüber und streichen weiter zum Mt. Cristallo fort.

Bevor wir den Gebirgsaufschluss an der Jochstrasse zwischen Bormio und dem Stilfserpasse weiter verfolgen, wollen wir zunächst noch einen Blick auf die nächste Umgebung des alten Bades werfen. Die hochaufragenden Felsen, auf welchen die Gebäulichkeiten stehen und aus welchen die Quellen entspringen, bestehen, wie wir bereits erwähnt haben, aus einem splittrigen, gelblich angewitterten, z. Th. breccienartigen schwarzen Dolomit, wie er als eine der tiefsten Stufe des Kalkgebirgs überhaupt nahe an der Grenze des unterlagernden, krystallinischen Schiefers aufzutreten pflegt. Er besteht, wie schon angegeben ist, aus 64,51% Kalkcarbonat

und 35,49 % Bittererdecarbonat. In demselben ist auch der Stollen der Martinsquelle eingetrieben. Zwischen den einzelnen zu Tag emporragenden Felsenköpfen ist theils Gehängeschutt, theils eine Art diluvialer Nagelfluh ausgebreitet, so dass die unmittelbar an diesen Dolomit angeschlossenen Schichten hier nicht entblösst sind. Doch stehen unfern der Badgebäude an einem schmalen Steig, welcher aufwärts gegen die Nibelungenquelle und dann abwärts zur Addaschlucht führt, intensiv schwarze, sehr dünnschieferige, mergelige Schichten an, in welchen ich ähnliche Fischschuppen, wie in der p-Schicht des Val Triazza-Profils bei Tarasp[1]) und *Ostracoden*-Schälchen fand. Das Hangende wird von gelblich verwitternden Dolomiten, die in eine 2. Lage solcher dünngeschichteter Schiefer und dann in schwarze weisspunktirte und mit kleinen Kalkspathknöllchen durchspickte Schichten übergehen, gebildet. Aehnliche Schichtencomplexe sind auch an der Jochstrasse bei dem 6[ten] Kilometerstein blossgelegt.

Indem wir die Aufschlüsse an der Jochstrasse weiter aufwärts verfolgen, beobachten wir zunächst über dieser Region schwarzer Dolomite und dünngeschichteter Schiefer, welche constant nach NO. einfallen, wohlgeschichtete, z. Th. tiefschwarze, z. Th. hellfarbige, selbst röthliche, vorherrschend weiss gefleckte und gebänderte Streifenkalke, welche vielfach von der Strasse durchschnitten werden. Sie erinnern lebhaft an die hellstreifigen, oft breccienartige Kalke der Radstädter Tauern. Auf grössere Strecken laufen sie mit dem Strassenzuge parallel bis in die Nähe der 2. Cantoniere. Bevor man diese erreicht hat, stösst man auf intensiv schwarze Dolomite mit weissen *Gyroporellen*-ähnlichen, aber nicht deutlich abgegrenzten und durch die spàthige Beschaffenheit der Aushüllungsmasse auch mikroskopisch nicht bestimmter erkennbaren Einschlüssen neben sehr deutlichen *Crinoideen*-

1) a. a. O. S. 22.

Stielen und Durchschnitten von Conchylienschalen ähnlich denen auf dem Marlt-Ferner angetroffenen.

Längs der zahlreichen Windungen der Strasse, welche hier aufwärts zur 3. Cantoniere führt, gehen vorherrschend dunkelgefärbte, doch auch vielfach hell, weisslich und röthlich gestreifte Kalke und Dolomite mit anhaltender Neigung nach NO. zu Tag. Dieser Wegstrecke gegenüber thürmen sich die Schichten des Kalkgebirgs von der Tiefe des Val Braulio an den Wänden des Mt. Pedenollo und Mt. Braulio wohl über 500 m hoch in grosser Regelmässigkeit über einander auf, während unten im Thale oberhalb des 15. Kilometersteins die Kalkgebirgsschichten von einer Verwerfungsspalte plötzlich abgeschnitten werden und sich nun weiter aufwärts bis zum Stilfserpasse wieder krystallinische Schiefer im Allgemeinen von dem Typus jener im Zebru- und Suldenthale anlegen. Es sind theils glimmerigglänzende graue Phyllite und grüne chloritische Schiefer, auf welche bei der Kirche St. Rainieri ein kleiner Steinbruch angelegt ist, theils quarzitische Augengneisse, welche in vielfachem Wechsel uns bis zur Passhöhe begleiten und dann weiter durch das Trafoierthal gegen die Hochleitenspitz fortstreichen. Der Sattel selbst schneidet, wie bereits erwähnt wurde, auf der durch eine Verwerfungsspalte erzeugten Grenze zwischen Kalkgebirge und den krystallinischen Schiefer ein.

Sucht man nun ein allgemeines Bild von dem im Ganzen sehr ruhigen Aufbau des Ortlerstocks zu gewinnen, so stellt sich uns der obere wesentlich aus Dolomit- und Kalkschichten bestehende Theil der Gebirgsmasse als auf einem sanft von NO. nach SW. geneigten Fundament aus krystallinischen Schiefern aufgesetzt dar, wobei die Scheide zwischen den beiden Gesteinsgruppen von 2500 m im Norden sich auf 1500 m im Süden senkt und die Schichten zugleich einander zugeneigt, im Nordflügel nach SW., im Südflügel nach NO. einfallen und gegen die Mitte hin eine flache Mulde bilden.

In Allgemeinen scheinen Schiefer- und Kalkgebirgsschichten in gleichförmiger Lagerung sich an einander anzuschliessen. Sicher nachgewiesen ist dieses Verhältniss zwischen den hangendsten, den krystallinischen Schiefern ähnlich ausgebildeten flasrigen Quarziten und den liegendsten kalkigen Schichten.

Leider geben die im Ortlerstock bis jetzt aufgefundenen spärlichen organischen Ueberreste noch keine zureichende Anhaltspunkte, um das ungemein mächtige Schichtensystem zwischen den sicher nachgewiesen rhätischen Schichten und den flasrigen, weissfleckigen Quarziten, welches man als Ganzes wohl Ortlerkalk und -Dolomit nennen kann, in einzelne Stufen zu gliedern. Nur im Vergleiche mit den gut unterscheidbaren Stufen bei Tarasp und im Ofen-Gebirge sowie nach der Aehnlichkeit in der Gesteinsbeschaffenheit lässt sich vorläufig ungefähr folgende Schichtengliederung, welche mit der bereits 1863 von Theobald für das Bündner Kalkgebirge aufgestellten Reihenfolge nahezu übereinstimmt, vorschlagen:

Lias: Algäuschiefer-ähnliche graue, dunkelfleckige Kalke und Mergelschiefer mit Algenabdrücken und *Belemniten*-Einschlüssen.

Dickbankige graue oder weissliche, stellenweise röthliche, in Karrenfelder auswitternde Kalke (Lias- oder Dachsteinkalk?)

Rhätische Stufe: Versteinerungsreiche, graue, rostig verwitternde Mergel und Kalke.

Ortler Kalk und -Dolomit:

a) Hellgraue, splittrige Dolomite (? Hauptdolomit).
b) Rauhwacke, nur stellenweise entwickelt.
c) Schwarze, dünnbankige, versteinerungsreiche (kleine *Gasteropoden*, *Crinoideen*, *Foraminiferen*) Kalke und Dolomite (? Raibler Stufe).

d) Streifendolomit, graue, weissgestreifte und gefleckte Dolomite und Kalke mit spärlich und undeutlich erhaltenen Versteinerungen (? Wettersteinkalk).

e) Intensiv schwarze, bankartig wohlgeschichtete Dolomite im Wechsel mit tief schwarzem mergeligen Schiefer, welche Fischschuppen und *Ostracoden*-Schälchen enthalten (? Partnachschichten).

f) Grauschwarze, splittrige Dolomite mit weissen Kalkspathadern, voll von kleinen weissen Kalkspathknöllchen und stielartigen Ausscheidungen nach Art der Guttensteiner Schichten.

g) Streifenschiefer, dünngeschichtete, weissgestreifte graue Mergel; zuweilen eine Bank weisslichen Kalks einschliessend.

h) Gyps und Rauhwacke (nur stellenweise vorhanden).

Flaserquarzitschiefer (Stellvertreter des Verrucano und der Werfener Schichten.)

Krystallinische Schiefer: Graue und grüne Phyllite, sericitische Quarzitschiefer und quarzige Augengneisse.

Ursprung der Thermen von Bormio.



Ansicht von den Bädern von Bormio mit dem Mt. Cristallo im Hintergrunde. (Erklärung der Buchstaben im Texte.)

Die heissen Quellen von Bormio treten aus Klüften und Aushöhlungen jenes Dolomites zu Tag, welcher in der eben aufgestellten Schichtenfolge unter f aufgeführt wurde

und unzweifelhaft einer der tiefsten Schichten des Kalkgebirgs nahe der Schiefergrenze angehört.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass diese Quellen sichtlich nicht, wie es so häufig bei warmen Quellen zu beobachten ist, mit einer gewissen Heftigkeit empordringen und aus der Tiefe aufsteigen. Im Gegentheil macht die Art ihres Zutagtretens den Eindruck, als ob sie von oben her sich herabzögen und desshalb auch hoch an dem Bergabhang und nicht im tiefsten Thaleinschnitt ihren Austritt fänden. Dass die einzelnen Quellenergüsse einem gemeinsamen Hauptherde entstammen, dürfte nach der nahe vollständigen Uebereinstimmung in ihrer chemischen Zusammensetzung kaum zu bezweifeln sein.

Was zunächst die in diesen Thermen enthaltenen Salze anbelangt, so scheint nach dem geologischen Bau der Gegend sicher angenommen werden zu dürfen, dass diese Salze den Gyps führenden Schichten (nt. des voranstehenden Profils) entstammen, welche in der nächsten Nähe zwischen dem sericitischen flasrigen Quarzitschiefer und den tiefsten Dolomitschichten sowohl im Uzzathale wie am Südabhang des Mt. della Scala oberhalb Premadio bis zu Tag ausstreichen. Es ist eine stets sich wiederholende Erscheinung, dass mit solchen Gypsablagerungen Ausscheidungen von Stein-, Bitter- und Glaubersalz vergesellschaftet sind. Doch fehlt stellenweise eines oder das andere dieser Begleitsalze oder ist nur spärlich vorhanden.

Letzteres scheint bei den Gypsablagerungen des Ortlerstocks in Bezug auf Steinsalz (Chlornatrium) der Fall zu sein. Es fehlen in dem die Gypslinsen einschliessenden Mergelschiefer dementsprechend auch jene würfelförmigen Eindrücke oder Krystallausfüllungen von Steinsalz, welche sonst so häufig in derartigen Schichten vorzukommen pflegen. Daraus erklärt sich die relative Armuth der Thermen an Chlornatrium gegenüber dem Gehalte an Gyps, Bitter- und

Glaubersalz. Dass auch Kalkbicarbonat in grösserer Menge in dem Quellwasser enthalten ist, erklärt sich leicht aus dem Umstande, dass die Wässer auf weite Strecken durch Kalkgestein ihren unterirdischen Verlauf nehmen. Es ist dieser Gehalt sogar verhältnissmässig klein, was davon herrührt, dass nur geringe Mengen von Kohlensäure zur Verfügung steht, um Kalk in Lösung aufzunehmen. Damit hängt auch die Thatsache zusammen, dass der Sinter, welcher von dem über die Felsen abstürzenden, CO_2-armen Quellwasser gebildet wird, verhältnissmässig viel Kalkcarbonat und nur wenig Gyps neben namhaften Mengen von Bittererdecarbonaten enthält.

Die geringe Beimengung von Eisen- und Mangancarbonat leitet sich von den in der bezeichneten Schichtenregion vorfindlichen gelben Knollen ab, welche neben Kalk- und Bittererdecarbonat auch geringe Mengen jener Carbonate enthalten. Der Gehalt an Arsenik, Antimon, Zinn und Blei möchte von spärlich in den durchflossenen Schichten vorkommenden metallhaltigen Mineralien, namentlich Schwefelmetallen, herrühren.

Die Bedeutung des Fehlens von Schwefelwasserstoff ist bereits vorn hervorgehoben worden. Von den übrigen Bestandtheilen, welche nur in höchst geringen Mengen vorhanden sind, ist keiner, welcher nicht gewöhnlich in solchem Gyps-haltigen Quellwasser vorzukommen pflegt.

Schwieriger ist die Frage nach der Ursache der hohen Temperatur unserer Quellen zu beantworten. Theobald[1]) bringt sie mit dem geologischen Aufbau des Ortlergebirgs in Beziehung und erläutert dies in folgender Weise: „Da die Kalkmulde von dem Stelvio sehr steil einfällt, z. Th. sogar von dem krystallinischen Schiefer überlagert wird, dass diese über sie hingebogen sind, bei Bormio aber ebenfalls an ihr

1) Beit. z. geol. Karte der Schweiz. 3. Lief. 1866 S. 343 u. Bäder von Bormio S. 123.

nördliches Einfallen beobachtet wird, so muss sie sehr tief hinabgreifen. Das Wasser sinkt in den zerklüfteten Dolomit ein bis auf die impermeablen Schiefer, welche unter den Kalkbildungen liegen, und steigt dann von dem südlichen Schenkel der Mulde durch die Klüfte des Dolomits wieder auf. Es ist tief genug hinabgegangen, um eine Erdwärme zu treffen, welche genügt, um es bis zu 39° C. zu erwärmen. Dass es grade an der Stelle erscheint, liegt daran, dass hier eine synclinale Einbiegung in der Richtung der Streichungslinie ist, welche man deutlich beobachten kann und in welcher auch die Schlucht der Adda verläuft, welche aber eine Erosionsschlucht und späteren Ursprungs ist, als die durch die Erhebung des Gebirgs bedingte Biegung der Schichten.“ Theobald leitet demnach die hohe Temperatur der Quellen von der inneren Erdwärme und von dem Umstande ab, dass Tagwässer sehr tief in die Erde eindringen, dort an einer undurchdringlichen Gesteinsschicht sich ansammeln und erwärmen, um alsdann wieder an günstiger Stelle zu Tag aufzusteigen. Woher die Quellen ihren Gehalt an Salzen nehmen, wird hierbei nicht erörtert. Indess kann man von einem solchen Aufsteigen der Thermen aus der Tiefe nichts wahrnehmen; das Quellwasser scheint vielmehr da, wo es zu Tag tritt, eher von der Höhe sich herabzuziehen und zwar, wenn man die Verbreitung der verschiedenen Quellpunkte ins Auge fasst, von dem hohen mächtigen Kalkstock des Mt. Cristallo her. Dazu kommt, dass die geringe Neigung der Kalkschichten am N.- und S.-Rande des Ortlerstocks nicht für eine beträchtig tiefe Einmuldung der Kalklagen spricht; es scheint vielmehr der Kalkstock auf einer schwach nach SW. geneigten und nur gering eingebuchteten Unterlage aufgesetzt zu sein.

Zur Erklärung der hohen Temperatur der Quellen ist aber auch die Annahme einer solchen tief niederziehenden Schichtenbiegung, aus der die Thermen wieder empor zur

Oberfläche gedrückt würden, durchaus nicht erforderlich. Mir scheint es zu genügen, dass unmittelbar neben dem Quellpunkte ein so gewaltiges und hohes Gebirgsmassiv, wie es der Ortlerstock und der nächst benachbarte Mt. Cristallo ist, emporragt. Beträgt doch der Höhenunterschied zwischen Bormio und der Gebirgsausbreitung her mehr als 1500 m! Man darf nun wohl annehmen, dass die innere Erdwärme mit der Erhebung der Erdoberfläche sich, wenn auch nicht in gleichem Maassstabe, wie das Ansteigen selbst, emporzieht und im Innern der Berge beträchtlich sich steigert, so dass selbst die auf den Höhen von ewigem Schnee und Eis umstarrten Gebirgsmassen im Innern hohe Temperaturen beherbergen können. Dies darf wohl als Grund auch im Ortlerstock angenommen werden. Die Geoisothermen steigen auch hier in der Bergmasse mit deren Erhebung so beträchtlich in die Höhe, dass dies genügt, um selbst Gletscherschmelzwasser, welche auf Spalten des Dolomits in die Tiefe eindringen, hochgradig zu erwärmen.

Ich stelle mir vor, dass auf den Höhen des Mt. Cristallo solches Schmelzwasser durch das klüftige Gestein bis zu dem aus dichtgeschlossenem Schiefer bestehenden Fundament des Kalkstocks niedersinkt, hier die in dieser Tiefe herrschende Temperatur annimmt, zugleich auch aus den in diesen Regionen vorkommenden Gypsablagerungen, wie wir sie am Gebirgsabbruch in der Uzza-Schlucht kennen gelernt haben, mit dem Gyps vergesellschaftete Mineralsalze in Lösung nimmt und sodann an der Stelle als gehaltreiche Therme zu Tag tritt, wo die Grenzfläche zwischen Schiefer und Kalkgebirgsschichten an einem tiefsten Punkte von der Erdoberfläche angeschnitten wird. Dies findet nun augenscheinlich in dem tiefsten Einschnitt der Morena da statt, wo dieser von dem Stilfser Joch herziehend zwischen dem Stock des Mt. Cristallo und Mt. della Scala vertieft ist und von der Verebnung oberhalb Bormio geschnitten wird. An dem

niedrigsten Punkte dieser sich kreuzenden Linien finden die bis dahin unterirdisch circulirenden Gewässer den geringsten Widerstand, der ihrem Austritt zur Tagesoberfläche entgegensteht und hier an dem Felsenabbruch des alten Bades ist es, wo sie dann aus den Klüften des Dolomites als Thermen hervorquellen.

So wenig wahrscheinlich es auch für den ersten Augenblick sich darstellen mag, dass so hochgradig warme Quellen, wie es die Thermen von Bormio sind, ihren Ursprung eiskaltem Schmelzwasser sollten zu verdanken haben, so leicht begreiflich wird diese Annahme, wenn man sich die geologische Constitution der hier herrschenden Gesteinsbildungen und die eigenthümlichen Oberflächenverhältnisse eines fast senkrecht bis gegen 2000 m aufsteigenden Gebirgsmassiv ins Auge fasst. Bestätigt wird diese Annahme überdies noch durch die Wahrnehmung, dass in Jahreszeiten lang andauernder Kälte, während welcher kein Schmelzwasser erzeugt wird, die Ergiebigkeit namentlich der Martinsquelle als eine der höchstgelegenen beträchtlich nachlässt. Es wird gesagt, dass diese Quelle schon auf kurze Zeit ganz ausgeblieben sei, dann aber bei Beginn der Schneeschmelze wieder zu fliessen begonnen habe.

Das eingehende Studium der Quellenverhältnisse von Bormio hat mich nunmehr zur Ansicht geführt, es sei auch für die Thermen von Gastein wahrscheinlich, dass einfach durch ein Niedersinken von Schmelzwasser auf den benachbarten höchsten Gebirgstheilen der Taurenkette in das Innere des Gebirgsmassivs bis auf das Niveau von Gastein genügt, um dem Wasser den hohen Wärmegrad zu ertheilen, mit dem es zu Gastein gleichfalls ohne irgend beträchtlichen Druck wahrnehmen zu lassen, zu Tage tritt.[1])

1) v. Gümbel, Geolog. Bemerk. ü. d. warmen Quellen von Gastein im Sitz. d. bayer. Acad. d. Wiss. math.-phys. Classe 1889. XIX. S. 407.

Ueber die Umbildung der Lieberkühn'schen Drüsen durch die Solitärfollikel im Wurmfortsatz des Menschen.

Von N. Rüdinger.

(Mit Tafel V.)

(Eingelaufen 15. Juni.)

In den letzten Jahren hatte ich Gelegenheit die Wurmfortsätze von fünf Enthaupteten bald nach dem Tode herausnehmen und in geeigneter Weise conserviren zu können. Die Individuen, denen die Wurmfortsätze entnommen wurden, sind in den Sektionsprotokollen als gesunde kräftige Männer, in den mittleren Lebensjahren stehend, bezeichnet.

Der Magen, der Dünn- und Dickdarm zeigten sich bei denselben von normaler Beschaffenheit und bei drei der Enthaupteten konnte constatirt werden, dass die Dünndarmverdauung eingetreten war.

Die Wände des Duodenum und des Jejunum zeigten sich etwas geröthet, das Darmrohr mässig stark ausgedehnt und etwas geschwellt. Bei der Eröffnung des Leerdarmes floss der braungelbe Inhalt aus und die Oberfläche der Mucosa war mit zähem Schleim belegt. Der Wurmfortsatz wurde entweder dicht am Coecum abgetragen oder in Verbindung mit einem Stück des letzteren herausgenommen, theils in Müller'scher Flüssigkeit, theils in Picrin-Salpetersäure und einzelne Stücke auch in Alkohol conservirt. Bei einem

der Enthaupteten konnten sechs noch lebende Spulwürmer aus dem Ileum entfernt werden und später zeigte sich, dass der Inhalt des Processus vermiformis bei diesem Manne von den Eiern des genannten Thieres ganz durchsetzt war. Die Stücke des Darmes, bei welchen die Picrin-Salpetersäure zur Conservirung Verwendung fand, waren fast alle unbrauchbar, weil eine starke Schrumpfung des Objektes und Loslösung des Drüsen- und Darmepithels eingetreten war und kamen daher diese in Picrin-Salpetersäure conservirten Präparate bei Beurtheilung der Untersuchungs-Ergebnisse am Wurmfortsatze nicht in Betracht.

1) Die lymphoiden Zellen im Wurmfortsatz.

Jene Forscher, welche sich mit der Schleimhaut des Darmkanales beschäftigt haben, wissen, dass die Solitärfollikel im Dünn- und Dickdarm in Grösse und Zahl einem hochgradigen Wechsel unterliegen und wurde von Hofmeister ganz besonders darauf hingewiesen, dass das adenoide Gewebe d. h. die Lymphzellen in demselben bei Hungerthieren spärlicher sei, als bei gut genährten. Aber auch die Gesammternährung sei von Einfluss auf die Zahl von Wanderzellen in der Darmschleimhaut. Selbst unter ganz normalen Verhältnissen sind in dem einen Falle makroskopisch gar keine Follikel an der freien Schleimhautfläche des Darmes sichtbar, während in einem anderen die Schleimhaut des ganzen Darms mit kleinen runden Erhöhungen reich besetzt ist. Zuweilen sieht man an der Stelle, wo die Follikel angebracht sind, kleine Einsenkungen, die man an den Mandeln und der Zungenwurzel ebenso, wie im Colon und Rectum beobachtet. Diese Buchten, die Krypten, stellen Einsenkungen der Schleimhaut an der Stelle der Follikel dar, die man jedoch im Wurmfortsatz des Menschen ganz vermisst. Hier trifft man den Follikel in gleicher Ebene mit jener Schleimhautfläche, die nur Lieberkühn'sche Drüsen einschliesst.

Der ständige Wechsel der lymphoiden Zellen in der Schleimhaut des Darmes verlor von dem Augenblick an das Räthselhafte, als die schönen Forschungen von **Stöhr** den Nachweis erbracht hatten, dass die Leucocyten an den Mandeln und den Balgdrüsen der Zungenwurzel zwischen den Plattenepithelschichten durchwandern und sich der aufgenommenen Nahrung beimischen. Ist auch die Rolle, welche die Leucocyten spielen, gleichviel wo dieselben in den Tractus intestinalis einwandern, zur Zeit nicht klar gestellt, so muss man doch apriori annehmen, dass die Einwanderung insbesondere an jenen Darmabschnitten, wo dieselben in das Lumen massenhaft stattfindet, nicht von untergeordneter Bedeutung ist.

Die folgenden Mittheilungen über die Ergebnisse der Untersuchungen am Processus vermiformis des Menschen dürften geeignet erscheinen, unsere bisherigen Kenntnisse über die Bedeutung der lymphoiden Substanz in der Schleimhaut des Darmes in einigen Beziehungen zu erweitern und die der neuesten Zeit angehörigen Forschungsresultate über die Wanderzellen im Darm theils zu bestätigen und theils zu ergänzen.

Schon W. **His** sprach in seiner eingehenden Abhandlung über den Bau der Peyer'schen Drüsen den Satz aus, dass an jenen Stellen der Schleimhaut des Darmes, wo die Lieberkühn'schen Drüsen vorhanden seien, die adenoide Substanz zurücktrete und umgekehrt. Auf keinen Abschnitt des Tractus intestinalis ist dieser Ausspruch so anwendbar, als auf den Processus vermiformis, welcher jedoch bei den fünf untersuchten Individuen sich auch fünf Mal histologisch verschieden zeigte, eine Thatsache, welche doch nur dahin zu deuten ist, dass die Wurmfortsätze in den verschiedenen Stadien ihrer Funktion, in welchen sie sich im Moment der Enthauptung befanden, zur Conservirung kamen.

Wenn ich auch zunächst darauf hinweisen muss, dass

sowohl die einzelnen Solitärfollikel, als auch die Gruppen der Follikel nicht gleichmässig in der Schleimhaut des Wurmfortsatzes vertheilt sind, sondern um so vermehrter auftreten, als man sich dem blinden Ende desselben nähert, so ergaben doch die Schnitte des Wurmfortsatzes von verschiedenen Individuen, welche annähernd an übereinstimmenden Stellen desselben gewonnen sind, dass in dem Verhalten und der Zahl der lymphoiden Zellengruppen einerseits und der Anordnung der Lieberkühn'scken Drüsen andererseits ziemlich grosse Verschiedenheiten bestehen.

Während die Schleimhaut eines Querschnittes von dem Wurmfortsatz des Individuums A in ihrer grössten Ausdehnung keine Lieberkühn'schen Drüsen besitzt und fast nur von lymphoider Substanz durchsetzt ist, zeigt der Querschnitt von dem Processus vermiformis des Mannes B in der Schleimhaut fast ausschliesslich Lieberkühn'sche Drüsen. Wo die solitären Follikel in der Schleimhaut des Wurmfortsatzes auftreten, fehlen die Lieberkühn'schen Drüsen und wo diese in voller Ausbildung vorhanden sind, vermisst man die Follikel. Beschränken sich die Follikel auf die subglanduläre Zone der Schleimhaut, so dass sie noch ausserhalb der Muscularis mucosae sich befinden, dann stehen die Lieberkühn'schen Drüsen ohne Unterbrechung ziemlich dicht gedrängt nebeneinander, theils von gleicher, theils von ungleicher Grösse.

Diese Thatsache allein drängt nothwendig zu der Fragestellung, wodurch dieses anatomisch-verschiedene Verhalten der Schleimhaut bedingt sein könne. Dieser Wechsel der Gebilde muss unzweifelhaft in einem Zusammenhang stehen mit der Ruhe und der Thätigkeit der Schleimhaut in den verschiedenen Stadien der Funktion im Dickdarm resp. im Wurmfortsatz!

Nach den bisherigen Ergebnissen meiner Untersuchungen, die ich am Wurmfortsatze gewinnen konnte, muss ich die erste

Entstehung der Follikel in die Submucosa, d. h. in die subglanduläre Zone der Schleimhaut verlegen und von hier aus rücken dieselben, sich vergrössernd, gegen die Muscularis mucosae vor, deren Bündel so auseinander gedrängt werden, dass man zuweilen den Eindruck empfängt, als sei dieselbe an der Follikelstelle ganz zu Grunde gegangen. An dünnen Schnitten kann man jedoch nachweisen, dass die einzelnen kontraktilen Faserzellen nur auseinander gezerrt sind und an verschiedenen Stellen des lymphoiden Zellenhaufens aufgefunden werden können. Schon seit langer Zeit weiss man, dass auch das reticuläre Bindegewebe der Schleimhaut von Wanderzellen in wechselnder Zahl reich durchsetzt ist; allein ein Follikel zeigt Eigenthümlichkeiten, welche zunächst darin bestehen, dass ein helles Keimcentrum und eine dichte Rindenzone nicht ganz scharf von einander abgegrenzt auftreten, während die Einlagerung der Leucocyten in das reticuläre Gewebe der Schleimhaut, abgesehen von der Zahl derselben, keinerlei Verschiedenheiten darbietet.

Ist der lymphoide Follikel so gross geworden, dass er mit seiner gegen die Schleimhaut gerichteten peripheren Zone, welche nie eine scharfe Abgrenzung zeigt, die Muscularis mucosae überschritten hat, so tritt er mit den blinden Enden der Lieberkühn'schen Drüsen in Contakt. Diese Drüsen werden an einzelnen Stellen in Folge der raschen Vergrösserung und des Vorrückens der Follikel gegen die Schleimhautoberfläche auseinander gedrängt, so dass sie eine schiefe Stellung zu dem mehr oder weniger konisch geformten Follikel annehmen. Allein die Regel ist diese Beziehung der Lieberkühn'schen Drüsen zum Follikel nicht. Viel häufiger kann man die Beobachtung machen, dass die Stellung der Lieberkühn'schen Drüsen in der Schleimhaut eine ganz normale bleibt, d. h. eine zur Schleimhautfläche mehr oder weniger rechtwinkelige. Die Abstände der Lieberkühn'schen Drüsen zu einander ändern sich bei dem Vorrücken des Fol-

likels nicht im geringsten. Würden die Lieberkühn'schen Drüsen bei der Vergrösserung eines Follikels verdrängt, so müssten dieselben dort, wo der lymphoide Zellenhaufen eine Vergrösserung erfährt, dichter zusammenrücken, was aber durchaus nicht der Fall ist.

Man kann ganze Schnittreihen untersuchen, ohne eine Aenderung in der Stellung der Lieberkühn'schen Drüsen zu einander wahrzunehmen.

Ein Vergleich der Schnitte von den Wurmfortsätzen der verschiedenen Individuen ergibt ganz überraschende Resultate. An der einen Schnittreihe von einem Individuum A lässt sich nachweisen, dass die Lieberkühn'schen Drüsen, wie Palissaden neben einander stehend, die Schleimhaut fast des ganzen Umfangs des Processus vermiformis erfüllen (Fig. I), während sich an einer anderen Schnittserie von einem Individuum B in gleicher Ausdehnung in der Schleimhaut nur drei oder vier Lieberkühn'sche Drüsen zählen lassen. (Fig. II.)

Fassen wir vorerst noch den gegen die freie Schleimhautfläche vorrückenden Leucocytenhaufen in's Auge, so sieht man, dass er in dem Verhältniss, als durch ihn das Epithel der Schleimhaut vorgewölbt wird, ihre Cylinderzellen umformt, indem aus diesen platte Zellen hervorgehen, die schliesslich wie ein einschichtiges Plattenepithel, den Solitärfollikel gegen das Darmlumen abgrenzen. Die Cylinderzellen und auch ihre Kerne werden so abgeplattet, dass der grösste Durchmesser der letzteren der Schleimhautfläche parallel steht.

Unzweifelhaft ist diese Umformung der Cylinderzellen zunächst das Resultat der mechanischen Einwirkung des sich vergrössernden lymphoiden Zellenhaufens, welcher die Schleimhaut hügelig nach dem Darmlumen vorwölbt. Die Verdünnung der Epithelzellen erreicht allmählig, wie dies schon von anderen Autoren hervorgehoben wurde, einen so hohen Grad, dass die Kittsubstanz zwischen denselben oder die Zellenplatten selbst zerreissen und dem Follikelinhalt den Eintritt

in das Darmrohr gestatten und dem Darminhalt sich beimischen kann. Für die Feststellung dieses Vorganges mag kein Darmabschnitt geeigneter sein, als der Processus vermiformis des Menschen, bei welchem während der Untersuchung der Inhalt unversehrt in Contakt mit der Schleimhautfläche bleibt und das ganze Objekt, gleichviel ob dasselbe im gefüllten oder leeren Zustande, resp. in der Funktion oder in der Ruhe sich befindet, klar übersehen werden kann.

Ist der Wurmfortsatz gefüllt, so erkennt man in dem Inhalt desselben langgestreckte Züge und Nester von intensiv gefärbten Kernen, welche sich von den Kernen der Follikel nur dadurch unterscheiden, dass dieselben von ungleicher Grösse sind, im Uebrigen sich aber nicht unterscheiden von den Kernen der lymphoiden Zellen des Schleimhautfollikels. Einzelne Schnitte lassen sogar den direkten Zusammenhang der Kerne im Darminhalt mit den Kernen des Follikels erkennen.

Nach Allem, was das Studium der Schnittserien von den Wurmfortsätzen ergab, muss man zu der Ueberzeugung kommen, dass das Epithel der Schleimhaut an der Stelle, wo der Lymphfollikel vorrückt, zunächst umgeformt und verdünnt, dann durchbrochen wird, um den Follikelinhalt zu dem Darminhalt gelangen zu lassen.

Demnach treten die Leucocyten der Darmschleimhaut nicht nur, wie Stöhr nachwies, zwischen den Plattenepithelien hindurch, um sich der Nahrung beizumengen, sondern dieselben wandern auch von den solitären Follikeln und den Peyer'schen Follikelhaufen massenweise in das Darmrohr ein, um eine funktionelle Rolle im Darminhalt zu spielen. Den von Stöhr beschriebenen Durchtritt der Leucocyten habe ich zwischen den Cylinderzellen der Darmschleimhaut, im Wurmfortsatz des Menschen, und auch in der Eustachi'schen Röhre und in der Gallenblase unzweifelhaft gesehen, möchte jedoch auf Grund der Ergebnisse am Pro-

cessus vermiformis annehmen, dass dieselben eine endgiltige Rolle im Darminhalt spielen. Nicht eine einzige Thatsache ist mir bei diesen Untersuchungen entgegengetreten, die ich dahin verwerthen könnte, dass eine Rückkehr der einmal in das Darmlumen gelangten Kerne der Leucocyten in die Schleimhaut, denn nur Kerne allein kann ich im Darmrohr wahrnehmen, stattfindet. — Lymphoide Zellen oder nur deren Kerne gelangen nicht nur zwischen den Cylinderepithelien, sondern auch nach Verdünnung und Zerreissung des Epithels an den solitären Follikeln und den Follikelgruppen in das Lumen des Wurmfortsatzes zu dessen Inhalt. Dass der Wurmfortsatz immer mit einem feinkörnigen oder einem graugelben Sekret erfüllt ist, geht aus den Untersuchungen der fünf Präparate klar hervor. In dem einen Falle war der Inhalt ganz durchsetzt mit den Eiern von Ascaris lumbricoides, welcher bei der Sektion aus dem Dünndarm genommen wurde.

2) Die Einwirkung der lymphoiden Zellen auf die Lieberkühn'schen Drüsen.

Bei den Musterungen der Schnittserien des Wurmfortsatzes an den fünf Individuen, deren Darm in den verschiedenen Stadien der Verdauung bei der Conservirung sich befand, beobachtete ich ein eigenartiges Verhalten der Lieberkühn'schen Drüsen zu jenen Stellen, wo ein Solitärfollikel oder eine Follikelgruppe gegen die Lieberkühn'schen Drüsen vorrückt. Im ersten Augenblick musste man an verschiedene Möglichkeiten, welche diese immer wiederkehrenden Bilder in der Schleimhaut zu Stande bringen, denken und man konnte zunächst annehmen, dass, wenn man die blinden Enden der Lieberkühn'schen Drüsen bei verschiedenartiger Schnittführung zur Anschauung bringt, die Zellengruppen derselben ohne Lumen und ohne regelmässige Anordnung sich zeigen. Allein bald musste ich die Ueberzeugung gewinnen, dass in

der Umgebung eines sich vergrössernden und vorrückenden Follikels an den Lieberkühn'schen Drüsen sich Veränderungen einstellen, die konstant sind und nur auf Umwandlungen des gesammten Zellenmaterials der Drüsen zurückgeführt werden können.

Diese Veränderungen, welche die Wanderzellen in der Schleimhaut an dem Wurmfortsatze zu Stande bringen, sind folgende: Sobald ein Follikel aus der subglandulären Zone herausgetreten und die Muscularis mucosae überschritten hat, gelangt er mit den blinden Enden der Lieberkühn'schen Drüsen in Contakt und bevor dies geschehen ist, sieht man an der Seite der Lieberkühn'schen Drüsen, welche dem Follikel zunächst steht, einzelne Leucocyten vorrücken und ich kann nicht mehr daran zweifeln, dass dieselben durch die Tunica propria hindurchgehen und zwischen den Cylinderzellen der Drüse eindringen. Die wichtigste Erscheinung aber besteht während der Annäherung des Follikels an eine Lieberkühn'sche Drüse darin, dass die Zellen derselben sich lockern und eine unregelmässige Stellung zu einander und zur Tunica propria annehmen. Jene regelmässige Anordnung, wie sie sich an den Zellen und den Kernen der unveränderten Drüse vorfindet, geht rasch verloren und man empfängt den Eindruck, als löse sich die Kittsubstanz der Zellen auf und würden diese von der Tunica propria losgelöst. An jener Seite der Drüse, wo der Follikel diese Veränderung zu Stande bringt, ändert sich auch das Lumen des Ausführungsganges derselben, während er an der gegenüberstehenden Seite immer noch seine scharfe regelmässige Beschaffenheit beibehalten hat. In diesem Stadium der Veränderung scheint noch eine andere Erscheinung wichtig zu sein. Wenn nämlich die Doppelfärbung zur Anwendung kam, so dass das Protoplasma der Cylinderzellen roth und der Kerne blaugefärbt erschien, so konnte man wahrnehmen, dass an jener Seite der Drüse, wo die Veränderung in der Form und Stellung der Cylinder-

zellen eingetreten ist, die rothe Farbe, resp. das Protoplasma mehr und mehr schwindet, während an der entgegengesetzten Umrandung der Drüse die rothe Färbung des Drüseninhalts, in welchen die blauen Kerne auffallend durchschimmern, erhalten ist. Neben der Aenderung der Form und der Stellung der Cylinderzellen zueinander und zur scharf begrenzten, kernhaltigen Tunica propria der Drüse geht die Zellenmembran und das Protoplasma der Cylinderzellen zu Grunde, denn die Zelle wird kleiner und die specifische Farbenreaction bleibt an der formell geänderten Zellenreihe vollständig aus. Die blau gefärbten Zellenkerne, wenn auch in unregelmässiger Anordnung, sind jetzt um so deutlicher geworden. Sehr bald erkennt man auch keine Tunica propria der Drüse, die sehr charakteristisch und deutlich war, und in dem Verhältniss, als der solitäre Follikel sich vergrössert, wird die Lieberkühnsche Drüse in ihrem ganzen Umfange in den beschriebenen Kreis der Veränderung gezogen: ihr Lumen schwindet allmählich gänzlich, die Tunica propria ist gar nicht mehr zu erkennen und an der Stelle, wo die Drüse war, ist jetzt ein Nest von blau gefärbten Kernen aufgetreten. Dieselben beschränken sich anfänglich noch auf die Stelle, wo die Drüse war und schliesslich schwindet auch diese Begrenzung, so dass die Lieberkühn'sche Drüse ganz und gar den Charakter des Solitärfollikels angenommen hat und auf dem Querschnitt nur die helle centrale Parthie des Follikels, das Keimcentrum, mit dem dunklen dichten Hof vorhanden ist. (Fig. II.) Diese Veränderungen der Drüsen schreiten von ihren blinden Enden gegen die freie Schleimhautfläche hin fort und an der Stelle der Lieberkühn'schen Drüsen befinden sich nur noch lymphoide Zellen, an welchen das Protoplasma eine kaum sichtbare Schichte um den Kern herum bildet. Selbst bei Anwendung starker Vergrösserungen erhält man den Eindruck, als seien in dem Solitärfollikel, wenn derselbe die Schleimhautoberfläche

erreicht hat, nur Kerne ohne Protoplasma und ohne Zellenmembran vorhanden. Beim Zerfall der Leucocyten in dem Darminhalt sind zweifellos nur Kerne und die Bruchstücke derselben sichtbar.

Nachdem ich auf diesen beschriebenen Vorgang, der sich an den Lieberkühn'schen Drüsen abspielt, aufmerksam geworden war, prüfte ich an der grossen Zahl der Schnittserien, welche von den Wurmfortsätzen gewonnen wurden, nur diese Veränderungen der Lieberkühn'schen Drüsen durch die Einwirkung der Solitärfollikel auf dieselben und musste endlich zu der Ueberzeugung gelangen, dass in der Schleimhaut des Wurmfortsatzes ein Vorgang sich abspielt, der als ein regelmässig wiederkehrender und wahrscheinlich rasch sich vollziehender anzusehen ist.

An diese Vorgänge in der Mucosa des Darmes reihen sich eine Anzahl von Fragen, die der Beantwortung noch entgegensehen.

Obschon ich oben hervorhob, dass ich auf Grund meiner Untersuchungsergebnisse am Wurmfortsatz die Anschauung gewonnen hätte, dass die Quelle für die Leucocyten in dem Stratum submucosum zu suchen sei, bin ich nicht in der Lage, hierüber eine bestimmte Meinung auszusprechen. Herr v. Davidoff, ein sehr vorzüglicher Forscher, hat bei seinen Studien am Wurmfortsatz des Kaninchens die Beobachtung gemacht, dass sich an den Kernen der Cylinderzellen im Wurmfortsatz ein eigenartiger Theilungsprocess vollzieht, den der Autor für die Entstehung der Wanderzellen verwerthet. Obschon sich die Angaben von v. Davidoff, auf sorgfältige Beobachtungen stützen, indem derselbe die Theilungsvorgänge und die Wanderung der aus denselben hervorgegangenen Kerne unzweifelhaft so gesehen hat, wie man dieselben auch in den Zellen der Lieberkühn'schen Drüsen des menschlichen Wurmfortsatzes wahrnehmen kann, wird es sich schliesslich nur um die Deutung dieser Ergebnisse handeln.

Ich sah in den Cylinderzellen der Lieberkühn'schen Drüsen vielfach Kerne derselben, welche gegen die dem Lumen der Drüse zugekehrte Abtheilung der Zelle vorrücken und finde in einer und derselben Ebene, ganz dicht nebeneinander, zwei Kerne auftreten, die kaum anders als Kerntheilung ohne Mitose gedeutet werden können. Diese Kerne vergrössern sich und wandern auch bis in das Drüsenlumen, in welchem man ihnen, wenn auch nicht sehr häufig, auf Querschnitten der Drüsen begegnet. Seltener sieht man diese Kerne gegen die Basalmembran der Drüse vorrücken und glaube ich auch nicht, dass sie diese Richtung regelmässig einschlagen, was doch geschehen müsste, wenn dieselben zu den Wanderzellen der Follikel werden sollten. Ich vermuthe vielmehr, dass, wenn die Lieberkühn'schen Drüsen durch die Einwirkung der Follikelelemente umgewandelt sind, eine Neubildung derselben, welche a priori angenommen werden muss, durch Theilung der noch erhaltenen Drüsenzellen stattfindet. Man sieht nämlich an einzelnen Stellen gabelig getheilte Lieberkühn'sche Drüsen in grösserer Zahl auftreten, während die meisten Drüsen durchschnittlich einfach geformte Cylinder sind. Zwei, drei und selbst vierfache Theilungen der Lieberkühn'schen Drüsen, wie man sie z. B. im Dickdarm des Hundes beobachtet, sind im Processus vermiformis und auch im Dickdarm des Menschen grosse Seltenheiten. Aber an einzelnen Objekten begegne ich dieser Verdopplung der Drüsen in so grosser Zahl, dass ich eine totale Theilung derselben vermuthe nach jenem Verdauungsstadium, bei welchem die Drüsen zu Leucocythenhaufen umgewandelt wurden. Wäre diese Theilung der Drüse als ein regelmässiger Vorgang nachgewiesen, so würden die Beobachtungen von v. Davidoff meiner Meinung nach auch dahin gedeutet werden können, dass die Vermehrung der Kerne in den Cylinderzellen der Schleimhaut dann erforderlich ist, wenn beim Follikeldurchbruch eine

grosse Anzahl derselben zu Grunde gegangen und eine Zellenvermehrung als Wiederersatz für die Schleimhaut und die Drüsen stattfinden muss. Die Abbildung Fig. 14 Taf. 31 in der Arbeit von v. Davidoff lässt doch vermuthen, dass ein beginnender Durchbruch der Schleimhaut und Einwanderung der Leucocyten in dem Wurmfortsatz auch beim Kaninchen vorkömmt. Es fragt sich, ob man das Bild, welches in der Fig. 13 und 14 Ez und Iz bei v. Davidoff von einem Follikel des Kaninchen dargestellt ist, nicht in dem Sinne deuten kann, wie ich es für die Lieberkühn'schen Drüsen gethan habe. An den erwähnten Figuren empfängt man ganz und gar den Eindruck, als finde die Umwandlung der Cylinderepithelien der Darmschleimhaut ebenso statt, wie jene der Lieberkühn'schen Drüsen. Die sogen. intermediäre Zone v. Davidoff's möchte ich so deuten, dass die Stelle, wo die Cylinderepithelien eine Veränderung erfahren, die Kerne derselben frei geworden und sich der Leucocytengruppe beigesellt haben. Zwischen der intermediären Zone und dem Follikel besteht, wie schon v. Davidoff angibt, gar keine scharfe Grenze und bei einem noch weiter vorgeschrittenen Stadium der Ausbildung des Follikels dürfte auch jene Grenze zwischen der mittleren und epithelen Zone schwinden; denn die Zellen sind schon an ihren Verbindungen mit der Basalmembran grösstentheils in den Kreis der Veränderung hineingezogen und die Basalmembran der Schleimhaut ist, meiner Meinung nach, durch das Vorrücken des Follikels, zu Grunde gegangen.

Mir scheint in der That mehr Berechtigung vorhanden zu sein, diese Epithelveränderung der Schleimhaut, welche v. Davidoff nachgewiesen und beschrieben hat, als eine Umwandlung der Cylinderepithelien in der oben besprochenen Weise aufzufassen. v. Davidoff hat auch schon auf die Veränderung der Epithelien des Wurmfortsatzes beim Kaninchen aufmerksam gemacht, dieselbe, von der Tiefe der

Schleimhaut aus nach der freien Oberfläche fortschreitend, beschrieben und in seiner Figur 13 abgebildet. Hier erscheint doch der Vorgang der Art, dass man viel eher die Veränderungen des Epithels, durch den vorrückenden Follikel bedingt, von der Tiefe nach dem Lumen des Darmrohres hin fortschreitend, ableiten möchte, als ein umgekehrtes Verhältniss annehmen. Wenn auch die Bildungsstätte für die Leucocyten nach der Anschauung v. Davidoffs in die Epithelzellen der Schleimhaut verlegt wird, so kann doch die Thatsache nicht geleugnet werden, dass der Inhalt der Follikel, wenn dieser eine gewisse Grösse, resp. eine bestimmte Reife erlangt hat, in das Darmrohr einwandert. Ferner darf auch an die Möglichkeit gedacht werden, dass die Kerntheilung in den Epithelzellen der Schleimhaut sowohl, als auch in den Lieberkühn'schen Drüsen als Einleitung der Zelltheilung stattfindet, um das zu Grunde gegangene Drüsen- oder Schleimhaut-Epithel wieder zu ersetzen. Eine Neubildung der Lieberkühn'schen Drüsen von dem Epithel der noch vorhandenen Drüsen oder von der Schleimhaut aus, ganz ebenso wie das letztere bei der erstmaligen Entwicklung zu Stande kam, muss doch als einzige Möglichkeit festgehalten werden. Für eine andere Art des Wiederersatzes der Lieberkühn'schen Drüsen spricht keine einzige Thatsache an den mir vorliegenden Objekten.

Doch muss ich noch auf eine Eigenthümlichkeit in dem Verhalten der Lieberkühn'schen Drüsen hinweisen, für die ich ebensowenig, wie für die erwähnte Neubildung eine Erklärung geben kann. In der Figur 8 der Tafel V sind Querschnitte der Drüsen gezeichnet, welche eine sehr verschiedene Grösse zeigen. An einzelnen Stellen der Schleimhaut, insbesondere dort, wo ein Leucocytenhaufen vorhanden war, begegnet man sehr kleinen Lieberkühn'schen Drüsen, an welchen ich am Querschnitt einen Kranz von 15—18 Cylinderzellen zählen konnte, während ich an grossen Drüsen

40—48 Cylinderzellen annähernd festzustellen im Stande war. Indem man im ersten Augenblick diese kleinen Lieberkühn'schen Drüsen für neu gebildete ansehen möchte, konnte ich über ihre Herkunft keinen Aufschluss erlangen. An keinem einzigen Präparat der Wurmfortsätze konnte ich Längsschnitte dieser Drüsen zur Anschauung bringen und bleibt mir daher ihre Abstammung und ihre Deutung unklar.

Ich zweifle nicht daran, dass wenn man eine genügend grosse Zahl von menschlichen Wurmfortsätzen gut conservirt zur Verfügung hätte, und, was ich besonders betonen möchte, lückenlose Serien von Querdurchschnitten herstellt, alle die berührten Fragen beantwortet werden könnten. Nach meinem Dafürhalten stellt der Wurmfortsatz ein besonders geeignetes Gebilde für das Studium aller Vorgänge, welche sich in dessen Schleimhaut bei den verschiedenen Verdauungsstadien abspielen, desshalb dar, weil derselbe mit seinem Inhalt unversehrt zur Conservirung und Untersuchung gelangen kann.

Beschreibung der Figuren auf Tafel V.

Figura I. Darstellung eines Abschnittes der Schleimhaut des Wurmfortsatzes vom Menschen, an welchem die Lieberkühn'schen Drüsen dicht gedrängt vorhanden sind. Der ganze Querschnitt des Processus vermiformis, von dem die Abbildung gewonnen wurde, lässt nur vier solitäre Follikel erkennen, während zwischen denselben eine grosse Zahl der Lieberkühn'schen Drüsen erhalten ist. Diese zeigen ganz normale Abstände voneinander.

Fig. II. Diese Figur ist einem Querschnitt eines Wurmfortsatzes entnommen, an welchem nur sehr wenige Lieberkühn'sche Drüsen sichtbar erscheinen. Die einzelnen noch erhaltenen Drüsendurchschnitte treten nur in der Nähe der Schleimhaut auf. Die Follikel 1., 2. und 3. erscheinen lang gestreckt und das helle Keimcentrum zeigt dieselbe längliche Form, wie der ganze Follikel. 4. Schiefe Abschnitte von drei Lieberkühn'schen Drüsen. 5. Eine lange Drüse, welche von zwei Follikeln umschlossen ist.

Fig. III. Querschnitt von einem Processus vermiformis, an welchem alle Schichten von der Muscularis propria bis zur freien Schleimhautfläche aufgenommen sind.

1. Muscularis propria des Processus vermiformis.

2. Submucosa, in welcher ein sich entwickelnder Follikel eingeschlossen ist. Derselbe befindet sich noch ausserhalb der Muscularis mucosae, welche sich bei normalem Verhalten die Mucosa von der Submucosa abgrenzt.

4. Die Lieberkühn'schen Drüsen grösstentheils quer durchschnitten

5. Freie Schleimhautfläche mit dem Cylinderepithel überkleidet.

6. Solitärer Follikel mit einem hellen Keimcentrum.

Fig. IV. Solitärfollikel bis zum Epithel der Schleimhaut vorgerückt.

1 Die Leucocyten erfüllen dichtgedrängt den ganzen Follikel und reichen bis zur Schleimhaut (2).

3. Umformung des Epithels der Schleimhaut zu einer niedrigen Zellenschichte, welche oben und unten in der Abbildung noch mit dem bekannten hohen Cylinderepithel der Schleimhaut kontinuirlich zusammenhängt.

4. Vereinzelt auftretende Lieberkühn'sche Drüsen.

5. Die an der Grenze des Follikels befindlichen Lieberkühn'schen Drüsen sind in der Umwandlung begriffen. Das Lumen an derselben ist nicht mehr sichtbar, obschon die Stelle, wo die Drüse war, noch scharfe Begrenzung zeigt.

Fig. V. Solitärfollikel, welcher auf die an ihn angrenzenden Lieberkühn'schen Drüsen verändernd einwirkt.

1. Lieberkühn'sche Drüsenquerschnitte, deren Beschaffenheit eine normale ist. Nur an einzelnen Stellen sind zwischen den Cylinderzellen wandernde Leucocyten sichtbar.

2. Reticuläre Bindesubstanz der Schleimhaut mit Kernen und spärlich eingelagerten Wanderzellen.

3. Solitärfollikel in der Vergrösserung begriffen.

4. An den Querschnitten der drei kleineren Lieberkühn'schen Drüsen sieht man, dass sich Veränderungen vollziehen, welche zunächst durch Lockerung der Drüsenzellen auffallen. Insbesondere ändert sich die Lage der Kerne in den Zellen an der dem Follikel zugewendeten Seite.

Fig. VI. Erste Figur links. 1. Querschnitt der Lieberkühn'schen Drüse, an welcher das Protoplasma der Cylinderzellen roth und die Kerne blau gefärbt sind.

2. Kerne der Tunica propria. Dieselben sind an der einen Drüsenabtheilung, an der die Kerne der Cylinderzellen ihre regelmässige Anordnung verloren haben, schon geschwunden.

3. Leucocyten in grösserer Zahl zwischen den Drüsenzellen vorgedrungen.

Fig. VI. Erste Figur links unten. Lieberkühn'sche Drüse, an welcher (1) die Kerne der Tunica propria erhalten sind, die Zellen (2) der Drüse von derselben losgelöst und bei der Zahl 3 eine unbestimmte Gruppe von Kernen aufgetreten ist. Das Lumen der Drüse ist noch erhalten und von dem Protoplasma der Zellen umringt, welche fast keine Abgrenzung von einander zeigen. Fig. VI. Zweite Figur rechts unten. An dieser Figur erkennt man noch die Grenzen der Drüse, allein das Lumen derselben ist verschwunden und treten schon die Eigenthümlichkeiten des Solitärfollikels auf.

Fig. VII. Solitärfollikel bei schwacher Vergrösserung. 1. Dichter dunkler Hof; 2. Helles Keimcentrum des Follikels 3 und 4. Veränderte Lieberkühn'sche Drüsen, von welchen einzelne ganz, andere zur Hälfte durch die Einwirkung des Solitärfollikels verändert sind.

Fig. VIII. Eine Gruppe von verschieden grossen Lieberkühn'schen Drüsen. 1. Grosse Drüsen quer durchschnitten, deren Ausführungsgang von vielen Zellen umringt ist. 2. Reticuläre Bindesubstanz, in welcher 3, kleine langgestreckte Drüsen mit einer geringeren Zahl von Cylinderzellen ausgekleidet sichtbar sind. Abgesehen von der Kleinheit dieser Drüsen, ist kein Unterschied von den grossen zu konstatiren.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 132. Stiftungstages

am 21. März 1891.

Die mathem.-physikal. Classe hat im verflossenen Jahre 5 Mitglieder durch den Tod verloren: das ordentliche Mitglied Dr. Franz Hessler, den Senior der Classe und der Akademie, dann aus der Reihe der auswärtigen Mitglieder: den französischen Geologen Edmond Hébert in Paris; aus der Reihe der correspondirenden Mitglieder: den Chemiker Heinrich Will in Giessen, den um die physiologische und landwirthschaftliche Chemie verdienten Forscher Wilhelm Henneberg in Göttingen und den russischen Reisenden und Geographen Peter von Tschichatscheff in Florenz.

Franz Hessler.

Im Jahre 1878 stellte sich dem damaligen Classensekretär, Herrn von Kobell, ein altmodisch, aber sorgfältig gekleideter Greis als der pensionirte kgl. bayer. Bezirksarzt Dr. Franz Hessler aus Wemding vor, mit der Angabe, er wäre auswärtiges Mitglied unserer Akademie und träte bei seiner

Uebersiedelung nach München statutengemäss als ordentliches Mitglied der math.-physikal. Classe ein. Herr v. Kobell, dem der Name und die Verdienste Hessler's gänzlich unbekannt waren, erfuhr in der That aus den Akten, dass Franz Hessler schon im Jahre 1848 auf Vorschlag Walther's zum correspondirenden und im Jahre 1852 auf Vorschlag der Herren Ringseis und Martius zum auswärtigen Mitgliede der Akademie wegen seiner Verdienste um die Kenntniss der altindischen Medizin erwählt worden war.

Es ist wahrlich ein seltenes Vorkommen, dass ein vielbeschäftigter Arzt das Interesse besitzt und die Zeit sich abringt, um eine Sprache, die damals nur Wenige beherrschten, sich anzueignen und in jahrelanger Arbeit die merkwürdigen Aufzeichnungen einer der ältesten Heilkunden der ärztlichen Wissenschaft zugänglich zu machen. Vor 50 Jahren war es zwar noch ziemlich häufig der Fall, dass der Arzt sich mit irgend einem Zweige der Naturwissenschaft, namentlich der beschreibenden, eingehend beschäftigte und an der Erforschung der Flora und Fauna seines Wohnortes sich betheiligte; auch das ist bei der eigenartigen Entwicklung der Medizin, welche immer mehr Special-Kenntnisse und Fertigkeiten von ihren Jüngern verlangt, jedoch unbegreiflicher und unheilvoller Weise im deutschen Reiche trotzdem weniger Zeit zum Studium beansprucht wie früher, kaum mehr möglich; die Zeichen deuten aber auch schon jetzt darauf hin, dass diese expansive Ausbildung auf Kosten der Tiefe derselben geschieht und das vorzüglich aus den Naturwissenschaften gewonnene Verständniss der Vorgänge sowie die feine Beobachtungsgabe des alten Arztes dabei verloren geht.

Das äussere Leben Franz Hessler's verlief in der einfachsten Weise.

Er wurde zu Kronbach bei Aschaffenburg am 13. Oktober des Jahres 1798 als der Sohn schlichter Bauersleute geboren. Nachdem er das Gymnasium zu Aschaffenburg mit

Auszeichnung absolvirt hatte, bezog er zuerst die Universität Würzburg, begab sich aber bald von da nach Heidelberg, um unter Leitung des Professors Creuzer während der Jahre 1823 und 1824 Philologie zu studiren, wodurch er den Grund zu seiner Kenntniss des Sanskrit legte. Nach Würzburg zurückgekehrt, wurde er jedoch der Philologie aus mir unbekannt gebliebenen Gründen untreu und begann Naturwissenschaften und Medizin zu treiben, auf welche er 6 Jahre verwendete. Nach rühmlich erlangtem Doktorgrade der Philosophie und der Medizin fungirte er in Würzburg während zwei Jahren als Assistenzarzt an der städtischen ambulanten Klinik unter Fend und Ruland, und bestand dann die damalige Prüfung für den gerichtsärztlichen Staatsdienst sowie die sogenannte Proberelation bei der Prüfungskommission in Bamberg mit der Note der Eminenz. Darauf bekleidete er während 2 Jahren die Stelle als Leibarzt bei dem in Deutschland reisenden russischen Grafen Wielhorsky, bis er im Jahre 1833 als kgl. Landgerichtsarzt in Miesbach angestellt wurde. Auf seine Bitte wurde er von da in gleicher Eigenschaft nach dem kleinen Badestädtchen Wemding im Ries versetzt, woselbst er 28 Jahre hindurch (bis 1862) die medizinische Praxis in allen Zweigen der Arzneikunde ausübte und zugleich als Badearzt thätig war.

Hier in der Abgeschiedenheit von dem Treiben der Welt entstand das Werk, welches seinen Namen über seinen Wirkungskreis als Arzt bekannt machen sollte. Er übersetzte den Ayurveda d. i. das Lehrbuch der Heilkunde des Susruta aus dem Sanskrit in's Lateinische in 3 Bänden und 2 Kommentar-Fascikeln, welche mühsame Arbeit einen Zeitaufwand von 20 Jahren in Anspruch nahm.

Von Wemding wurde er im Jahre 1862 als Bezirksarzt nach dem oberbayerischen Markte Geisenfeld versetzt, in welchem er 11 Jahre wirkte, bis er 1873 im Alter von 75 Jahren in den erbetenen Ruhestand, unter Anerkennung

unserem berühmten verstorbenen Collegen, dem Orientalisten Markus Josef Müller, auf das Entschiedenste betont wurde. Es würde allerdings die Geschichte der Medizin eine neue Grundlage erhalten haben, wenn der Susruta das hohe Alter gehabt hätte und die Quelle der europäischen Medizin gewesen wäre, wie Hessler meinte; aber seine angeblichen Beweise liessen sich leicht widerlegen und als grundlose Annahmen erkennen.

Trotz alledem muss man andererseits bedenken, dass Hessler mit seiner Uebersetzung nicht der Philologie, sondern vorzugsweise der Medizin dienen wollte, indem er der ärztlichen Wissenschaft die altindischen Anschauungen über die Erkrankungen und die Heilmittel zu erschliessen bestrebt war. Und dass man hierin ihm zu grossem Danke verpflichtet ist, das ist keinem Zweifel unterworfen, wenn auch die Philologie von seinen Arbeiten keinen Gewinn gehabt hat und wenn auch die an die Uebersetzung des Susruta sich anknüpfende eigentlich wissenschaftliche Thätigkeit, durch welche dem Buche seine wahre Stelle in der Wissenschaft hätte angewiesen werden sollen, eine misslungene ist.

Man braucht zu dem Zwecke nur den Eindruck, welchen die Kenntniss des Ayurveda des Susruta auf einen der ersten Kenner der Geschichte der Medizin, auf H. Haeser, gemacht hat, sich zu vergegenwärtigen. Obwohl Haeser ebenfalls gegen Hessler geltend machte, dass die in der Sanskrit-Sprache verfassten medizinischen Schriften wahrscheinlich nicht früher als kurz vor dem Anfange der christlichen Zeitrechnung niedergeschrieben worden sind, so hält er doch den Ayurveda für das wichtigste der vielen noch vorhandenen medizinischen Sanskritwerke. Er berichtet aus Hessler's Werk ausführlich in seinem Lehrbuch der Geschichte der Medizin über die darin niedergelegte staunenerregende Masse von medizinischen Beobachtungen und Erfahrungen, zu deren Sammlung sicherlich Jahrhunderte nöthig gewesen

seien. Wir lernten daraus, dass in Indien damals eine eigentlich wissenschaftliche Heilkunde noch nicht bestand, da ihr vor Allem die Grundlage jeder wissenschaftlichen Medizin, nämlich die Kenntniss des Baues und der Verrichtungen des Körpers, gänzlich mangelte; nur diejenigen Fächer der Medizin, welche sich bis zu einem gewissen Grade rein empirisch zu entwickeln vermögen wie die Chirurgie und die Geburtshilfe, waren zu einem überraschend hohen Grade der Ausbildung gediehen.

Das unbestreitbare Verdienst Hessler's, uns ein wichtiges Gebiet der ältesten Geschichte der Heilkunde zugänglich gemacht zu haben, hat offenbar die einsichtigen und bedeutenden Aerzte Walther und Ringseis, von denen der Erstere wegen seiner Verdienste um die Physiologie, namentlich durch Einführung der allgemeinen Anatomie in Deutschland in seinem geistreich geschriebenen Lehrbuch der Physiologie, der Letztere wegen seiner Verdienste um die mineralogische Sammlung Aufnahme in unsere Akademie gefunden hatten, veranlasst, Hessler zum Mitgliede der Akademie vorzuschlagen. Auch hat der hiesige ärztliche Verein Hessler aus dem gleichen Grunde zu seinem Ehrenmitgliede erwählt.

Hessler war eine stille bescheidene Natur, freundlich und liebenswürdig, voll edler Begeisterung für die Wissenschaft. Im März des vorigen Jahres wohnte der 91jährige würdige Greis noch mit aller Aufmerksamkeit der Festsitzung der Akademie an. Im Monat Juni wurden wir durch die Nachricht überrascht und schmerzlichst berührt, dass unser College am 15. Juni ohne vorausgegangene Krankheit gestorben sei und bereits auf dem Friedhofe zu Haidhausen sein Grab gefunden habe. Ohne das Geleite trauernder Angehöriger und Freunde ist er in den Schooss der Erde versenkt worden. Er war nach dem Tode seiner Lebensgefährtin fast ganz vereinsamt und lebte ohne weiteren Umgang in seiner der Stadt fern liegenden Wohnung in der Bogen-

hausener Strasse. Die letzten Jahre seines Lebens waren noch durch schwere Nahrungssorgen getrübt, da er fast sein ganzes durch mühselige Arbeit errungenes kleines Vermögen ohne sein Verschulden verloren hatte. Die Mitglieder der math.-physikal. Classe erwarben seine Grabstätte und liessen daselbst zu seinem Andenken einen einfachen Stein setzen.

Wir werden des braven Mannes, der der Wissenschaft nach Kräften zu dienen suchte, gerne gedenken; sein Name wird mit der Geschichte der Medizin dauernd verknüpft bleiben.

Edmond Hébert.

Am 4. April 1890 starb im Alter von 78 Jahren zu Paris der Geologe Edmond Hébert. Derselbe nahm durch seine umfassenden Kenntnisse und seinen kritischen Blick einen der ersten Plätze unter den Geologen seiner Zeit ein und galt als das Haupt der französischen geologischen Schule. Während Daubrée die experimentelle und dynamische Geologie in Frankreich vertrat, Delesse in der chemischen und kartographischen Richtung besonders hervorragte, war Hébert in seinem Vaterlande unbestritten als der erste Vertreter der stratigraphischen, paläontologischen und historischen Richtung in dieser Wissenschaft anerkannt. Es gibt in der That kaum eine wichtige Frage auf diesem Gebiete der Gliederung der Schichten der Erdrinde und ihrer Verbreitung, an deren Lösung er sich in seiner langjährigen wissenschaftlichen Thätigkeit nicht mehr oder weniger erfolgreich betheiliget hätte.

Hébert wurde im Jahre 1812 zu Villefargeau, einem Dorfe in der Nähe von Auxerre im Departement Yonne geboren, woselbst sein Vater, ein alter Soldat der Republik und des Kaiserreichs, Pächter eines Landgutes war. Die ersten Studien machte er in der öffentlichen Schule zu Auxerre mit solchem Erfolge, dass man ihn für eine gelehrte Laufbahn und zum Eintritte in die Ecole normale in Paris be-

stimmte. Während er sich zum Eintritte in diese Schule vorbereitete, musste er sich vorerst die hiezu nöthigen Mittel selbst erwerben; er gab daher als 18jähriger Jüngling nach seiner Ankunft in Paris in einer Pension Unterricht im Lateinischen und war dann in einem Institute als Studienaufseher verwendet. Es gelang ihm endlich im Jahre 1833 in die Ecole normale superieure aufgenommen zu werden, in der er, auf's Fleissigste seine Zeit benützend, drei Jahre verblieb. Gleich nach seinem Abgange von dieser Schule erhielt er einen Posten als Lehrer der Physik in der höheren Lehranstalt zu Meaux, wo er sich durch seinen Eifer und sein ruhiges, bestimmtes Wesen so sehr auszeichnete, dass er nach 2 Jahren (1838) an die Ecole normale als Aufsichtslehrer zur Ueberwachung der Disciplin und der Studien der Schüler zurückgerufen wurde. Bis zum Jahre 1857, also volle 19 Jahre, verblieb er in dieser untergeordneten Stellung.

Bei seinen eigenen Studien hatte er sich anfangs vorzüglich mit physikalischen Problemen beschäftiget. Da ihm aber die sitzende Lebensweise nicht zusagte, so unternahm er Ausflüge in die schöne Umgebung von Paris, bei welchen er sich für die Geologie zu interessiren begann, der er sich von 1840 an ausschliesslich widmete. Durch diese Exkursionen, denen sich die Schüler anschlossen, brachte er nach und nach eine ansehnliche Sammlung von Versteinerungen und Mineralien zusammen, welche er von stratigraphischen Gesichtspunkten aus ordnete. Diese Sammlung diente nicht nur zu seiner eigenen Ausbildung in der Geologie, sondern auch zur Belehrung und zu Arbeiten der Schüler; es waren dies die ersten Anfänge der später für die geologischen Studien in Frankreich so erfolgreich gewordenen Schule Hébert's.

Durch die Thätigkeit als Aufsichtslehrer fand Hébert nicht die Zeit eine Doktordissertation zu verfassen; erst 1857 vertheidigte er seine Thesen mit der bemerkenswerthen Abhandlung: „sur la faune des premiers sédiments tertiaires“.

Noch in demselben Jahre wurde er, hauptsächlich in Folge der allgemeinen Anerkennung einer im Jahre 1856 erschienenen Schrift, auf welche wir nachher noch zurückkommen werden, mit den Vorlesungen über Geologie an der Sorbonne betraut und dann mit dem Titel eines Professors der Geologie an derselben an Stelle des verstorbenen Constant Prévost von dem Minister des öffentlichen Unterrichtes angestellt und zwar gegen den Vorschlag der Fakultät, welche sich für Herrn d'Archiac, Mitglied des Institutes, entschieden hatte.

An der Sorbonne gründete Hébert alsbald eine neue Anstalt für Geologie, welche von Anfang an von einer beträchtlichen Anzahl von Schülern besucht war. So entstand seine grosse Schule für Geologie, in der er über 20 Jahre durch seine Vorlesungen, die Arbeiten in der Sammlung und die Exkursionen wirkte. Er besass die richtige Art des Lehrens, indem er seinen Schülern am Objekte zeigte, wie man beobachten müsse und sie bei seinen eigenen Arbeiten mitwirken liess. In liebevollster Weise nahm er Jeden, der es ernstlich mit der Wissenschaft meinte, auf; er wusste alle durch die fesselnden Mittheilungen aus seinem reichen Wissen für die Wissenschaft zu begeistern und zu selbständigen Arbeiten anzuleiten. Auf diese Art gingen viele treffliche Abhandlungen aus allen Theilen der Geologie aus seiner Anstalt hervor; seine Schüler sind jetzt die Lehrer geworden, und es sind fast alle Lehrstühle der Geologie an den Fakultäten Frankreichs von ihnen besetzt.

Die wissenschaftlichen Arbeiten Hébert's sind höchst bedeutende, namentlich auf dem Gebiete der Stratigraphie.

In der ersten Hälfte seiner wissenschaftlichen Thätigkeit beschränkte er sich mit der Erforschung des für die Geologie so merkwürdigen Beckens von Paris, dessen sekundäre, tertiäre und quartäre Bildungen er untersuchte.

Seine ersten Publikationen stammen aus den Jahren 1845 und 1847. In denselben hatte Hébert, namentlich in der Ab-

handlung: Note sur le calcaire pisalithe, bereits auf die Wichtigkeit eines Schichtencomplexes hingewiesen, welcher bis dahin völlig verkannt worden war und eine Stellung zwischen den cretacischen und den alttertiären Schichten einnehmen sollte, von ihm jedoch der cretacischen Gesteinsreihe (der Kreide) zugerechnet wurde. Er zeigte mit Herrn de Mercey, dass die Kreideformation des Beckens von Paris trotz ihrer scheinbaren Continuität doch aus einer Anzahl von verschiedenen Schichten besteht, von denen jede ihre besonderen, ihr zukommenden Versteinerungen, namentlich die vorher nicht gekannten verschiedenen Arten des Echinodermengenus Micraster, einschliesst. Er hat diese letzteren Formen später bis nach England und Böhmen verfolgt und auch die Analogien der cretacischen Schichten von Mauleon und Gensac mit denen von Mastricht erkannt.

Seine folgenden Untersuchungen befassten sich zunächst mit der Feststellung des Verhältnisses der sogenannten unteren Miocänbildungen der jüngeren Tertiärzeit zu den Eocänablagerungen der älteren Tertiärzeit. Es ist ein ganz wesentliches Verdienst Hébert's, durch minutiöse Beobachtung des Details das Pariser Tertiärbecken in Bezug auf diese Gebilde vollständig in's Klare gestellt zu haben.

Ueber die Juraformation des Beckens von Paris machte Hébert eine grosse Anzahl von Erfahrungen, welche in einer massgebenden Arbeit: les mers anciennes et leurs rivages dans le bassin de Paris, terrain jurassique (1856) zusammengefasst sind; in derselben konnte er, im Anschlusse an die in Frankreich herrschenden Ideen der Gebirgshebungen, die zur Jurazeit eingetretenen Schwankungen im Meeresniveau durch eingehende Beobachtungen nachweisen.

Daran schliessen sich mehrere geistreiche und interessante Arbeiten an, in welchen Hébert die Veränderung der Oberfläche und der Bildungsmeere in verschiedenen Perioden bis in die Neuzeit verfolgte. So suchte er zu zeigen, dass die

Sevennen, sowie die subalpine Region und die Provence erst nach der Ablagerung des jurassischen Korallenkalkes erhoben worden sind und ein Festland wurden, über welches der obere Jura sich nicht ablagern konnte. Es knüpfte sich daran ein heftiger Streit mit den Anhängern der Annahme, dass das „Corallien" nur eine Faciesbildung sei, welche sich allmählich von den Oxfordschichten bis zu den Portlandschichten entwickelt hat.

Ausserdem war Hébert unermüdlich thätig, die Unterscheidung und Feststellung der verschiedenen Unterabtheilungen in den cretacischen und tertiären Schichtenreihen immer exakter zu begründen. In dieser Richtung ist eine vortreffliche Arbeit: nouvelles observations relatives au calcaire à Lophiodon de Provins (1862) hervorzuheben.

Bei seinen Studien über die cretacischen und tertiären Schichten in Bezug auf deren feinere Gliederung und vergleichende Altersbeziehungen zu analogen Bildungen ausserhalb des Beckens von Paris und ausserhalb Frankreichs gerieth er bezüglich der Auffassung der Verhältnisse bei der südfranzösischen Kreide in eine leidenschaftlich geführte Controverse mit dem kundigen Marseiller Geologen Coquand und mit dem Grafen d'Archiac, ein Streit, der indess doch für die Klärung der bestrittenen Frage und für die Wissenschaft selbst nicht ohne Früchte blieb.

In ähnlicher Weise heftig wendete sich später Hébert in Bezug auf die sogenannte tithonische Frage gegen die in Deutschland herrschende Ansicht, namentlich in der Abhandlung: sur les limites de la période jurassique et de la période cretacé et specialement sur le calcaire à Terebratules diphya. Unser leider so früh verstorbener unvergesslicher College Oppel hatte als ganz junger Gelehrter die marine Zwischenbildung zwischen der jüngsten Jura- und der ältesten Kreideformation, die sogenannte tithonische Stufe, aufgefunden, und es wurde lebhaft darüber gestritten, ob diese tithonische

Stufe zum Jura oder zur Kreide zu rechnen sei. Die Münchener Schule vertrat dabei die Anschauung, dass die tithonischen Schichten die Facies der Portlandstufe und der Kimmeridstufe repräsentiren, während die Korallenriffe nur eine seitliche Facies darstellen. Später war auch College Zittel durch seine ausgedehnten Studien über die Fauna der sogenannten Klippenkalke der Karpathen lebhaft an der Angelegenheit im Sinne Oppel's betheiliget. Hébert dagegen glaubte, dass die tithonischen Schichten zu den jüngeren d. h. cretacischen Schichten gehören, welche er das „Infranéocomien" nannte; dieselben wären nach ihm in den Vertiefungen, deren Ufer die Schichten von Terebratula Moravica gebildet haben, abgelagert. Durch beschwerliche Reisen in die Karpathen, die Alpen und die Sevennen suchte er die Beweise für seine Anschauung zu gewinnen. Obwohl er nach dem allgemeinen Urtheil von deutscher Waffe besiegt wurde, muss man doch seinen Eifer und seinen Scharfsinn in Vertheidigung seiner Ansicht bewundern.

Auch in die wichtige Frage über die Abgrenzung der Schichten zwischen dem Keuper der Triasformation und der unteren Abtheilung der Juraformation, dem schwarzen Jura oder dem Lias, griff Hébert durch seine Untersuchungen im südlichen Schweden und durch seine Abhandlung: recherches sur l'âge des grès d'Helsinborg, suivies des quelques aperçus sur le grès de Hör (1869) für die Wissenschaft fördernd ein.

An seine früheren, vorher erwähnten Arbeiten über die Schwankungen der Erdrinde während der Jurazeit, dann innerhalb der quartären und rezenten Periode, schliesst sich ein späterer, sehr interessanter Nachweis an, welcher sich auf dasselbe Thema für die Kreideformation in Nordfrankreich bezieht und in seiner Abhandlung: „Ondulation de la craie du Nord de France (1875)" enthalten ist.

Hébert's Untersuchungen über die Thierwelt des paläolithischen Zeitalters sind sehr zahlreich und zum Theil von

grosser Tragweite. Bei seinen Reisen in der Bretagne und in der Normandie sowie in der Halbinsel Cotentin stellte er das Vorkommen einer neuen Schicht zwischen dem Gneiss und dem „Cambrien", die er „Archéen" nannte, fest; dasselbe hat die gleiche stratigraphische Lage wie das sogenannte „Huronien" in Canada. In den Ardennen fand er in dem Schichtencomplexe zwischen Urschiefer und Steinkohlenformation, zu welchem die ältere silurische und die jüngere devonische Formation gehören, in der letzteren die Ablagerungen von „Gédinien", welche bis dahin zu der silurischen Formation gezählt wurden.

In der letzten Zeit seines Lebens hat Hébert von Neuem vorzugsweise den Tertiärbildungen, an denen das Becken von Paris so reich ist, seine Aufmerksamkeit zugewendet, wie die vergleichende Studie: „recherches sur le terrain tertiaire de l'Europe meridionale" zeigt. In Gemeinschaft mit einem seiner besten Schüler, Munier-Chalmas, bereiste er die Südalpen, Norditalien und Ungarn, um die Tertiärformation dieser Länder mit der von Paris zu vergleichen; es ergab sich daraus das Material zu einer seiner bedeutendsten Publikationen: „nouvelles recherches du Vicentin (1878)". Ein äusserst sorgfältig durchgeführtes vergleichendes Schichtenprofil der südalpinen Tertiärgebilde mit einer prachtvollen Sammlung von zahlreichen Belegstücken erregte in der Pariser Ausstellung vom Jahre 1873 die Bewunderung aller Sachverständigen. Indem er die stratigraphischen Beziehungen aller dieser Horizonte unter sich feststellte, führte er die Bezeichnung der seitlichen Facies für das tertiäre Terrain ein. Er that dar, dass die Süsswasserschichten von Champigny das Aequivalent von Gypse und die kalkigen Süsswasserschichten von Provins die marinen Schichten des oberen Grobkalkes repräsentiren. Indem er die Ausbreitung der Schichten des Pariser Beckens verfolgte, erkannte er, dass zur tongrischen Zeit sich das Meer einstens bis nach England,

Belgien, in den Norden von Europa, in's Rheinthal bis nach Basel, in die Normandie und in's Rhonebecken bis nach Südfrankreich erstreckte.

Als Hébert seine Arbeiten begann, rangen zwei Anschauungen über die Entstehung der Gebirge mit einander: die Eine liess sie aus gewaltsamen Erhebungen hervorgehen, die Andere dagegen, welche Hébert theilte, aus langsamen Veränderungen. Er gerieth darüber in einen erbitterten Streit mit dem berühmtesten der älteren Geologen Frankreichs, mit Elie de Beaumont; ebenso über die Zugehörigkeit der Nummuliten zur Tertiärformation, über die Gletschertheorien und über die Existenz des Menschen in der Quartärzeit.

Es ist ferner als ein nicht zu unterschätzendes Verdienst Hébert's hervorzuheben, dass er zu den verhältnissmässig wenigen Geologen seines Vaterlandes gehörte, welche es wagten, der in Frankreich lange Zeit herrschenden, so zu sagen, offiziellen Geologie, welche zum Nachtheil einer gesunden und freien Entwickelung der Wissenschaft von den Mitgliedern des Corps des Mines fast als ausschliessliche Domaine beansprucht und von Elie de Beaumont als Alleinherrscher dirigirt wurde, entgegen zu treten.

Hébert versuchte auch mit einigen wenigen Gesinnungsgenossen einen Verein zu bilden, um den von Elie de Beaumont's Einfluss völlig abhängigen offiziellen geologischen Karten andere nach freieren Prinzipien entworfene entgegenzustellen. Er emancipirte sich noch in anderer Weise durch die Gründung einer selbständigen Zeitschrift in Verbindung mit Milne-Edwards, dem Vertreter der Paläontologie: den Annales des sciences géologiques, welche seit dem Jahre 1869 bestehen.

In allen seinen Werken erkennt man den sorgfältigen Beobachter und scharfen Diagnostiker, welcher sich nicht darauf beschränkt einfach die Thatsachen zu sammeln, sondern es auch versteht, diese zu weitergehenden Schlüssen geistreich und erfolgreich zu verwerthen.

Seine stratigraphischen Arbeiten haben sich nicht nur nützlich für die Wissenschaft erwiesen, sie fanden auch alsbaldige Verwerthung für das Aufsuchen der Mineralschätze des Landes, für die Bohrung von Mineralquellen, die Anlage der Eisenbahnen und der Tunnels; für die dereinstige Herstellung eines Tunnels unter dem Aermelkanale wird die Beachtung seiner Unteretagen in der Kreide von grossem Nutzen sein.

Den Verdiensten Hébert's entsprechend waren auch die äusseren Ehren, die ihm zu Theil wurden. Er war seit dem Jahre 1877 Mitglied des Instituts von Frankreich, ebenso Mitglied der Akademie der Wissenschaften in der Sektion für Mineralogie; 1878 wurde er durch Akklamation zum Präsidenten des in Paris tagenden internationalen geologischen Congresses gewählt; drei Male war er Präsident der geologischen Gesellschaft von Frankreich; zwei Male, 1886 und 1889, übertrugen ihm seine Collegen von der Fakultät das Amt eines Dekans.

Mit ihm ist einer der hervorragendsten Gelehrten, der sein Leben ganz im Dienste der Wissenschaft verbrachte, dahin gegangen.[1])

Heinrich Will.

Heinrich Will hat sich um die Entwicklung der Chemie grosse Verdienste erworben, sowohl durch seine bedeutenden wissenschaftlichen Arbeiten als auch namentlich durch seine unermüdliche und erfolgreiche Thätigkeit als Lehrer im Laboratorium. Er war einer der Wenigen, welche die wunderbare Zeit im Liebig'schen Laboratorium zu Giessen noch erlebt haben, durch das unstreitig der Grund zu der heutigen Blüthe der Chemie in Deutschland gelegt wurde.

1) Mit Benützung von J. Bergeron, Revue générale des sciences, 1890 No. 7 p. 223, und Discours prononcés sur la tombe de M. Edmond Hébert.

Will wurde am 8. Dezember 1812 in dem schön gelegenen Städtchen Weinheim an der Bergstrasse geboren. Nach dem frühen Tode des Vaters nahm der Direktor der Lateinschule zu Weinheim, Hofrath Grimm, den aufgeweckten Knaben in sein Haus auf und sorgte in väterlicher Weise für dessen Erziehung. Nach Absolvirung der Lateinschule entschied sich Will für das Fach der Pharmazie; er trat als Lehrling in eine Apotheke des badischen Städtchens Gernsbach ein und war darnach Gehilfe in verschiedenen Apotheken Badens, zuletzt in Heidelberg. Er zeigte sich dabei als einen höchst fleissigen und geschickten Arbeiter, der zugleich Liebe zur Wissenschaft und ein höheres Streben besass. Er benützte daher den Aufenthalt in Heidelberg (1834), um an der Universität Vorlesungen zu besuchen und sich, namentlich in der Chemie, weiter auszubilden.

Dadurch erregte er die Aufmerksamkeit des damaligen Vertreters der Pharmazie an der Universität, des vortrefflichen Lorenz Geiger, der den eifrigen Studenten als Assistent aufnahm. Nach dem im Jahre 1836 erfolgten Tode Geiger's war der berühmte Chemiker Leopold Gmelin erfreut, eine so tüchtige Kraft als Gehilfen gewinnen zu können; aber er sollte nur kurze Zeit in seiner neuen Stellung bleiben. Liebig hatte bekanntlich mit Geiger die verbreiteten Annalen der Pharmazie herausgegeben, welche er nach dem Tode des letzteren allein fortführen musste. Da nun Will bei der Redaktion der Annalen sich Geiger als höchst nützlich erwiesen hatte, so suchte ihn Liebig nach Giessen zu ziehen, um bei der Redaktion der Annalen eine Hilfe zu haben.

Es ist begreiflich, dass Will dem lockenden Rufe nach Giessen Folge leistete, woselbst Liebig schon eine grosse Zahl junger talentvoller Chemiker aus allen Ländern um sich vereinigte und von wo die bedeutendsten Arbeiten ausgingen. Will trat daher als Privatassistent bei Liebig ein.

Hier war der richtige Platz für ihn, an dem er seine Kräfte entfalten konnte, so dass er bald als Forscher sich hervorthat und eine grosse Wirksamkeit als Lehrer gewann.

Durch den Andrang von Schülern war es Liebig allmählich unmöglich geworden, die Leitung des Laboratoriums fernerhin allein zu besorgen und er war genöthiget, sich nach einer Hilfe umzusehen. Er zog Will zuerst zum Unterricht, besonders in der organischen Chemie, heran, und als es ihm gelungen war, das Filiallaboratorium auf dem Selterser Berge einzurichten, übertrug er ihm die Leitung desselben. Zu gleicher Zeit (1844) habilitirte sich Will als Privatdocent an der Universität, nachdem er im Jahre 1839 in Giessen sich den Doktorgrad erworben hatte. Schon im Jahre 1845 erfolgte seine Ernennung zum ausserordentlichen Professor.

In dieser Stellung entwickelte er eine so erspriessliche Thätigkeit bei den Vorlesungen und im Laboratorium sowie auch in der wissenschaftlichen Forschung, dass es bei der Berufung Liebig's nach München (1852) als selbstverständlich erschien, dass Will als Liebig's Nachfolger zum ordentlichen Professor der Experimentalchemie und zum Leiter des Laboratoriums erwählt wurde.

Damit war der Höhepunkt seiner Laufbahn erreicht und ihm ein weites und fruchtbares Feld der Arbeit eröffnet. Volle dreissig Jahre wirkte er in dieser Stellung in vollster Kraft und mit unermüdlichem Eifer; dann aber fühlte er, dass es Zeit sei, jüngeren Schultern die Last zu übertragen, obwohl es dem an intensive Thätigkeit Gewohnten schwer wurde, dem Amte zu entsagen und sich der Ruhe hinzugeben (1882). Nachdem er noch am 1. Mai 1889 unter lebhafter und herzlicher Theilnahme seiner vielen Schüler und Freunde das 50jährige Doktorjubiläum gefeiert und am 28. Juli 1890 der feierlichen Enthüllung des Liebig-Denkmals in Giessen beigewohnt hatte, traf ihn am 15. Oktober ein Schlaganfall, der dem Leben des 78jährigen Greises rasch ein Ende machte.

Noch am 8. Oktober hatte er an seinen alten Freund Pettenkofer geschrieben, er möchte ihn so gerne noch einmal im Leben sehen und grüssen, aber es dürfte dies nicht mehr zu lange verschoben werden, da er den Druck der Jahre in stets wachsender, gerade nicht erfreulicher Weise fühle; wenige Tage darnach hatte er sein Tagewerk vollendet.

Ueberblickt man die wissenschaftliche Thätigkeit Will's, so ersieht man, dass er dadurch in mehreren Richtungen die Chemie wesentlich bereichert hat.

Zunächst liegen von ihm Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie vor.

Die mit Fresenius (1844) herausgegebenen Untersuchungen über die anorganischen Bestandtheile der Vegetabilien erhellten nicht nur die Bedeutung der Mineralstoffe in den Pflanzen, sondern stellten auch die Methode der Analyse der Pflanzenaschen, namentlich der Bestimmung der darin enthaltenen Phosphorsäure, fest. Man war bekanntlich schon längere Zeit vor ihnen auf die Nothwendigkeit der Mineralstoffe in der Pflanze aufmerksam geworden und namentlich auch darauf, dass die verschiedenen dem nämlichen Boden entsprossenen Pflanzenarten die Aschebestandtheile in sehr ungleichen Mengen aufnehmen. Liebig hatte aber damals die Wichtigkeit und Unentbehrlichkeit der Mineralstoffe für Ernährung der Pflanzen von Neuem betont und den Werth dieser Lehren für die Landwirthschaft mit der ihm eigenen Energie entwickelt. Zur weiteren Einsicht in diese für die Wissenschaft und Praxis gleich wichtigen Verhältnisse mussten viele und genaue Analysen der Aschen der verschiedensten Pflanzen und Pflanzentheile gemacht werden, was Fresenius und Will in ihrer grossen Arbeit übernahmen. Es stellte sich dabei heraus, dass in der That bestimmte Pflanzentheile ganz bestimmte Aschebestandtheile enthalten, so z. B. die meisten Samen fast ausschliesslich phosphorsaure Alkalien und alkalische Erden, die Holzarten und krautartigen Ge-

wächse vorwiegend kohlensaure Alkalien und alkalische Erden, die Halme der Grasarten viel Kieselsäure.

Ebenfalls in Gemeinschaft mit Fresenius veröffentlichte er ein in jeder Hinsicht auf's Genaueste durchgearbeitetes neues Verfahren zur Bestimmung der Pottasche und Soda, der Säuren und des Braunsteins, wobei sie nicht, wie es früher von Gay-Lussac geschehen war, die zur Sättigung des Alkalis nothwendige Menge der Säure ermittelten, sondern die durch die Säure entwickelte Menge von Kohlensäure in einem jedem Chemiker bekannten ausserordentlich einfachen Apparate bestimmten.

Will führte ferner eine grössere Anzahl von genauen Mineralwasseranalysen, zum Theil auch mit Fresenius, aus, wobei er in mehreren eisenführenden Quellen einen Gehalt an Arsen entdeckte.

Eine höchst erspriessliche Förderung hat Will der organischen Chemie gebracht durch die mit Varrentrapp erdachte, einfache und vielfach angewandte Methode der Bestimmung des Stickstoffs in organischen Verbindungen mittelst Natronkalk. Die beiden haben die möglichen Fehlerquellen des Verfahrens sorgsam ermittelt, so dass es bei richtiger Ausführung, trotz mancher Widersprüche von Seiten Unkundiger, die genauesten Resultate liefert.

Eine Reihe trefflicher Untersuchungen Will's galt der Erforschung der Eigenschaften und der Zusammensetzung organischer Verbindungen.

Die erste Arbeit des angehenden Chemikers vom Jahre 1840 war die Auffindung zweier Pflanzenbasen aus Chelidonium majus und aus Veratrum album, des Chelidonin's und des Jervin's, woran sich eine kleine Untersuchung über den Aether der von Merck aus dem Sabadillsamen dargestellten Veratrinsäure anschloss. Er ermittelte ferner die Zusammensetzung des ätherischen Oels der Raute, welches später zum Ausgangspunkt einer Reihe von Arbeiten anderer Chemiker.

wurde; er prüfte das eigenthümliche Verhalten des Jods zum Anis- und Fenchelöl; er untersuchte in einer sehr bemerkenswerthen Arbeit mit Böttger die durch Einwirkung von Salpetersäure auf den Stinkasant erhaltene Styphninsäure, dann die aus der bei Darstellung des Kaliums erhaltenen schwarzen Masse gewonnene Krokonsäure und Rhodizonsäure; er stellte das schwefelsaure Eisenoxydchinin, einen Alaun einer organischen Base, her, und auch eine wichtige Verbindung des Nikotins mit Benzoylchlorid, womit er die Möglichkeit der Vereinigung von tertiären Diaminen mit den Säurechloriden bewies.

Seine weitaus bedeutendsten und für die Erkennung der Constitution organischer Verbindungen folgereichsten Arbeiten sind die über das Senföl. Schon im Jahre 1844 gab er seine Untersuchungen über die Constitution des ätherischen Oeles des schwarzen Senfs heraus, durch welche er Löwig's Angabe bestätigte, dass dieses Oel keinen Sauerstoff enthält, und zugleich darthat, dass es eine Schwefelcyanverbindung des Radikals Allyl sei. Er entdeckte auch eine Anzahl von Abkömmlingen dieses Oels z. B. das durch Einwirkung von Ammoniak daraus dargestellte Thiosinnamin, den ersten einfach substituirten Sulfoharnstoff. Daran reihte sich die Untersuchung einiger Verbindungen des Senfölschwefelwasserstoffes an.

Sehr interessant sind seine mit Körner ausgeführten Versuche über die Entstehung des Senföls in den Samen des schwarzen Senfs, wobei sich die Existenz eines eigenthümlichen ungeformten Fermentes, des Myrosin's, ergab, welches aus dem in den Samen enthaltenen myronsauren Kalium ausser dem Senföl noch Zucker, Schwefel und schwefelsaures Kalium abspaltet.

Später wurde von ihm auch der weisse Senfsamen untersucht. Er lehrte dabei einen neuen Bestandtheil desselben kennen, und beschrieb in seiner letzten mit Laubenheimer veröffentlichten Arbeit (1879) das Glucosid des weissen Senf-

samens, das Sinalbin, welches durch das Myrosinferment in Sinalbinsenföl, Zucker und Sinapinsulfat zerfällt.

Allen Chemikern wohlbekannt ist ein aus den bewährten Erfahrungen des Giessener Laboratoriums entstandenes Büchlein Will's: Anleitung zur chemischen Analyse, welches 12 Auflagen erlebte und in fast alle lebenden Sprachen übersetzt wurde. Es hat für den ersten Unterricht in der analytischen Chemie ungemein nützlich und anregend gewirkt.

Er hat sich endlich auch ein nicht zu unterschätzendes Verdienst durch seine werkthätige Theilnahme an dem von Liebig und Kopp herausgegebenen Jahresberichte über die Fortschritte der Chemie erworben, sowie durch die Uebernahme der Redaktion desselben nach Liebig's Rücktritt im Jahre 1856, welche er bis zum Jahre 1868 fortführte.

Will hat sich, wie schon erwähnt, nicht nur als Forscher in der Chemie einen mit Recht geachteten Namen gemacht, sondern auch, und fast noch mehr, als vortrefflicher Lehrer. Sein Vortrag in den Vorlesungen war von vollendeter Klarheit und fesselnder Darstellung; das grösste Talent besass er jedoch in dem Unterricht im Laboratorium, wo er mit unermüdlicher Ausdauer die Anfänger zum selbstständigen Denken in der Chemie anleitete und die Vorgerückteren in ihren wissenschaftlichen Arbeiten mit Rath und That förderte. Eine sehr beträchtliche Anzahl von Schülern aus Deutschland und dem Auslande, jetzt grösstentheils angesehene Chemiker, sind ihm dafür zu unauslöschlichem Danke verpflichtet; er hat dadurch dem chemischen Unterrichte und damit auch der Ausbreitung und Ausbildung dieser Wissenschaft einen hervorragenden Dienst geleistet. Von Allen, die ihn kannten, war er wegen seines ehrenfesten, geraden Sinnes geliebt; er hat ein glückliches Leben in rastloser und fruchtbarer Arbeit geführt.[1])

1) Mit Benützung des Gedenkblattes von A. W. Hofmann, in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft 1890 No. 19.

Wilhelm Henneberg.

Wilhelm Henneberg hat sich in hohem Maasse um die Kenntniss der Ernährung der Wiederkäuer verdient gemacht, indem er, ursprünglich ausgehend von den Ideen seines Lehrers Liebig, an Stelle der früher grösstentheils empirischen Grundsätze bei der Fütterung dieser Hausthiere, die wissenschaftliche Einsicht zu setzen suchte; er hat durch seine mit unübertroffenem Fleiss und ausserordentlicher Sorgfalt ausgeführten Untersuchungen nicht nur der praktischen Landwirthschaft, sondern auch der Physiologie grosse Dienste geleistet.

Henneberg wurde am 10. September 1825 zu Wasserleben, einer gräflich Stollberg'schen Domäne am nördlichen Harze in der Grafschaft Wernigerode geboren, woselbst sein Vater Pächter des Gutes war. Nachdem er seine erste Ausbildung durch Privatlehrer im elterlichen Hause, dann am Collegium Carolinum zu Braunschweig erhalten hatte, studirte er von 1845 bis 1848 an den Universitäten zu Jena und zu Giessen. In Jena arbeitete er bei dem Botaniker Schleiden, an den er von seinem Vater Empfehlungen erhalten hatte, und auch bei dem Chemiker Wackenroder. Anfänglich wollte er sich, veranlasst durch das Interesse, das ihm die Hüttenwerke im nahen Harz erweckten, dem Hüttenfach widmen, dann neigte er sich mehr den Naturwissenschaften, besonders der Chemie, zu, wurde aber schliesslich durch die Lektüre von Schleiden's wissenschaftlicher Botanik und Liebig's chemischen Briefen bestimmt, sich der Landwirthschaft zuzuwenden; die auf dem Lande und auf einem trefflich bewirthschafteten Gute zugebrachte Jugendzeit sowie der Einfluss seines Vaters mögen mit zu diesem Entschlusse beigetragen haben. Unter diesen Umständen war es natürlich, dass es ihn nach Giessen zog, wo damals Liebig die jungen Chemiker aller Länder um sich vereinigte und wo die wichtigsten Arbeiten und befruchtendsten Ideen für die Landwirthschaft ausgingen. Er hatte das Glück sich bei der grossen Unter-

suchung Liebig's über das Fleisch betheiligen zu dürfen; er führte auch dort seine ersten chemischen Arbeiten aus und darunter auch solche, welche ihm für seine spätere Thätigkeit als Agrikulturchemiker von Nutzen waren.

Nach Beendigung seiner akademischen Studien verbrachte er drei Jahre auf dem heimathlichen Gute, wo er sich ein kleines chemisches Laboratorium eingerichtet hatte, um sich mit der praktischen Landwirthschaft ganz vertraut zu machen, als nothwendige Vorbereitung zu seiner späteren wissenschaftlichen Thätigkeit auf diesem Gebiete. Daran schloss sich eine längere Reise nach England zum Studium der dortigen grossartigen landwirthschaftlichen Einrichtungen an.

Nach seiner Zurückkunft übernahm er im Jahre 1851 eine Anstellung als zweiter Sekretär des landwirthschaftlichen Vereins im Herzogthum Braunschweig, verblieb aber daselbst nur ein Jahr, nach welchem er der Berufung als erster Sekretär der königl. hannoverischen Landwirthschafts-Gesellschaft in Celle folgte.

Hier in Celle begründete er mit anfangs sehr beschränkten Mitteln ein agrikulturchemisches Laboratorium, welches vorzugsweise den Zwecken der praktischen Landwirthschaft dienen sollte. Es war bekanntlich in Folge der Anregungen Liebig's in Möckern bei Leipzig im Jahre 1852 die erste unter der Leitung von Crusius und Wolff blühende landwirthschaftliche Versuchsstation in Deutschland errichtet worden mit der Aufgabe unter Anwendung der Naturwissenschaften, besonders der Chemie, die Gesetze der Pflanzen- und Thierproduktion zum Nutzen einer rationellen Landwirthschaft kennen zu lernen, nach deren Muster alsbald viele für die Landwirthschaft so ausserordentlich nutzbringende Anstalten der Art entstanden sind.

Seit 1853 gab Henneberg im Auftrage der Landwirthschafts-Gesellschaft das Journal für Landwirthschaft, verbunden mit einem vorzüglichen Jahresberichte über die Fort-

schritte der Landwirthschaft, heraus; letzterer erschien als Supplement des Journals, unter dem Titel: „Berichte über die Untersuchungen und Erfahrungen auf dem Gebiete der landwirthschaftlichen Pflanzen- und Thierproduktion“ bis zum Jahre 1868. In dem bis zu seinem Tode fortgesetzten Journal finden sich die wissenschaftlichen Abhandlungen Henneberg's bis auf seine ersten, welche grösstentheils in Liebig's Annalen veröffentlicht worden sind.

Das Laboratorium in Celle bestand bis zum Herbst des Jahres 1857, zu welcher Zeit daraus die landwirthschaftliche Versuchsstation Weende bei Göttingen als Institut der königl. Landwirthschafts-Gesellschaft hervorging. Die Weender Versuchsstation stand bald durch die bedeutungsvollen Arbeiten ihres Vorstandes und seiner Schüler in der vordersten Reihe und sie übte eine solche Anziehungskraft aus, dass sehr viele der jetzt an landwirthschaftlichen Anstalten angestellten Leiter an ihr sich ausgebildet haben und thätig waren.

Neben seinem mühsamen Amte als Vorstand der Versuchsstation wurde er 1865 zum ausserordentlichen und 1873 zum ordentlichen Professor der Landwirthschaft an der Universität Göttingen, später zum königl. preussischen Geheimen Regierungsrath ernannt; 1874 erfolgte die Verlegung der Versuchsstation von Weende nach Göttingen, wo er an der Erziehung tüchtiger Landwirthe erfolgreich mitwirkte.

Henneberg entfaltete an diesen Orten eine ungemein fruchtbare wissenschaftliche Thätigkeit. Sie begann schon 1846 in Jena mit einer in Erdmann's Journal veröffentlichten Untersuchung über das Zirkon; in Liebig's Annalen finden sich mehrere in dem Liebig'schen Laboratorium entstandene Abhandlungen: über einige pyrophosphorsaure Doppelsalze und über phosphorsaure Salze, dann eine in Giessen begonnene und später zu Hause fortgesetzte Arbeit über einige Zersetzungsprodukte des Mellonkaliums, welche ihm (1849) als Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde in

Jena diente. In Giessen führte er noch Analysen der unorganischen Bestandtheile des Hühnerblutes aus, bei welchen er einen Gehalt an Kieselsäure fand, die dazu dient, den Federn des Thieres die nöthige Kieselsäure zu liefern.

Seine Hauptarbeiten bewegten sich jedoch auf dem Gebiete der Ernährungslehre der Wiederkäuer. Schon im Jahre 1849 brachte er in Liebig's Annalen eine für die damaligen Kenntnisse sehr bemerkenswerthe, auf dem Gute Wasserleben an Merinohammeln gemachte Untersuchung: Beiträge zur Ernährung. Man war bekanntlich eine Zeit lang der Meinung, den Nährwerth eines Nahrungsmittels aus seinem Stickstoffgehalte entnehmen zu können; der verdiente französische Landwirth Boussingault, dem wir die ersten praktischen Versuche an Hausthieren über Nahrungsäquivalente verdanken, vermeinte diesen Satz in einer Anzahl von Fällen aus dem Gewichte der Thiere bestätigen zu können, nicht selten zeigte sich aber eine Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Praxis, woraus er schloss, dass der Stickstoffgehalt des Futters nicht der einzige Faktor für den Nährwerth desselben sei. Henneberg fütterte nun die Hammel mit der gleichen Menge von Kleeheu und Weizenstroh unter Zusatz verschiedener anderer Futtermittel. Der ebenfalls aus dem Körpergewichte erschlossene Nährwerth der zu ein und derselben Gruppe gehörigen Nahrungsmittel z. B. der Rüben und Kartoffeln stellte sich in der That proportional dem Stickstoffgehalte, aber nicht der einer anderen Gruppe wie des Kleeheus, in dem bei gleicher Wirkung wesentlich mehr Stickstoff verzehrt wurde. Diese ersten Anläufe lassen schon die späteren Bestrebungen Henneberg's erkennen, aber auch wie sehr sich die Anschauungen über die Ernährung und die Methoden ihrer Erforschung im Laufe von 40 Jahren umgestaltet haben.

An der Versuchsstation zu Weende begann die Thätigkeit, welche seinen Namen bekannt gemacht hat. Zum Ver-

ständniss derselben muss man sich erinnern, wie es zu dieser Zeit mit der Lehre von der Thierproduktion stand. Im Ackerbau herrschte noch in den dreissiger Jahren die Humustheorie, in der Viehzucht die von Thaer begründete Theorie vom Heuwerth. Dieselbe war ausgegangen von der Bestimmung der in Wasser, Alcohol, verdünnten Säuren und Alkalien löslichen Stoffe des Futters, indem man annahm, dass diese Stoffe auch im Darmkanal des Thieres gelöst würden; daraus suchte man durch Futterberechnungen zu ermitteln, wieviel man bei Zusatz einer bestimmten Quantität von Rüben, Kartoffeln etc. von Heu weglassen dürfe.

Da trat Liebig 1843 mit seinen das Dunkel erhellenden Ideen über die Ernährung der Thiere auf; er hatte durch seine chemischen Untersuchungen der Stoffe der Organe des Thierleibes und der Ausscheidungsprodukte neue Vorstellungen über die Zersetzungsvorgänge im Körper und über die Bedeutung der einzelnen Nahrungsstoffe gewonnen. Es war dadurch der Physiologie die Aufgabe gestellt worden, diese Ideen durch den Versuch am Thiere zu prüfen, namentlich die Stoffzersetzung unter den verschiedensten Umständen durch die Messung der Ausscheidungsprodukte festzustellen.

Die früheren Fütterungsversuche an landwirthschaftlichen Nutzthieren konnten die Gründe der Erscheinungen nicht finden und keine Erklärungen geben. Die von Boussingault (1844) auf seinem Gute Bechelbronn im Elsass angestellten berühmten Versuche über die Aufzucht des Viehes, die Mästung der Thiere und die Milchproduktion waren mehr praktische Erfahrungen, mit Hilfe der Wägung des Thieres und der Bestimmung einiger Bestandtheile des Futters gewonnen; seine Versuche über die Bilanz der Elemente der Einnahmen in der Nahrung und der Ausgaben im Harn und Koth bezogen sich auf je einen Fall bei einem Pferde und einer Kuh. Auch die im Jahre 1848 von Lawes und Gilbert in Rothamstead gemachten Fütterungen an Schafen und

Schweinen liessen nur das Consumvermögen der Thiere für die einzelnen Nährstoffe erkennen und zeigten, mit welchen Futtermischungen eine rasche Mästung zu erzielen war. Ebensowenig kamen die damals an den landwirthschaftlichen Versuchsstationen in Deutschland angestellten Versuche über vereinzelte Erfahrungen nicht hinaus. Allerdings hatte Wolff einen wesentlichen Fortschritt gemacht, indem er für die Futterberechnungen ausser dem Gehalte an stickstoffhaltigen Stoffen auch den an stickstofffreien Stoffen berücksichtigte und auch auf die Verdaulichkeit der verschiedenen Futterstoffe aufmerksam machte, wobei er die Rohfaser als unverdaulich von den übrigen organischen Substanzen abzog; er hatte dadurch die Zeit der Fütterung nach chemischen Grundsätzen angebahnt.

Henneberg erkannte wohl bald das Ziel, welches man anstreben müsse, um einen näheren Einblick in die Ernährungsvorgänge zu erhalten und der Praxis zu nützen; er wollte den gesetzmässigen Zusammenhang zwischen Stoffbildung (Fleisch- und Fettproduktion) der verschiedenen Hausthiere und der Qualität und Quantität des Futters durch Untersuchung der Nahrung und der Exkrete erforschen. Er suchte den physiologischen Werth der Nahrungsmittel festzustellen, indem er den verdauten Theil ihrer Nahrungsstoffe d. i. ihre Ausnützung im Darmkanal ermittelte; als letztes Ziel der landwirthschaftlichen Thierproduktion bezeichnete er mit Vorliebe die Aufstellung von Stoffwechselgleichungen a priori.

Henneberg hatte schon viele Versuche am Rinde in dieser Richtung angestellt, als die von Bischoff und mir am Hunde gemachten Versuche (1860) erschienen, deren Vorläufer die denkwürdige Untersuchung von Bidder und Schmidt über den Stoffwechsel war. Ich hatte vorher für den Fleischfresser die Methode der Ermittelung des Eiweissumsatzes festgestellt und angegeben, wie man eine möglichst einfache und in ihrer Zusammensetzung genau bekannte Nahrung aus

reinem Fleisch mit Zusatz anderer reiner Nahrungsstoffe darstellen, sowie allen auf einen Versuchstag treffenden Harn und Koth erhalten könne; ich hatte dabei gefunden, dass der Stickstoff des im Körper zersetzten Eiweisses in der That nur im Harn und im Koth zur Ausscheidung gelangt. Bischoff und ich wendeten diese neu gewonnenen Erfahrungen an zur Festsetzung des Eiweissverbrauchs und Eiweissansatzes bei verschiedener Nahrungszufuhr und unter verschiedenen anderen Einwirkungen. Späterhin reihte sich daran auch die Bestimmung der Grösse des Umsatzes der stickstofffreien Stoffe, des Fettes und der Kohlehydrate, durch Pettenkofer und mich nach Herstellung des Respirationsapparates durch ersteren. Alles dies liess sich am Fleischfresser, bei dem die Ernährungsverhältnisse viel einfacher sich gestalten wie beim Pflanzenfresser, leichter ermitteln wie bei letzterem. Die Nahrung des Pflanzenfressers ist wesentlich complicirter zusammengesetzt; einfache Gemische von Nahrungsstoffen lassen sich bei ihm kaum verwenden; die Aufnahme der grossen Massen des Futters nimmt lange Zeit in Anspruch, während der Fleischfresser in wenigen Minuten seinen Bedarf für 24 Stunden verzehrt, so dass am Ende des Versuchstages die Wirkung der Nahrung völlig abgelaufen und der Koth gebildet ist; der massige Koth des Pflanzenfressers bleibt dagegen 6—8 Tage im Darmkanale liegen; der Harn eines Versuchstages lässt sich nur schwer abgrenzen, der Koth gar nicht; der Koth schliesst beim Fleischfresser nur einen geringen Theil der Umsetzungsprodukte des Körpers mit wenig Residuen der Nahrung ein.

Die Gesetze der Zersetzungen wird man daher immer zunächst am Fleischfresser erkennen und dann zusehen, ob sie beim Pflanzenfresser ebenfalls gegeben sind und wie die zusammengesetzte Pflanzennahrung den Umsatz modificirt.

Henneberg begann nun diese Erkenntnisse auf die mit seinem Freunde und langjährigen ausgezeichneten Mitarbeiter

Friedrich Stohmann am Rinde schon gemachten Versuche zu übertragen und bei weiteren Versuchen zu benützen.

Sein mit Stohmann herausgegebenes Hauptwerk hat den Titel: „Beiträge zur Begründung einer rationellen Fütterung der Wiederkäuer"; das erste Heft derselben (1860) beschäftiget sich mit dem Erhaltungsfutter zweier ausgewachsener Ochsen, das zweite (1864) mit der Ausnützung der Futterstoffe durch das volljährige Rind und mit der Fleischbildung im Körper desselben.

Während wir beim Fleischfresser den einfachen Fall des Stoffverbrauchs im Hungerzustande zu Grunde legen konnten, mussten Henneberg und Stohmann beim Pflanzenfresser, da es bei ihm wegen des im Darme in Masse rückständigen Futters nicht möglich ist, den Hungerzustand rein zu beobachten, von dem Nährstoffbedarf bei Erhaltungsfutter ausgehen. Sie wählten zu dem Zweck als voluminöses trockenes, verdauliche Eiweissstoffe nicht über den Bedarf hinaus enthaltendes Futter ein Gemenge von Heu und Stroh, welchem sie dann verschiedene Nährstoffe wie Kleber, Rüböl und Stärkemehl zusetzten.

Vorerst aber mussten durch umständliche Versuche die Methoden der chemischen Analyse der complicirt zusammengesetzten Futtermittel sowie des Kothes ausgebildet werden. Den löslichen stickstofffreien Bestandtheilen wurde die jetzt allgemein gebräuchliche Bezeichnung der stickstofffreien Extraktstoffe, der Holzfaser der Namen Rohfaser gegeben; in demselben Sinne sprachen sie von Rohprotein und von Rohfett. Dadurch gelang es ihnen die ersten zuverlässigeren Angaben über die Verdaulichkeit der pflanzlichen Futtermittel bei Wiederkäuern zu machen.

Bei den Untersuchungen über das Erhaltungsfutter fand sich, dass vom Rauhfutter d. h. vom Heu und Stroh nur etwa die Hälfte des Rohproteins zur Resorption im Darm gelangt, von den stickstofffreien Extraktstoffen 40—68%, von

dem Rohfett 30—60%. Man hatte schon früher die Erfahrung gemacht, dass beim Pflanzenfresser die Holzfaser nicht völlig unverändert wieder mit dem Kothe entfernt wird, sondern ein Theil davon im Darmkanale verschwindet. Henneberg und Stohmann thaten dar, dass vom Erhaltungsfutter bis zu 55% der Rohfaser verschwinden und dass es wirklich ein Stoff von der Zusammensetzung der Cellulose ist, welcher von der Rohfaser im Koth nicht mehr aufzufinden ist. Von der Proteinsubstanz des Futters bleibt eine wechselnde, dem Rohfasergehalte desselben oft ziemlich entsprechende Menge unverdaut, und die stickstofffreien Extraktstoffe des Futters repräsentiren annähernd die Gesammtmenge der verdauten stickstofffreien organischen Substanz. Es tritt nämlich eine Compensation zwischen den stickstofffreien Extraktstoffen und der Rohfaser ein, in der Art, dass die Summe der verdauten stickstoffreien Extraktstoffe und der verschwundenen Rohfaser annähernd der Gesammtmenge der löslichen stickstofffreien Futterbestandtheile entspricht.

Als sie nun zu dem genannten Rauhfutter andere leicht verdauliche Futtermittel hinzugaben, erfuhren sie den Einfluss der Futtermischung auf die Verwerthung der Futterstoffe im Darmkanal. Durch die Beigabe kleiner Mengen concentrirter, namentlich stickstoffreicher Futtermittel wird die Verdaulichkeit des Rauhfutters nicht wesentlich verändert. Nach Beigabe grosser Mengen leicht verdaulichen Proteins oder stickstoffreicher leicht verdaulicher Futtermittel ist die Verdauung des Rauhfutters auch keine wesentlich andere; dagegen bewirkt die Beigabe grosser Mengen leicht verdaulicher Kohlehydrate eine Verminderung in der Ausnützung des Proteins des Rauhfutters, zum Theil auch der Rohfaser desselben. Ein Zusatz von Eiweiss zu einer stärkemehlreichen Nahrung beförderte die Verdauung des Stärkemehls; Zugabe von Stärkemehl zu einer eiweissreichen Ration setzte die Ausnützung des Eiweisses herab. Ein Zusatz von Fett z. B.

von Rüböl machte eine bessere Verwerthung der Rohfaser und auch eine etwas günstigere des Proteins.

Dabei konnten sie auch die Hauptgesetze des Eiweissumsatzes und des Eiweissansatzes oder der Fleischbildung, wie sie für den Fleischfresser von uns festgestellt wordenwaren, für den Pflanzenfresser bestätigen. Zunächst den für solche Versuche wesentlichsten Satz, dass aller Stickstoff der im Körper zersetzten stickstoffhaltigen Substanzen im Harn und Koth aus demselben austritt und nicht gasförmig durch Haut und Lunge entfernt wird. Sie fanden beim Ochsen bei Erhaltungsfutter den Stickstoff der Nahrung bis auf 5,8% im Harn und Koth auf, beim Schaf konnte später völliges Stickstoffgleichgewicht der Einnahmen und Ausgaben nachgewiesen werden.

Der Umsatz des Eiweisses steigt und fällt ferner wie beim Hunde mit der Menge der verdauten stickstoffhaltigen Nahrungsstoffe; bei mehr Eiweiss im Futter erscheint dem entsprechend anfangs mehr Stickstoff im Futter bis allmählich unter Eiweissansatz wieder Stickstoffgleichgewicht eintritt. Zusatz von stickstofffreien Stoffen (Kohlehydraten) vermindern den Eiweisszerfall sowie den Eiweissverlust vom Thier und verstärken den Eiweissansatz. Bei absolut mehr Eiweiss in dem Futter und gleichem Verhältniss der stickstoffhaltigen zu den stickstofffreien Nährstoffen ist der Eiweissansatz grösser, wodurch die am Hunde gewonnene Einsicht von der hohen Bedeutung des richtigen Verhältnisses der stickstoffhaltigen zu den stickstofffreien Nahrungsstoffen auch für den Pflanzenfresser sich bestätigte.

Eine reichliche Wasserzufuhr bewirkte eine grössere Stickstoffausscheidung im Harn, also einen verstärkten Eiweisszerfall, wie ich es auch für den Hund zu finden glaubte.

Endlich zeigte sich auch ein Einfluss der Körperbeschaffenheit des Thieres auf den Eiweissverbrauch, indem letzterer wie beim Hunde bei einem schwereren, an Fleisch reicheren Organismus grösser war.

Von nicht geringerer Bedeutung sind die von Henneberg in den Jahren 1870 und 1872 herausgegebenen zwei Hefte „neue Beiträge“. Hier wurden neben dem Eiweissumsatz gleichzeitig die gasförmigen Zersetzungsprodukte des Rindes und Schafes mit Hilfe eines dem Pettenkofer'schen nachgebildeten Respirationsapparates untersucht. Dadurch konnte wie bei den Versuchen von Pettenkofer und mir am Hunde und Menschen, auch ein Einblick in die so bedeutungsvolle Zersetzung der stickstofffreien Stoffe gewonnen werden. Die von Pettenkofer eingeführten Controlbestimmungen lieferten für die Kohlensäure ein sehr günstiges Resultat, nicht aber für das Wasser; letzteres ist durch die grossen Dimensionen des Henneberg'schen Apparates und durch ein Niederschlagen von Wasser in Folge der ungleichen Temperatur der Wandungen desselben bedingt; bei Vermeidung dieser Fehlerquellen lassen sich, wie unsere Versuche darthun, auch für das Wasser völlig richtige Resultate erhalten. Aber doch war es Henneberg möglich, für das Schaf vollständige Stoffwechselgleichungen aufzustellen.

Bei diesen neueren Versuchen ergaben sich vielfach die gleichen Resultate wie bei den früheren, gemeinschaftlich mit Stohmann angestellten. Bei dem näheren Studium der Ausnützung des Rauhfutters, der Heu- und Stroharten, zeigte sich, dass die früher von Henneberg und Stohmann zur Berechnung des verdauten Rohproteins angegebene empirische Formel wohl im Gesammtdurchschnitte, aber nicht in allen einzelnen Fällen der direkten Bestimmung nahe kommende Werthe gibt. Es zeigte sich abermals, dass die im Darmkanal verschwundene Rohfaser überwiegend aus Cellulose besteht, wobei nur eine geringfügige Entwickelung von Grubengas stattfindet, und auch dass eine Beigabe von Stärkemehl oder Zucker zum Rauhfutter die Ausnützung des letzteren herabsetzt. Ebenso ferner, dass kein sogenanntes Stickstoffdeficit existirt, dass der Eiweissumsatz mit der Eiweisszufuhr in der

Nahrung steigt und fällt, wobei sich allmählich wieder Stickstoffgleichgewicht herstellt. Wenn ein 500 Kilo schwerer Ochs in der Ruhe eben 250 Gramm Eiweiss täglich umsetzt, bewirkt ein reichlicher Zusatz von stickstofffreien Nährstoffen keinen namhaften Ansatz von Eiweiss, dieser letztere tritt erst bei Steigerung der Eiweisszufuhr ein, jedoch ist wie bei unseren Versuchen die Zunahme des Eiweissansatzes geringer als die Vermehrung der Eiweisszufuhr.

Eine reichlichere Aufnahme von Tränkwasser durch die Thiere rief in der Regel einen grösseren Eiweissumsatz hervor, aber nicht momentan, sondern erst nach einiger Zeit.

Eine Veränderung des Ernährungszustandes des Thieres ergab unter sonst gleichen Umständen wiederum eine entsprechende Veränderung des Eiweisszerfalles.

Die Kohlensäureproduktion stieg und fiel, ebenso wie bei unseren Versuchen am Hund und Menschen, unter sonst gleichen Verhältnissen mit der Zufuhr der stickstoffhaltigen und stickstofffreien Nährstoffe, so dass also der Ansatz von Eiweiss und Fett geringer ist als die Vermehrung der Zufuhr von Eiweiss und Fett in dem Futter.

Es wurde auch dabei für das ausgewachsene Schaf bei Erhaltungsfutter die Vertheilung der Mineralbestandtheile des Futters auf den Harn, den Koth und die Wolle festgestellt.

Es würde viel zu weit führen, wollte ich auf alle die vielen Untersuchungen Henneberg's und ihre Resultate eingehen; ich suchte nur durch Aufzählung der wichtigsten Ergebnisse eine Vorstellung von seiner Wirksamkeit zu geben. Zu seinen eigenen Arbeiten kommen noch die unter seinem Einflusse entstandenen zahlreichen von seinen Schülern in seinem Laboratorium ausgeführten, welche mit dazu beitrugen, die Lehre von der landwirthschaftlichen Thierproduktion zu fördern.

Wenn auch in der letzten Zeit auf diesem Gebiete durch Andere so manches wichtige Neue hinzugekommen ist, durch

welches andere und richtigere Auffassungen sich anbahnten, z. B. durch die Entdeckung, dass der Stickstoff in gewissen Vegetabilien, wie in den Futterrüben oder in den Kartoffeln, zum grossen Theile nicht in Eiweiss, sondern in Amidosäuren und anderen einfachen Stickstoffverbindungen enthalten ist, wodurch die Berechnung des Eiweissumsatzes eine Umgestaltung erfährt, oder durch die Entdeckung, dass die Cellulose in dem Darmkanale der Pflanzenfresser eine Gährung durch niedere Organismen unter Entwicklung von Gasen erleidet, wodurch bei eingreifenderer Zersetzung ihr Nährwerth wesentlich herabgesetzt würde, so hat doch Henneberg eine ungemein grosse Anzahl der wichtigsten Thatsachen für die landwirthschaftliche Thierproduktion festgestellt. Dieses sein Verdienst hat auch Veranlassung gegeben, ihn im Jahre 1864 als correspondirendes Mitglied in unsere Akademie, in der eine Anzahl von Mitgliedern durch ihre Arbeiten auf dem gleichen Gebiete seine Bedeutung zu würdigen wussten, aufzunehmen sowie ihm als Erstem die goldene Liebig-Medaille, welche zur Anerkennung hervorragender Leistungen für die Landwirthschaft ertheilt wird, noch bei Lebzeiten Liebig's zu verleihen.

Aber nicht die Fülle der von ihm zu Tage geförderten Thatsachen allein macht seine Bedeutung für die Wissenschaft aus, seine Hauptbedeutung für die späteren Zeiten besteht nach meiner Anschauung darin, dass er für die Erforschung der so sehr verwickelten Prozesse der Ernährung im Leibe der Pflanzenfresser den Weg bahnte, welchen seine Nachfolger betreten und weiterführen können und auf dem man nach und nach zu dem ihm vorschwebenden Ziele gelangen wird, nämlich zu der Aufstellung von Futternormen für die Thierzucht.

Die so ausserordentlich mühsamen und zuverlässigen Detailarbeiten vermochte nur ein Forscher von einem eisernen Fleisse, von äusserster Gewissenhaftigkeit und strengster Wahr-

heitsliebe auszuführen. Als einen solchen Mann haben Henneberg auch seine Freunde und Schüler gekannt, voll Begeisterung für die Wissenschaft, welche er auch seinen Schülern einzuflössen wusste; sie hatten an ihm das beste Beispiel.

So wie auf die Ausführung seiner Arbeiten konnte man sich auf ihn auch im Leben fest verlassen. Ich habe das Glück gehabt, ihm persönlich näher zu treten und seine trefflichen Eigenschaften kennen zu lernen. Trotz seiner Erfolge strebte er nicht nach äusseren Auszeichnungen, er suchte seine Befriedigung ausschliesslich in der reinen wissenschaftlichen Arbeit; stets bescheiden und anspruchslos, aufrichtigen Sinnes und von geradem Wesen war er in jeder Beziehung ein edler Mensch. Im gewöhnlichen Verkehr war er zwar wortkarg, aber wer ihn näher kannte, wusste den Werth seines Wortes zu schätzen.

Es hat daher Viele die Kunde tief betrübt, dass Henneberg am 22. November 1890 gestorben sei. Schon im Oktober 1889 erlitt er einen Schlaganfall, von dem er sich wieder leidlich zu erholen schien; am 22. November 1890 richtete er sich zu einer Reise, besuchte noch die Räume des Laboratoriums und fuhr Mittags nach dem nahen Greene bei Kreiensen zum Besuche seiner Schwester, wo Abends ein erneuter Schlaganfall seinem Leben ein rasches und sanftes Ende machte, mitten in seinem Schaffen und mitten in neuen Entwürfen zur weiteren Ausgestaltung seiner Arbeiten. Er hat das Glück gehabt, die Neugestaltung der Ernährungslehre seit 40 Jahren zu erleben und durch seine bewundernswerthen Untersuchungen an Wiederkäuern wesentlich an derselben mitzuwirken.[1])

1) Nach Vollendung dieses Nachrufes sind Nekrologe über Henneberg erschienen: von Th. Pfeiffer in den landwirthschaftlichen Versuchsstationen vom Nobbe 1891, Bd. 39, Heft 1; und von F. Lehmann im Journal für Landwirthschaft 1890, Bd. 38, Heft 3 u. 4.

Peter von Tschichatscheff.

Am 13. Oktober 1890 starb in Florenz der bekannte russische Geograph und Reisende, Peter Alexandrowitsch Tschichatscheff.

Es wurde im Jahre 1808 in Gatschina geboren. Nachdem er im elterlichen Hause und im Gymnasium zu Tsarskoe Selo vorgebildet war, begab er sich zur Vollendung seiner Studien in's Ausland. Die Neigung zur Naturwissenschaft und zur Geographie führten ihn zuerst der Geologie zu; er hörte zu dem Zwecke an der Bergakademie zu Freiberg Naumann und Breithaupt, dann an der Universität zu Berlin Leopold v. Buch und Gustav Rose und vollendete seine Ausbildung in Paris bei Élie de Beaumont. Mit den französischen Paläontologen Ph. de Verneuil und d'Archiac und auch mit R. Murchison trat er in freundschaftliche, bis zum Tode fortdauernde Beziehungen.

Seine erste in den Jahren 1839 und 1840 im Auslande ausgeführte Arbeit war die geognostische Schilderung des Monte Gargano in Leonhard's Jahrbuch für Mineralogie, dann folgte 1841 die Beschreibung des geologischen Baues der Umgebung von Nizza und 1842 die Abhandlung über die geologische Beschaffenheit der südlichen Provinzen des Königreichs Neapel.

Nach der Rückkehr in sein Vaterland betrieb er noch botanische Studien bei dem Direktor des botanischen Gartens in St. Petersburg Fischer, übte sich in physikalischen Beobachtungen in dem magnetisch-meteorologischen Observatorium bei Ad. Theod. Kupffer und machte sich auch mit den Formen der Thiere bei dem Zoologen Brandt bekannt.

In dieser Weise in jeder Beziehung wohl vorbereitet trat er an seine grossen Reisen heran.

Auf Alexander v. Humboldt's Empfehlung hatte er 1842 durch den damaligen russischen Finanzminister Grafen v. Konkrin im Namen des Kaisers Nikolaus den Auftrag erhalten,

eine wissenschaftliche Reise in das sibirische Gebirgsland des Altai, das bis dahin nur sehr wenig bekannt war, zu unternehmen. Die Resultate derselben sind in dem schönen Werke: Voyage scientifique dans l'Altai Oriental et les parties adjointes de la Frontière de Chine (1845) zusammengefasst, einem stattlichen Bande in Quart mit einem Atlas, geologischen Karten, Plänen und Zeichnungen. Im ersten Theile des Werkes werden in höchst lebendigen Schilderungen der Verlauf der Reise, die physikalischen Beobachtungen und die ethnographischen Bemerkungen mitgetheilt; der zweite Theil beschäftiget sich mit den geologischen Beobachtungen, bei deren Bearbeitung Élie de Beaumont und de Verneuil in Paris sowie für die paläontologischen Pflanzenreste der kundige Geppert in Breslau behilflich waren.

Nach Vollendung dieses Werkes, welches ihm alsbald den Ruf eines ausgezeichneten Geographen verschaffte, ging er gleich an die Vorbereitungen zu einem neuen grösseren Reiseunternehmen. Er hatte den lebhaften Wunsch das unter der türkischen Herrschaft damals verödete und schwer zugängliche Kleinasien, die ehemalige Perle des altrömischen Reiches, in naturwissenschaftlicher Beziehung gründlich zu erforschen. Als aber die politischen Verwicklungen den Nachfolger des Ministers Konkrin, Grafen v. Nesselrode, veranlassten ein solches wissenschaftliches Unternehmen unter den damaligen Verhältnissen für unausführbar zu erklären, trat Tschichatscheff die Reise auf eigene Gefahr an. Es kam ihm dabei sehr zu Statten, dass er seinen zweijährigen Aufenthalt in Konstantinopel als Attaché bei der kais. russischen Gesandtschaft benützt hatte, die so nöthigen Kenntnisse der türkischen Sprache und ihrer Mundarten sich zu verschaffen. Mit seinen eigenen Mitteln und nur in Begleitung eines Dieners unternahm er von 1847 bis 1863 fast jährlich von den Ufern des Bosporus, des Marmarameeres und des mittelländischen Meeres aus grosse Touren durch Kleinasien und

Armenien, wobei er diese Länder in vier verschiedenen Richtungen durchquerte und überall mit Ausdauer und Geschick reichhaltige topographische und geographische Daten über die Gebirge, Wälder, Flüsse, Seen und die Mineralwässer des Landes verzeichnete, wichtige geologische und paläontologische Beobachtungen anstellte, Thiere und Pflanzen sammelte, die Höhen der Ortschaften und der Berge ermittelte und klimatologische und meteorologische Bestimmungen machte. Einige vorläufige Mittheilungen über diese Reisen wurden in der Zeitschrift für allgemeine Erdkunde (1859), später von H. Kiepert in Petermann's geographischen Mittheilungen (1867) gemacht. Ausführlich finden sich dieselben beschrieben in dem grossen vierbändigen Werke: Asie mineure, description physique, statistique et archéologique de cette contrée (1853 bis 1869), bei dem ihn die französischen Gelehrten Élie de Beaumont, de Verneuil, d'Archiac und Brogniart in Bearbeitung des reichen geologischen Materials und Fischer, Unger und Fenzl in Bestimmung der gesammelten Pflanzen unterstützten. Nachträglich fasste er seine Erfahrungen über Kleinasien nochmals zusammen in der Abhandlung: Une page sur l'Orient; Asie mineure; Geographie physique, climat, vegetation, espèces d'animaux, constitution geologique, considerations politiques (1868), welche auch in deutscher Sprache erschien.

Diesen durch 16 Jahre ununterbrochen fortgesetzten Bemühungen und Studien verdankt die geographische und naturhistorische Wissenschaft die ersten genaueren Kenntnisse von Kleinasien. Auch über politische Fragen dieser Länder findet man in sieben in den Jahren 1856—1879 von ihm geschriebenen Abhandlungen werthvolle Angaben.

Als Ergänzung zu der Beschreibung von Kleinasien gab er 1864 noch eine eingehende und gründliche Beschreibung des Bosporus und Konstantinopels heraus.

Seit dem Jahre 1869 machte er keine grössere Ex-

pedition mehr, nur besuchte er im Jahre 1878 in Begleitung seiner Frau das Innere von Algerien und Tunis. Er beschrieb diese Länder in Briefen an seinen Freund, den berühmten Nationalökonomen Michel Chevalier, welche in dem Buche: Espagne, Algerie et Tunis (1880), später auch in deutscher Sprache veröffentlicht wurden.

In hohem Alter beschäftigte er sich noch mit allerlei Ausarbeitungen wissenschaftlicher Fragen und mit Zusammenstellungen des Wissens in den seinem Studium naheliegenden Gebieten. In dieser Art lieferte er einen Abriss der Geschichte der geographischen und naturwissenschaftlichen Kenntnisse in verschiedenen Zeiten in einer Abhandlung: Etudes de Geographie et d'Histoire naturelle (1890), und schrieb er in der Revue des deux Mondes und der Revue Britannique in sehr fesselnder und interessanter Weise über das Naphta in den Vereinigten Staaten und in Russland, über die sibirische Steppe Gobi, über Tibet, über die aralokaspische Tiefebene und die Oase von Merph. Auch übersetzte er das Werk Grisebach's über die Vegetationsverhältnisse der Erde unter Zufügung von Eigenbemerkungen, und die Rede Liebig's über Lord Bacon aus dem Deutschen in's Französische. Eine weit angelegte Arbeit: les deserts du Globe wurde durch seinen Tod unterbrochen und blieb unvollendet.

Im hohen Alter von 82 Jahren erlag Tschichatscheff einer Lungenentzündung nach kurzer Krankheit zu Florenz, wo er zumeist lebte. In seinem Testamente hatte er der Pariser Akademie der Wissenschaften eine Million Franken vermacht, um damit Reisen in die unbekannten Gebiete Asiens zu unterstützen.

Er besass alle für einen Reisenden in uncivilisirte Länder nöthigen Eigenschaften: ausser ausgebreiteten Kenntnissen eine imponirende Gestalt, eiserne Gesundheit, grosse Energie und Unerschrockenheit in Gefahren. Nur so war es möglich, dass er bei seinen Zügen durch Kleinasien während 8 Jahren

in einem halb barbarischen Lande inmitten einer fanatischen Bevölkerung so bedeutende Erfolge erringen konnte. Er war ausserdem ein Mann von vortrefflichen Charaktereigenschaften, geschätzt von Allen, die ihn kannten. In Anerkennung seiner Verdienste um die Kenntnisse der Erde hatten ihn zahlreiche gelehrte Gesellschaften zu ihrem Mitgliede erwählt, ausser unserer Akademie, deren correspondirendes Mitglied in der Abtheilung für allgemeine Naturgeschichte er seit dem Jahre 1866 war, die kais. russische Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, die k. preussische Akademie zu Berlin und das Institut von Frankreich in der Sektion für Geographie.[1])

1) Mit Benützung des Nekrologes von J. J. Stabnitzk, vorgetragen in der Sitzung der kais. russischen geographischen Gesellschaft am 7. November 1890.

Sitzung vom 2. Mai 1891.

1. Herr E. Lommel hält einen Vortrag: „über di Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes".

2. Herr L. v. Seidel legt eine Abhandlung des Herı Dr. Sebastian Finsterwalder, Privatdocent der Mathemat an der technischen Hochschule dahier: „die von optische Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesicht feldes erzeugten Bilder, auf Grund der Seidel'sche Formeln untersucht" vor. Die Abhandlung ist für d Denkschriften bestimmt.

Ueber die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes.

Von E. Lommel.

(Eingegangen 2. Mai.)

Die schönen Versuche des Herrn Wiener,[1]) durch welche derselbe die Existenz stehender Lichtwellen nachwies, haben auch die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes wieder in den Vordergrund des Interesses und der Discussion[2]) gerückt. Ich nehme hievon Anlass, an von mir vor längerer Zeit mitgetheilte Versuche[3]) zu erinnern, welche die letztere Frage berühren. Lassen sich auch diese einfachen Beobachtungen mit den sinnreichen Experimenten Wiener's an Verdienst nicht vergleichen, so führen sie doch diese Frage mindestens ebensoweit, ja sogar weiter, der Lösung entgegen, als die Wiener'schen Versuche.

Seit Fresnel und Arago steht fest, dass in einem isotropen Mittel die Lichtschwingungen senkrecht zum Strahl in der Wellenebene erfolgen, und dass dieselben im gerad-

1) Wiener, Wied. Ann. 40. p. 203. 1890.

2) P. Drude, Wied. Ann. 41. p. 154. 1890. A. Cornu, C. R. 112. p. 189, 365. H. Poincaré, ib. p. 325, 456. A. Potier, ib. p. 383. J. de phys. (2) 10. p. 101. 1891.

3) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 634. 1879.

linig polarisirten Licht in einer durch den Strahl gelegten Ebene stattfinden, welche zu der experimentell stets gegebenen Polarisationsebene entweder senkrecht steht, oder mit ihr zusammenfällt. Von der Lichtschwingung selbst wissen wir aus der Erfahrung nur, dass sie in einem periodisch veränderlichen Zustand besteht, der sich in einem Substrate von unbekannter Beschaffenheit wellenartig fortpflanzt.

Die verschiedenen Theorien des Lichtes unterscheiden sich von einander durch die Annahmen, welche sie über die Eigenschaften des fortpflanzenden Mittels machen. Welcher Art aber auch diese Hypothesen sein mögen, so sind doch die aus ihnen abgeleiteten partiellen Differentialgleichungen, welche den Vorgang der Fortpflanzung transversaler Schwingungen beschreiben sollen, von derselben allgemeinen Form. Aus diesen Gleichungen folgt aber, dass mit jeder solchen Schwingung eine in der Wellenebene zu ihr senkrecht gerichtete ebenfalls periodisch veränderliche Grösse von gleicher Schwingungsdauer und proportionaler Intensität untrennbar verknüpft ist, welche mit demselben Recht wie jene als „Schwingung“ bezeichnet werden kann. In den elastischen Lichttheorien sind diese beiden zu einander senkrechten Richtungsgrössen (Vectoren) einerseits die Verschiebung der Aethertheilchen, andrerseits die Aenderung der die Fortpflanzung bewirkenden elastischen Kraft; in der elektromagnetischen Lichttheorie die elektrische Schwingung und die dazu senkrechte magnetische Schwingung.

Das theoretisch geforderte Vorhandensein zweier verschiedener, vom analytischen Standpunkt aus gleichwerthiger, Richtungsgrössen wird man daher auch bei Ueberlegungen, welche sich an Erfahrungsthatsachen knüpfen, zu berücksichtigen haben.

Die Thatsache der Polarisation aber beweist, dass diese beiden Richtungsgrössen, von denen die eine in der Polari-

sationsebene liegt, die andere zu ihr senkrecht steht, physikalisch von einander wesentlich verschieden sind, und auf die dem Lichte ausgesetzten Körper jedenfalls verschieden einwirken.

Indem wir also in jeder Lichtwelle stets beide Schwingungen als gleichzeitig vorhanden und mit einander untrennbar verbunden annehmen, dürfen wir doch vom physikalischen Standpunkt aus nur diejenige von ihnen als „Lichtschwingung" betrachten, welche Erscheinungen hervorruft, die wir als Lichtwirkungen zu bezeichnen gewohnt sind.

Die Aufgabe, wie man sie bisher gestellt hatte, bestand nun darin, durch Versuche zu entscheiden (denn nur durch Versuche, nicht durch theoretische Betrachtungen, kann nach unserer Ansicht diese Frage entschieden werden), ob im geradlinig polarisirten Licht die Verschiebungen der Theilchen des fortpflanzenden Mittels senkrecht oder parallel zur Polarisationsebene erfolgen.

Mit Rücksicht auf die vorausgeschickten Erörterungen erscheint aber eine andere Fragestellung geboten, und zwar muss die Frage in zwei gesonderte zerlegt werden, nämlich in folgende:

1) Welche von den beiden im geradlinig polarisirten Licht als gleichzeitig vorhanden anzunehmenden Schwingungen, die in der Polarisationsebene oder die senkrecht zu ihr, bringt die Wirkungen hervor, welche wir als Lichtwirkungen bezeichnen, oder: welche von beiden ist die „Lichtschwingung"?

2) Ist diese Lichtschwingung identisch mit der Verschiebung selbst, oder mit der zu letzterer senkrechten periodischen Grösse?

Wir wenden uns zunächst zu der ersten Frage.

Die in der oben citirten Abhandlung mitgetheilten Thatsachen sind die folgenden:

Das rothe Magnesiumplatincyanür, welches in schön ausgebildeten quadratischen Säulen krystallisirt, zeigt dichroitische Fluorescenz, welche besonders schön hervortritt, wenn man sie mit an sich lichtschwachem aber stark erregendem violettem Licht hervorruft.

Erregt man mit polarisirtem Licht, indem man das einfallende violette Strahlenbündel, nachdem es durch ein Nicol'sches Prisma gegangen ist, senkrecht auf eine Seitenfläche des Krystalles treffen lässt, so strahlt die belichtete Fläche scharlachrothes Fluorescenzlicht aus, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes zur Hauptaxe des Krystalles parallel steht, dagegen orangegelbes Fluorescenzlicht, wenn die Polarisationsebene zur Krystallaxe senkrecht steht.

Durch ein zweites Nicol betrachtet, erweist sich das ausgestrahlte Fluorescenzlicht für die genannten beiden Hauptstellungen des ersten Nicols jeweils in demselben Sinne polarisirt wie das erregende Licht, nämlich das scharlachrothe parallel zur Krystallaxe, das orangegelbe senkrecht zu ihr.

Mit dem Spectroskop untersucht, zeigt das scharlachrothe Fluorescenzlicht ein Spectrum, welches von der Wellenlänge $\lambda = 0{,}650\,\mu$ bis zu $\lambda = 0{,}578\,\mu$ reicht und im Orangeroth etwa bei $\lambda = 0{,}600\,\mu$ ein Maximum der Lichtstärke besitzt; das Spectrum der orangegelben Fluorescenzfarbe dagegen erstreckt sich von $\lambda = 0{,}640\,\mu$ bis $\lambda = 0{,}562\,\mu$, und erhebt sich im Gelb bei $\lambda = 0{,}578\,\mu$ zu einem Maximum.

Wir lassen jetzt das horizontale polarisirte Bündel violetten Lichtes auf die Basisfläche des quadratischen Prismas senkrecht treffen, indem wir den Krystall so aufstellen, dass seine Hauptaxe mit der Richtung der einfallenden Strahlen zusammenfällt (Anfangsstellung). Die Basisfläche leuchtet nun mit scharlachrothem Fluorescenzlicht (Spectrum bis $\lambda = 0{,}578\,\mu$), welches unpolarisirt ist, und seinen Farbenton nicht ändert, wenn man den Krystall oder das Nicol um die Strahlenrichtung als Axe dreht.

Versuch A. Nun stellen wir die Polarisationsebene horizontal, und drehen den Krystall, von jener Anfangsstellung ausgehend, um eine verticale Axe, so dass das erregende Licht unter immer grösserem Einfallswinkel auf die Basisfläche trifft; das Fluorescenzlicht bleibt dabei unverändert scharlachroth (Spectrum bis $\lambda = 0,578\,\mu$).

Versuch B. Stellt man dagegen die Polarisationsebene vertical und lässt man die einfallenden Strahlen immer schräger auf die Basisfläche treffen, indem man den Krystall wie vorhin aus der Anfangsstellung um eine verticale Axe dreht, so ändert sich die Fluorescenzfarbe, indem sie mehr in's Gelbe zieht, und im Spectroskop verlängert sich das Spectrum bis $\lambda = 0,562\,\mu$. Das bei einer bestimmten Stellung des Krystalles jeweils wahrgenommene Fluorescenzspectrum ändert sich jedoch nicht, wenn man die Richtung des Strahles in der festgehaltenen Polarisationsebene ändert.

Bei dem Versuch A bleibt, während der Krystall gedreht wird, die Normale der Polarisationsebene senkrecht zur Krystallaxe; die Fluorescenzfarbe bleibt ungeändert.

Bei dem Versuch B dagegen ändert sich der Winkel, welchen die Normale der Polarisationsebene mit der Krystallaxe bildet; die Fluorescenzfarbe ändert sich ebenfalls.

Es ergibt sich also, dass die Aenderung der Fluorescenzfarbe bedingt ist durch die Aenderung des Winkels, welchen die Normale der Polarisationsebene mit der Krystallaxe bildet, dagegen völlig unabhängig ist von der Lage irgend einer in die Polarisationsebene fallenden Richtungsgrösse gegenüber der Krystallaxe.

Die Fluorescenz erregenden Schwingungen einer geradlinig polarisirten Lichtwelle stehen demnach zur Polarisationsebene senkrecht.

Die oben mitgetheilten an den Seitenflächen des Krystallprismas gemachten Beobachtungen zeigen ferner, dass das

ausgestrahlte Fluorescenzlicht mit dem erregenden Licht jeweils parallel polarisirt ist.

Es folgt daraus, dass auch der Lichteindruck einer geradlinig polarisirten Lichtwelle in unserem Auge durch Schwingungen hervorgebracht wird, welche zur Polarisationsebene senkrecht stehen.

Andrerseits hat Wiener den experimentellen Nachweis geliefert, dass die chemisch wirksamen Schwingungen einer geradlinig polarisirten Lichtwelle zur Polarisationsebene senkrecht stehen.

Da für die Wärmewirkungen einer Lichtwelle die Polarisationsebene dieselbe Lage hat wie für ihre Lichtwirkungen, da ferner die Phosphorescenz von der Fluorescenz im Wesen nicht verschieden ist, so dass beide von E. Wiedemann passend unter der Benennung „Luminescenz" zusammengefasst werden, so ist hiemit für alle Lichtwirkungen, optische, thermische, chemische und Luminescenz-Wirkungen experimentell bewiesen:

Die Lichtschwingungen stehen zur Polarisationsebene senkrecht.

Hiemit ist aber nur die erste unserer beiden Fragen erledigt, und zugleich dargethan, dass alle bekannten Lichtwirkungen nur von dem zur Polarisationsebene senkrechten Schwingungszustand bedingt sind; von vorneherein wäre ja immerhin denkbar gewesen, dass etwa die optischen Wirkungen von der einen, die chemischen Wirkungen von der anderen dazu senkrechten periodischen Grösse abhängig wären.

Die zweite Frage dagegen, ob die Verschiebung der Theilchen des Mediums selbst oder der zu ihr senkrechte Schwingungszustand die wirksame Lichtschwingung ist, bleibt dabei noch offen; für die elastischen Lichttheorien z. B. ist

hiedurch noch nicht zwischen den Hypothesen von Fresnel und von Neumann entschieden. Nach Fresnels Annahme würden die Verschiebungen der Aethertheilchen, nach Neumann die zu den Verschiebungen senkrechten Aenderungen der elastischen Kraft als Lichtschwingungen anzusehen sein; dort müssten die Verschiebungen senkrecht, hier parallel zur Polarisationsebene erfolgen.

Zur Beantwortung dieser zweiten Frage wurden in der citirten Abhandlung etwa folgende Ueberlegungen angestellt. Der Process des Selbstleuchtens, welchen wir Fluorescenz nennen, wird durch den auf den erregbaren Körper treffenden Bewegungszustand des lichtfortpflanzenden Mittels hervorgerufen. Die Versuche zeigen, dass die beobachteten Fluorescenzerscheinungen unabhängig sind von der Richtung, aus welcher die Lichtbewegung dem Körper zugeführt wird, also unabhängig von der Fortpflanzungsrichtung der einwirkenden Strahlen. Die Einwirkung muss also auch unabhängig sein von der periodisch veränderlichen Grösse (Druckänderung, Rotation, Glissement), welche die Fortpflanzung längs des Strahles vermittelt, und welche senkrecht steht zu der durch Fortpflanzungsrichtung und Verschiebungsrichtung gelegten Ebene. Die Wirkung kann also nur abhängig sein von der Verschiebung selbst.

Da bereits dargethan ist, dass die Wirkung nur von der Normale der Polarisationsebene abhängt, so ergibt sich, dass die Verschiebungen des fortpflanzenden Mittels die eigentlichen Lichtschwingungen sind, und demnach senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen.

Eine mehr directe Entscheidung der zweiten Frage liesse sich herbeiführen, wenn man in dem fortpflanzenden Mittel Verschiebungen von bekannter Richtung hervorrufen und deren Lage zur Polarisationsebene bestimmen könnte. Für die elektrischen Verschiebungen ist dies möglich, und es sind

in der That von Troughton[1]) und von Klemenčič[2] suche ausgeführt worden, welche beweisen, dass die trischen Verschiebungen („displacements") zur Polaris ebene senkrecht stehen. Nimmt man daher an, da Lichtwellen mit den elektrischen Wellen dem Weser übereinstimmen, so ergibt sich wiederum, dass die schiebungen des fortpflanzenden Mittels zur Polarisation senkrecht stehen.

---

1) Troughton, Nature 39. p. 393. 1889.
2) Klemenčič, Wiener Berichte, Feb. 19, 1891.

Sitzung vom 6. Juni 1891.

Herr C. v. VOIT machte weitere Mittheilungen über die in seinem Laboratorium seit längerer Zeit in Gang befindlichen Untersuchungen „über die Glykogenbildung nach Aufnahme verschiedener Zuckerarten". Dieselben sollen in der Zeitschrift für Biologie veröffentlicht werden.

Sitzung vom 4. Juli 1891.

1. Herr H. SEELIGER bespricht eine von der Kopenhagener Akademie mit der goldenen Medaille gekrönte Arbeit des Herrn Dr. Eduard Frhrn. v. HAERDTL, Dozenten für Astronomie an der k. k. Universität zu Innsbruck: „Skizzen zu einem speziellen Fall des Problems der drei Körper". Dieselbe soll in die Denkschriften aufgenommen werden.

2. Herr W. v. GÜMBEL legt eine Abhandlung des auswärtigen Mitgliedes, Herrn Prof. Dr. F. v. SANDBERGER in Würzburg, vor: „über den Erzgang der Grube Sagra

Familia in Costarica und dessen Bedeutung für die Theorie der Erzgänge".

3. Herr W. Dyck überreicht eine Abhandlung des correspondirenden Mitgliedes der Classe, Herrn Prof. Dr. Alex. Brill in Tübingen: „über das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle".

en Erzgang der Grube Sagra Familia in ı und dessen Bedeutung für die Theorie der Erzgänge.

Von F. v. Sandberger.

(Eingelaufen 4. Juli.)

ebirge der Republik Costarica (Central-Amerika) ıach den bisherigen Forschungen aus verschieden-steinen. Als ältere werden Granit und krystallinische ngegeben, von welchen goldhaltige Alluvionen ab-die früher ergiebig gewesen sein müssen, da Gold-n alten Indianer-Gräbern in nicht unbeträchtlicher funden worden ist.[1]) Bergbau auf Gold scheint esem Gebiete nicht betrieben worden zu sein. Die lesteine, welche jene an vielen Orten durchbrochen nd unter sich wieder von verschiedenem Alter. rnblende-Andesiten, die z. B. am Vulkane Chiriqui[2]) en, zuweilen aber auch Augit und Quarz enthalten,[3])

Wagner, Naturwissensch. Reisen im tropischen Amerika,

. daselbst S. 254 ff.

ümbel. Diese Sitzungsber. 1881 S. 357.

kommen reine Augit-Andesite von basaltähnlichem Habitus[1]) vor, jenen ähnlich, welche M. Wagner[2]) in der Umgebung des Cotopaxi gefunden hat. In der mir vorliegenden Literatur ist aber nirgends die Rede von dem Vorkommen letzterer Gesteine in den Urwäldern des westlichen, dem Stillen Ocean zugekehrten Theiles von Costarica, wo sie indess offenbar eine wichtige Rolle spielen. Man wurde erst auf sie aufmerksam, als 1866 ein Erzgang in ihnen entdeckt wurde, der sich als goldhaltig erwies. Es bildete sich ein Consortium, welches unter Leitung des schon vor längerer Zeit verstorbenen trefflichen Bergingenieurs L. Eich aus Oberhessen zwei Jahre lang auf demselben Bergbau betrieb. Die „Sagra Familia" benannte Grube liegt, eine Tagereise von der Stadt Esparsa entfernt, einsam im dichten Urwalde. Das am Ausgehenden mit anderen Zersetzungsproducten der Gangmasse gefundene hochsilberhaltige Gold wurde natürlich in der Teufe nicht mehr getroffen, sondern es traten hier Schwefelmetalle an dessen Stelle, welche behufs der Amalgamation aufbereitet und geröstet werden mussten, aber eine wesentlich geringere Ausbeute ergaben. Die Grube wurde daher, wie mir die s. Z. dort wohnende Wittwe des ehemaligen Leiters mittheilte, 1868 aufgegeben.

Die merkwürdige Mineralassociation, welche den Gang ausfüllt, hatte mich schon bei der ersten Besichtigung der Eich'schen Sammlung lebhaft interessirt[3]) und ich habe daher die Gelegenheit wahrgenommen, letztere für das unter meiner Leitung stehende mineralogisch-geologische Institut der Universität Würzburg zu erwerben. Schriftliche Aufzeichnungen über die Grube Sagra Familia fanden sich im Eich'schen Nachlasse nicht mehr, was sehr zu bedauern ist.

---

1) Ders. daselbst S. 362 ff.
2) A. a. O. S. 531 ff.
3) Jahrb. f. Min. 1874 S. 174.

I. Das Nebengestein des Ganges.

Die aschgraue sehr feinkörnige Grundmasse lässt mit der Lupe zahlreiche kleine, oft noch sehr gut die Viellingsstreifung zeigende farblose Krystalle entdecken, welche zweifellos trikliner Feldspath sind, auch Magneteisenkörnchen erkennt man sehr deutlich, mattschwarze Körnchen, die zuweilen Umrisse der Augit-Form zeigen, fehlen ebenfalls nicht. Viele davon sind aber bereits grün gefärbt und deutlich in Umwandlung zu schuppigem Delessit begriffen, welcher auch in kleinen Mandeln auftritt, die einen Kern von weissem Kalkspath umschliessen. Auf noch stärkere Zersetzung deuten die in ihrer Nähe nicht seltenen rothen Fleckchen, welche die Ausscheidung von Eisen als Oxyd aus Delessit darthun. Seltener zeigen sich auch fettglänzende Körner mit hexagonalem Umrisse fest in der Masse eingewachsen, welche primitiv gebildetem Quarze angehören.

Der mikroskopische Schliff bestätigt die mit der Lupe gemachten Beobachtungen und erweitert sie dahin, dass die Zwischenmasse aus schmutzig grauem Glas neben sehr kleinen Feldspathen und Magneteisen besteht, er lässt seltener auch farblose Durchschnitte von Apatitkrystallen bemerken, welche aber nicht wie gewöhnlich lang-, sondern kurzsäulenförmig erscheinen. Die Feldspathe umschliessen zuweilen kleine Glaszellen, die Augite öfter Magneteisenkörner, Chrysolith war nicht nachzuweisen und ebensowenig Nephelin, auch gelatinirt das Gesteinspulver nicht mit Salzsäure.

Ausser den Gesteinsproben befanden sich von demselben Fundorte, aber offenbar aus dem Schutt von etwas grobkörnigeren Varietäten ausgelesene Krystalle des Feldspaths und des Augits in der Sammlung. Die ersteren zeigen, obwohl schon angegriffen und matt, doch zum Theil noch sehr

gut die Flächen $\infty\breve{P}\infty \cdot \infty'P \cdot \infty P' \cdot oP$ und $\bar{P}\infty$, stets in deutlicher Verwachsung nach dem brachydiagonalen Flächenpaare. Sie schmelzen vor dem Löthrohr unter rothgelber Färbung der Flamme zu weissem blasigem Email und werden beim Kochen von concentrirter Salzsäure völlig zersetzt, sind demnach Labradorit.

Der Augit erscheint in kleinen, nur im frischesten Kerne noch grünlich schwarzen Krystallen der Combination $\infty P \cdot \infty P\infty \cdot \infty P\infty \cdot P$, welche gewöhnlich zu Zwillingen nach $\infty P\infty$ verbunden sind, er lässt ausser den gewöhnlichen Bestandtheilen einen nicht unbeträchtlichen Gehalt an Mangan bemerken. Magneteisen ist, wie schon oben erwähnt, sehr gewöhnlich in ihm eingewachsen.

Das Gestein ist also ein mikroporphyrischer quarzhaltiger Augit-Andesit, welcher in Bezug auf seine Zusammensetzung, in welcher manganhaltiger Augit und Labradorit die wichtigste Rolle spielen, schon länger bekannten des ungarisch-siebenbürgischen Erzgebirges z. B. aus der Gegend von Nagyag, Felsöbanya, Nagybanya u. s. w. ungemein nahe steht,[1]) die dort nicht mit solchen durch Uebergänge verbunden sind, die statt des Augits manganhaltige Hornblende führen, wie z. B. der Andesit von Kapnik. Die häufige Umsetzung des Augits zu Delessit und Kalkspath bedingt aber auch eine gewisse Aehnlichkeit mit manchen Augit-Porphyren[2]) und Melaphyren.

Von grossem Interesse ist das chemische Verhalten des Gesteins. Kocht man das Pulver desselben einen Tag lang mit destillirtem Wasser aus und lässt es dann längere Zeit stehen, so hat das Wasser die löslichen Salze, vorwiegend schwefelsaures Natron, aber auch etwas Chlornatrium, voll-

1) Ich konnte mich hiervon an einer Suite überzeugen, welche ich vor Jahren von Herrn Prof. v. Szabo in Pesth erhielt.

2) Kjerulf Christiania-Silurbecken S. 21 f.

ständig gelöst und dieselben sind dann leicht nachzuweisen. Zugleich geht aber auch organische Substanz in Lösung und scheidet sich am Rande der Schale als brauner Ueberzug wieder ab. Ebenso deutet das Verhalten im Glührohre auf ziemlich viel organische Substanz, welche vermuthlich einem Körper aus der Ulminreihe angehört, da neben Wasserdampf starker, dem Paraffin ähnlicher Geruch zu bemerken ist.

Mit kalter Salzsäure entwickelt das Gesteinspulver Kohlensäure, von dem bereits oben erwähnten Kalkspath herrührend, aber keinen Schwefelwasserstoff, der auch beim Erwärmen ebensowenig auftritt, als rothe Dämpfe bei Einwirkung von Salpetersäure. Fertig gebildete Schwefelmetalle sind daher im Gesteine nicht vorhanden.

Salzsäure zersetzt das Pulver bei fortgesetztem Kochen völlig und hinterlässt nur pulverige Kieselsäure und Quarzsplitter, welche beim Reiben mit dem Glasstabe knirschen. Beim Schlämmen bleiben auch nur diese, aber kein Zirkon, Rutil oder Turmalin zurück.

Die Lösung enthielt nach der relativen Menge geordnet: Kieselsäure, Kalk, Natron, Eisenoxydul und Oxyd, Thonerde, Mangan, Titansäure, Phosphorsäure, Kupferoxyd, Antimon, Arsen, Zink, Magnesia, Kali, Blei und Baryt. Silber und Gold waren auf diesem Wege in 10 g nicht zu entdecken. Fast alle diese Elemente treten in mannigfaltigen Verbindungen auf dem Erzgange auf.

Ehe dieser aber genauer besprochen wird, mag es nützlich erscheinen, ein in mehreren Abänderungen in der Nähe, an einem Pina grande benannten Fundorte beobachtetes Gestein zu erwähnen, in welchem aber kein Erzgang erschürft wurde. Die frischeste desselben ist tief schwarzgrau, noch sehr hart = 6, gibt im Glührohre nur ganz wenig Wasser ab und entwickelt keinen brenzlichen Geruch, ebensowenig braust sie mit kalter Salzsäure. Der Habitus ist aber ganz jener des Gesteins von Sagra Familia, nur fehlt

der Quarz im Gemenge gänzlich. Die Augite sind grösser und Delessit-Mandeln seltener und dunkler gefärbt als in jenem. Die Augite zeigen durchweg die Combination $\infty P\infty \cdot \infty P \cdot \infty P\infty$ mit bald stärkerer bald geringerer Entwickelung von P; Zwillinge sind weniger häufig zu bemerken. Mangan ist in ihnen nicht zu entdecken. Der Schliff ist jenem des ersten Gesteins im höchsten Grade ähnlich, nur ist Glas in der Zwischenmasse und in den Feldspathen reichlicher vorhanden. In der salzsauren Lösung des Gesteins fehlen Mangan, Zink, Kupfer, Antimon und Arsen gänzlich, die übrigen Bestandtheile sind dieselben wie oben.

Die zweite aschgraue Varietät ist schon etwas zersetzt und braust mit kalter Salzsäure, der Feldspath erscheint durchweg angegriffen und matt, die Augite sind zum Theil noch frisch, zum Theil in Delessit umgewandelt, welcher auch in grösseren und kleineren Mandeln zu beobachten ist. Ausserdem treten aber bis haselnussgrosse Ausscheidungen eines weissen fast dichten, nur stellenweise verworren strahligen Minerals auf. Dasselbe gibt im Glührohre ziemlich viel Wasser ab, schmilzt vor dem Löthrohre nach vorherigem Aufblähen unter intensiv rothgelber Färbung der Flamme zu weissem blasigem Email und gelatinirt mit heisser Salzsäure ausgezeichnet. Ich kann es daher nur für Mesotyp halten, wofür auch die Härte spricht. Der stark angegriffene Zustand des Feldspaths (Labradorits) lässt nicht bezweifeln, dass sich dieser Zeolith auf Kosten desselben gebildet hat.

Noch stärker zersetzt ist die dritte schmutzig röthlichgraue, thonig riechende und weiche Varietät, ein wahrer, von Hunderten erbsengrosser Mesotyp-Mandeln erfüllter Mandelstein, in dessen weicher Grundmasse die Augite und Feldspathe nur noch an den Umrissen ihrer Krystallformen zu erkennen sind. M. Wagner erwähnt bereits ein solches Gestein aus der Nähe der Panama-Eisenbahn.

II. Die Ausfüllung des Ganges.

Nach dieser Abschweifung kehre ich zu der Besprechung des Ganges zurück, dessen Mächtigkeit nach den vorliegenden Stücken zu schliessen höchstens 0,2 m betragen zu haben scheint, und gebe zunächst eine Anzahl von Beispielen für die Paragenesis desselben.

1. 1) Grobkörniger weisser Kalkspath I, in Drusen im Grundrhomboeder krystallisirt und häufig überzogen von einer Lage von 2) lichtem Braunspath. 3) Quarz II in drusigen Ueberzügen. 4) Weisser Aragonit in strahlig gruppirten Nadeln.

2. 1) Derselbe Kalkspath im Gemenge mit graulichweissem Quarz I mit eingesprengten Kiesen, der ihn an vielen Stellen völlig verdrängt. In Drusen 2) Quarz II ($\infty R + R$) überzogen von Wad und jüngstem Kalkspath III ($-2R$).

3. 1) Weisser Quarz im Gemenge mit 2) viel Rosenspath. In Drusen über letzterem 3) Quarz II ($\infty R + R$). 4) Manganocalcit in rosenrothen Büscheln.

4. 1) Zersetzter Rosenspath. 2) Quarz II stellenweise mit Hervorragungen tafelartiger, jetzt ganz von ihm verdrängter Krystalle (Schwerspath?). 3) Manganbraunspath (R) in Gruppen und in hohlen Pseudomorphosen nach Kalkspath II ($-2R$).

5. 1) Weisser Quarz mit eingesprengten Schwefelmetallen (Fahlerz, Zinkblende, Kupferkies) in zusammenhängenden Lagen oder in unregelmässig gestalteten Nieren, welche von 2) Rosenspath mit denselben Erzen rings umgeben stellenweise eine ausgezeichnete Cocarden-Structur annehmen. In Drusen über 3) Quarz II. 4) Manganbraunspath (R) und Büschel von Manganocalcit.

8. Enargit. Findet sich nur an einem Gangstücke derb und in Verwachsung mit der gleich zu besprechenden Zinkblende. Das Verhalten des Erzes im Glührohre und seine deutliche Spaltbarkeit lässt über die Natur desselben keinen Zweifel. Es enthält neben Kupfer, Arsen und Eisen auch Blei, und zwar wie es scheint etwas mehr als der Enargit der Sierra Famatina in Argentinien.

9. Zinkblende. Tief schwärzlichbraun, in dünnen Blättchen mit honigbrauner Farbe durchsichtig, kommt dieselbe in grob krystallischen Massen von hohem Glanze und ausgezeichneter Spaltbarkeit vor und bildet mit den vorstehend geschilderten Schwefelmetallen gemengt Erzmittel. Sie ist eigenthümlich zusammengesetzt und namentlich durch einen höheren Mangangehalt ausgezeichnet, als ich ihn bisher in Blenden beobachtet habe,[1]) daneben auch wie der Enargit durch einen kleinen Gehalt an Blei, der von Einmengungen nicht herrühren kann, da Bleiglanz auf dem Gange gänzlich fehlt. Sonst enthält die Zinkblende Zink, Eisen und etwas Cadmium, wie gewöhnlich, Silber und Zinn wurden nicht nachgewiesen und Kupfer nur in Spuren.

10. Gyps, meist mit Malachit oder Kupferlasur gemengt, erscheint in Form kleiner stark in der Richtung der Hauptaxe verlängerter Nadeln ∞P — $P \cdot {}^1/_3 P\infty$, ist aber in Folge seiner Löslichkeit in Wasser nur in geringer Menge erhalten geblieben.

11. Kupferlasur. In kleinen Drusen über Malachit auf zersetztem Enargit oft in prächtig blauen, aber kleinen Krystallen $\infty P \cdot oP \cdot {}^1/_3 P\infty$, $\infty P\infty$ ist kaum angedeutet.

12. Malachit. In dünnen Ueberzügen auf demselben Schwefelmetalle, häufiger aber auf Kupferkies, sowie auf ge-

---

1) Den höchsten (2,66%) hat man in der schwarzen Blende von Breitenbrunn (Christophit Breith.) gefunden, welche auch in Cornwall und bei Villeder (Dép. Morbihan) vorkommt.

diegenem Kupfer und in kugeligen Häufchen neben und über Pyromorphit auf Klüften von derbem Quarz I.

13. Weissbleierz mit den erwähnten Kupfercarbonaten derb und in sehr hübschen, aber kleinen Krystallen $\infty\breve{P}\infty \cdot \infty P \cdot 0P \cdot 2\breve{P}\infty$ auf Enargit.

14. Pyromorphit. In langen farblosen bis braunen Säulchen $\infty P \cdot 0P$ auf Klüften von Quarz. Enthält nur Spuren von Kalk und kein Arsen. Das Bleioxyd rührt nach dem begleitenden Malachit zu schliessen aus Enargit her, die Phosphorsäure ist im Apatit des Nebengesteins nachgewiesen.

15. Gediegen Kupfer in traubigen und kugeligen Ueberzügen auf Quarz, scheint Seltenheit.

16. Silbergold. Dünne, sehr licht weisslichgelbe Blättchen, welche ausnahmlos ein schiefwinkelig gestricktes, äusserst feines, zuweilen auch gekrümmten Federfahnen ähnliches Balkenwerk darstellen, wie diess in Folge Wachsthums nach den trigonalen Zwischenaxen[1]) bei gediegen Silber häufig auftritt. Die Erscheinung ist mir aber bei Gold niemals in solcher Schönheit zu Gesicht gekommen. Ausserdem kommen auch gekrümmte Drähte vor. Die Analyse ergab in 100 Theilen Silber 43,05, Gold 56,95. Stets in zerfressenem mit Wad gemengtem Quarze.

17. Kupfermanganerz, oft in ziemlich dicken traubigen Ueberzügen auf Klüften von Quarz I und über Malachit, aus dem es sich gebildet zu haben scheint. Schon früher[2]) habe ich auf diese Bildungsweise aufmerksam gemacht.

18. Schuppiges Wad erfüllt in oberster Teufe alle Höhlungen des Quarzes als Restproduct der Oxydation der manganhaltigen Carbonate.

---

1) Ad. Knop, Molekular-Constitution und Wachsthum der Krystalle S. 54 Fig. 10 und S. 68.

2) Untersuchungen über Erzgänge I S. 123.

Wie man sieht, sind auf dem Gange sämmtliche im Nebengesteine nachgewiesenen Elemente mit Ausnahme der Thonerde, Titansäure und der Alkalien in Form von freier Kieselsäure, sowie von kohlensauren und Schwefel-Verbindungen wieder zur Ablagerung gekommen und zwar in bestimmter Reihenfolge. Die Hauptmasse des verfügbaren Kalkes findet sich im älteren Kalkspath, die bei Zersetzung des Feldspaths abgeschiedene Kieselsäure im Quarz I wieder, doch blieben Lösungen derselben auf dem Gangraume noch längere Zeit zurück, welche theils mit anderen Elementen, namentlich Manganoxydul und Eisenoxydul zur Bildung anderer Verbindungen verbraucht wurden, theils selbstständig als jüngere Kalkspathe und Quarze wieder zum Vorschein kommen. Der jüngere Quarz erscheint stets in der auf den Schemnitzer Gängen allgemein verbreiteten Form. Das Manganoxydul, welches den reichlich vorhandenen Rosenspath (s. oben), einen der charakteristischsten Bestandtheile des Erzgangs geliefert hat, ist schwerer löslich als der kohlensaure Kalk und erscheint deshalb später im Gangraume. Es rührt hier ebenso zweifellos aus manganhaltigem Augit her, wie anderswo z. B. zu Kapnik, Schemnitz, Vöröspatak, Offenbanya u. a. O. aus manganhaltiger Hornblende und auf gewissen Freiberger Gängen aus manganhaltigem Glimmer. Reines Schwefelmangan, welches anderwärts z. B. zu Offenbanya, Kapnik und Nagyag, in Mexico u. s. w. den Manganspath begleitet, kommt auf Sagra Familia nicht vor, wohl aber eine ungewöhnlich hoch manganhaltige Zinkblende.

Da sich im Nebengesteine reichlich schwefelsaures Natron und organische Substanz befindet, so waren alle Bedingungen zur Bildung von Schwefelnatrium vorhanden. Die Schwermetalle, welche vermuthlich als kieselsaure oder kohlensaure Salze aus dem zersetzten Nebengesteine auf den Gangraum geführt wurden, konnten daher alsbald als Schwefelmetalle niedergeschlagen werden und müssen schon darum auf diesem

Wege gebildet sein, weil Schwefelzink aus anders beschaffenen, d. h. sauren Lösungen überhaupt nicht ausgefällt wird. Die Schwefelmetalle treten, wie ihre stete Verwachsung mit einander zeigt, gleichzeitig auf und auf sie folgen nur noch jüngere Generationen von Quarz und kohlensauren Salzen. Kupfer, Zink, Blei, Antimon und Arsen sind schon vollständig ausgefällt und haben sich ihrer chemischen Affinität gemäss in Fahlerz und den sehr seltenen, ähnlich zusammengesetzten Enargit (s. oben), Kupferkies und Zinkblende gesondert, wobei Antimon, Arsen und Blei ausschliesslich zur Bildung von Fahlerz resp. Enargit, der Rest des Kupfers aber zu solcher von Kupferkies in Anspruch genommen wurde. Der letztere enthält auch die geringen Mengen von Silber (und wohl auch Gold), welche vorhanden waren. Ich werde auf letztere später zurückkommen.

Da sich der Gang in der Teufe immer weniger mächtig zeigte und auf ihm Kalkspath, nicht aber Aragonit als ältestes Glied in Menge auftrat, so erscheint die plutonische Hypothese der Bildung von Erzgängen durch aufsteigende heisse Quellen, wie für fast alle anderen Gänge so auch hier ausgeschlossen,[1]) sie wird ja auch durch die einfache Thatsache widerlegt sein, dass sich alle Gangmineralien ganz ungezwungen durch Auslaugung des Nebengesteins durch Flüssigkeiten von keinenfalls hoher Temperatur erklären lassen, ganz so wie ich diess auch für die Gänge von Schapbach, Wolfach, Wittichen, Freiberg, Joachimsthal, Přibram u. s. w. nachgewiesen habe. Dass diese Anschauung noch nicht überall durchgedrungen ist, ist wohl darin begründet, dass das Nebengestein, wie es leider noch häufig geschieht, gar nicht oder nur oberflächlich untersucht worden ist.

---

1) Die wenigen Fälle, in welchen die Theorie Platz greifen muss, glaube ich in meinen Untersuchungen über Erzgänge II S. 160 f. vollkommen gewürdigt zu haben, die nicht gar seltenen Descensions-Gänge ebenfalls daselbst S. 243 ff.

Die Vergleichung des Ganges von Sagra Familia mit jenen von Schemnitz, Felsöbanya, Kapnik, Nagyag, Vöröspatak und gewissen Nevadas (Austin) und Mexicos, welche ebenfalls reichlich kohlensaures und kieselsaures Manganoxydul nebst übereinstimmenden Erzen führen und in Andesiten mit manganhaltiger Hornblende[1]) oder Augit aufsetzen, ergibt die allergrösste Aehnlichkeit, die man ja in jeder grösseren Sammlung leicht constatiren kann. Nur der sonst überall vorkommende Bleiglanz ist auf Sagra Familia nicht vertreten. In älteren Gesteinen kommen Gänge mit ähnlicher Art der Ausfüllung nur äusserst selten vor, wie manche bei Freiberg. Es wäre gewiss am Platze, diese unter dem Namen „Manganspath-Formation" zu vereinigen und als besondere Abtheilung von Breithaupt's „klinoëdritischer Blei-Zink-Formation" zu unterscheiden.

Was die secundären Mineralien der oberen Teufe betrifft, so ergaben sich kaum besonders interessante Thatsachen. Die kupfer- und bleihaltigen Erze liefern wie gewöhnlich zunächst schwefelsaure Salze, welche durch den reichlich vorhandenen kohlensauren Kalk in Gyps und kohlensaure Metalloxyde umgesetzt werden. Die edlen Metalle scheiden sich, weil unoxydirbar, als Silbergold ab, ein Theil des Malachits mag wohl durch reichlich vorhandene organische Substanz zu gediegenem Kupfer reducirt worden sein, da älteres Rothkupfererz, welches etwa durch Schwefelsäure in schwefelsaures Kupferoxyd und gediegenes Metall gespalten worden sein könnte, auf dem Gange nicht nachzuweisen war. Das kohlensaure Manganoxydul geht durch Oxydation zu Hyperoxyd in Wad über. Nur ein Theil des Kupfers ist auch mit ebensolchem Hyperoxyd zu einer Verbindung, dem Kupfermanganerz zusammengetreten. Damit glaube ich die Verhältnisse des Ganges vollständig erläutert zu haben.

1) Die manganreichste von diesen (8% Mn O) ist wohl Breithaupt's Gamsigradit (Berg- u. Hüttenmänn. Zeitung XX. S. 33).

Ueber das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle.

Von A. Brill in Tübingen.

(Eingelaufen 4. Juli.)

Das Verfahren, nach welchem man eine algebraische Function von einer Veränderlichen in der Nähe einer Stelle, wo sie einfach oder in höherer Ordnung verschwindet, in Potenzreihen zu entwickeln pflegt, rührt bekanntlich von Newton her, der in der Abhandlung „Analysis per quantitatum series, fluxiones“ etc. gelegentlich der Auflösung numerischer Gleichungen auch den Fall betrachtet, dass die Coefficienten einer Gleichung nicht Zahlen, sondern von einer Veränderlichen (species indefinita) abhängige Grössen sind. Danach nimmt jede Wurzel die Form einer nach ganzen oder gebrochenen Potenzen der Variabeln fortschreitenden Reihenentwicklung an; die Coefficienten lassen sich durch Einsetzen bestimmen, wenn zuvor die Bruchformen der Exponenten mit Hilfe des bekannten Parallelogramms ermittelt sind.

Neuere Arbeiten haben sich mit dem Nachweis des Convergenzbereiches dieser Reihen und mit der Beseitigung des Parallelogramms beschäftigt, aber die Grundlage unberührt gelassen. Indessen ist das Newton'sche Verfahren ein indirectes und steht gegenüber einem, das mit identischen Umformungen operirt, in mancher Hinsicht zurück.

Wenn man jede Wurzel ohne Rücksicht auf die bereits gefundenen für sich bestimmt, so bedarf es, bei strenger Behandlung, nachträglich des Beweises der Vollzähligkeit; im Falle einer irreducibeln Gleichung des mühsamen Nachweises, dass alle verschieden sind u. s. w. Dies wird entbehrlich, wenn man jene Reihenentwicklungen nicht durch Verification vorläufiger Annahmen herstellt, sondern durch identische Zerlegung der linken Seite derjenigen Gleichung

$$F(xy) \quad 0,$$

die in der Umgebung der Stelle, für welche die ganze Function F von x und y verschwindet, y als algebraische Function von x definirt, wobei denn, wenn etwa $x \quad 0$, $y \quad 0$ diese Stelle ist, soviele Linearfactoren von der Form:

$$y - \mathfrak{P}(x)$$

entstehen — unter $\mathfrak{P}$ eine mit x verschwindende Potenzreihe verstanden — als Entwicklungen von y nach Potenzen von x existiren, die jene Gleichung befriedigen.

Soviel ich weiss, hat man eine solche directe Zerlegung noch nicht versucht, wiewohl der Gedanke nahe liegt und auch für die Theorie der Functionen von zwei Veränderlichen verwerthbar ist. Eine gewisse Schwierigkeit, der man gleich anfangs begegnet, führte mich auf einen für die Functionentheorie bedeutsamen Satz, der, wie ich später bemerkte, bereits von Herrn Weierstrass in allgemeinster Form ausgesprochen worden ist, und der die Ueberführung der Function $F(xy)$ in eine nothwendige Form bezweckt. An dieser „reducirten“ Form vollzieht sich dann die Spaltung in Linearfactoren ohne Weiteres, ausgenommen den Fall, dass sich die Glieder niederster Dimension zu einer Potenz vereinigen. Die quadratische Transformation, deren man sich sonst in diesem Fall zur Trennung der Wurzeln zu bedienen pflegt, reicht nicht aus, wenn es sich darum handelt, den Grad hinsichtlich einer der Variabeln zu erhalten. Ich benutze eine solche

von höherer Ordnung, die eindeutig nicht umkehrbar ist. Es ist dann nur noch zu zeigen, dass der Spaltungsprocess convergente Factoren liefert.

Die Ausführung enthält das Folgende.

1.

Wenn für $x = 0$, $y = 0$ die ganze Function, oder, wie ich allgemein annehmen will, die gewöhnliche Potenzreihe nach x, y $F(xy)$ verschwindet, so kann man durch eine Transformation von der Form:

$$x' = x + ay$$

die Reihe F so umgestalten, dass das Aggregat der Glieder niederster (n-ter) Dimension für $x = 0$ sich auf y^n reducirt. Multiplicirt man dann F mit einer Reihe von der Form:

$$\alpha = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots,$$

wo die Indices die Dimension des betreffenden Gliedes in x, y angeben, so lässt sich bei passender Bestimmung der Coefficienten der α_i das Product in die Form einer Reihe f bringen:

$$\alpha F = f = f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + \cdots,$$

welche y in nicht höherer als der n-ten Potenz enthält. Vergleicht man links und rechts die Glieder gleichhoher Dimension, so erhält man gleichzeitig die Coefficienten der Polynome α_i und der $f^{(i)}_{n-1}$ in eindeutiger Weise. Ich übergehe hier das Nähere dieses Verfahrens sowie auch den leicht zu erbringenden Nachweis, dass es eine innerhalb gewisser Grenzen in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ convergente Reihe f liefert, nachdem dies in anderer Weise von Herrn Weierstrass (Functionentheorie, 1886, S. 107) und in weiterer Ausführung für den Fall von zwei Veränderlichen von Herrn Stickelberger (Math. Annalen Bd. 30) gezeigt worden ist.

Ordnet man f nach Potenzen von y, so kommt, weil y^n nur einmal, nämlich in dem Term niederster Dimension auftritt,

$$\begin{aligned} f &= f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + \cdots \\ &= y^n + y^{n-1} x \mathfrak{P}'(x) + y^{n-2} x^2 \mathfrak{P}''(x) + \cdots + x^n \mathfrak{P}^{(n)}(x), \end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen von x sind.

Wie sich nun eine ganze Zahl dadurch in Primfactoren zerlegen lässt, dass man sie zunächst in das Product von zwei kleineren verwandelt, dann mit diesen so fortfährt, bis man zuletzt bloss Primzahlpotenzen erhält, so kann man die hinsichtlich y ganze Function f zunächst in zwei Entwicklungen zu zerlegen verlangen, die in y von niederem Grade sind als f und wiederum in „reducirter" Form erscheinen, und mit diesen so fortfahren.

Diese Aufgabe lässt immer und nur eine Lösung zu, wenn die Anfangsglieder φ_p und ψ_q der neuen Entwicklungen:

$$\begin{aligned} f = \varphi \psi = &(\varphi_p + x^2 \varphi_{p-1} + x^3 \varphi'_{p-1} + \cdots) \\ &(\psi_q + x^2 \psi_{q-1} + x^3 \psi'_{q-1} + \cdots), \end{aligned}$$

wo $$f_n = \varphi_p \psi_q$$

also $$p + q = r$$

ist: 1) durch irgend welche vorgängige Spaltung des homogenen Ausdrucks f_n ermittelt sind und 2) keinen Factor gemeinsam haben.

Vergleicht man nämlich beiderseits die Glieder gleichhoher Dimension, so kommt

$$\begin{aligned} f_n &= \varphi_p \psi_q \\ f_{n-1} &= \varphi_p \psi_{q-1} + \psi_q \varphi_{p-1} \\ f'_{n-1} - x \varphi_{p-1} \psi_{q-1} &= \varphi_p \psi'_{q-1} + \psi_q \varphi'_{p-1} \\ f''_{n-1} - x(\varphi_{p-1} \psi'_{q-1} + \psi_{q-1} \varphi'_{p-1}) &= \varphi_p \psi''_{q-1} + \psi_q \varphi''_{p-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aus diesen identischen Gleichungen lassen sich aber, nach einem bekannten Satze der Algebra, die hinsichtlich

x, y ganzen homogenen Functionen $\varphi_{p-1}, \psi_{q-1}$; $\varphi'_{p-1}, \psi'_{q-1}$; $\cdots$ paarweise der Reihe nach eindeutig bestimmen, wenn man die aus den vorhergehenden berechneten jedesmal in die folgenden Gleichungen einführt. Nur wenn φ_p und ψ_q einen Theiler gemeinsam haben, also insbesondere wenn f_n die n-te Potenz eines Linearfactors ist, versagt das Verfahren. Hat aber f_n ungleiche Linearfactoren, so kann man die Zerlegung von f soweit fortsetzen, bis die Einzelreihen mit Potenzen von Linearfactoren beginnen, und bei bloss ungleichen Factoren von f_n wird durch wiederholte Spaltung f in lauter Linearfactoren (hinsichtlich y) von der Form zerlegt:

$$y + a_0 x + a_0' x^2 + a_0'' x^3 + \cdots,$$

wo die a_0 Constante sind.

Für diese zunächst formale Operation ist später der Nachweis der Convergenz zu erbringen.

2.

Vorher möge der Fall untersucht werden, dass f_n einen p-fachen Factor ($p > 1$):

$$\varphi_p = (y + ax)^p$$

besitzt. Die zugehörige Entwicklung, von den anderen abgetrennt, sei von der Form:

$$\varphi = (y + ax)^p + x^2 \Phi_{p-1} + x^3 \Phi'_{p-1} + \cdots$$

Setzt man

$$y + ax = y_1, \qquad x = x_1,$$

so gewinnt φ die Gestalt:

$$\varphi = y_1^p + x_1^2 \varphi_{p-1} + x_1^3 \varphi'_{p-1} + \cdots$$

Man ordne jetzt die Glieder nach ihrem Grad in x_1 und schreibe der Reihe nach diejenigen an, deren Coefficienten von Null verschieden sind

$$y_1^p;\ x_1^\alpha y_1^{p-\beta};\ x_1^\gamma y_1^{p-\delta};\ x_1^\varepsilon y_1^{p-\zeta};\ \cdots$$

wo $\alpha - \beta > 0;\ \gamma - \delta > 0;\ \varepsilon - \zeta > 0;\ \cdots$

ist und $\alpha < \gamma \leq \varepsilon \leq \cdots$

ebenso wie $\beta, \delta, \zeta, \cdots$ ganze positive (von Null verschiedene) Zahlen sind. Nun bilde man die (unächten) Brüche:

$$\frac{\alpha}{\beta};\ \frac{\gamma}{\delta};\ \frac{\varepsilon}{\zeta};\ \cdots,$$

und nehme den dem Werth nach kleinsten. Dies erfordert jedenfalls die Aufstellung nur einer endlichen Zahl von Quotienten, weil ihr Werth mit wachsender Dimensionszahl zunimmt, indem der Zähler wächst, während der Nenner die Grösse p nicht überschreitet.[1])

Sei dieser Quotient, auf die einfachste Form gebracht, gleich $\iota/\varkappa$, seien also ι und $\varkappa$ theilerfremd und

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\iota}{\varkappa};\ \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\iota}{\varkappa};\ \frac{\varepsilon}{\zeta} > \frac{\iota}{\varkappa};\ \cdots$$

Führt man dann in die vorliegende Reihe neue Variabelen ein mittelst der Formeln

$$y_1 = y_2 x_2^{\iota - 1}$$
$$x_1 = x_2^{\varkappa},$$

so wird das Glied

$$y_1^p = y_2^p x_2^{p(\iota - 1)}$$

hinsichtlich x_2, y_2 von der Dimension $p\iota$, während die Dimension irgend eines anderen Gliedes

$$y_1^{p-\nu} x_1^{\mu}$$

gleich
$$(p - \nu)\iota + \varkappa\mu = p\iota + \nu\varkappa\left(\frac{\mu}{\nu} - \frac{\iota}{\varkappa}\right),$$

also höher als $p\iota$ wird, ausser für diejenigen Glieder, für welche, wie für das den Zahlen $\iota, \varkappa$ entsprechende, jener

1) Man hat höchstens bis zu demjenigen Grad in x_1 fortzuschreiten, der durch die in dem Bruch $\frac{\alpha}{\beta}p$ enthaltene ganze Zahl sich ausdrückt.

Quotient den Werth $\iota/\varkappa$ besitzt, wo dann die Dimension ebenfalls gleich $p\iota$ wird. Es existirt also in der transformirten Reihe mindestens noch ein Glied von der Dimension des Anfangsgliedes, während keines von niedrigerer Dimension ist. Aus diesen zweien lässt sich ein Linearfactor von der Form:

$$y_2 + b\,x_2$$

mit von Null verschiedenem Coefficienten b oder doch eine Potenz eines solchen ausscheiden, was nun, nach Massgabe von § 1, wieder zur Spaltung der Reihe φ verwendet werden kann. Denn die Glieder $(p+1)$-ter und höherer Dimension enthalten y_2 höchstens in der $(p-1)$-ten Ordnung; nach Ausscheidung der $p(\iota-1)$-ten Potenz von x_2 besitzt also φ in x_2, y_2 die in § 1 zu Grunde gelegte reducirte Form:

$$\varphi = x_2^{p\iota-1}(\psi_p + x_2^2\,\psi_{p-1} + x_2^3\,\psi'_{p-1} + \cdots).$$

Befindet sich unter den Linearfactoren von ψ_p einer, der nur einmal vorkommt:

$$y_2 + b\,x_2,$$

so lässt sich nach jenem Verfahren aus ψ der Factor absondern

$$y_2 + b\,x_2 + b' x_2^2 + \cdots,$$

welcher, nach Vereinigung mit dem Factor $x_2^{\iota-1}$ durch Rücksubstitution von x und y die Gestalt annimmt

$$y_1 + b\,x_1^{\frac{\iota}{\varkappa}} + b'\,x_1^{\frac{\iota+1}{\varkappa}} + \cdots = y + ax + b\,x^{\frac{\iota}{\varkappa}} + b'\,x^{\frac{\iota+1}{\varkappa}} + \cdots,$$

was einer Entwicklung von y nach gebrochenen Potenzen von x entspricht.

Hat ψ_p dagegen $y_2 + bx_2$ zum q-fachen Factor $(q < p)$, so schlage man den gezeigten Weg zur Zerlegung der entsprechenden Entwicklung:

$$\chi = (y_2 + bx_2)^q + \chi_{q+1} + \cdots$$

von neuem ein.

Erhält man an Stelle der früheren Zahlen ι, $\varkappa$ jetzt etwa die Zahlen λ, μ, und scheidet sich aus den Gliedern niederster Dimension der neuen Reihe, die man durch die Substitution:

$$y_2 + b x_2 = y_3 x_3^{\lambda-1}$$
$$x_2 = x_3^{\mu}$$

erhält, etwa der Linearfactor $y_3 + c x_3$ aus, so bekommt man, wenn dieser nur einmal auftritt, eine Entwicklung von der Form:

$$y_3 + c x_3 + c' x_3^2 + c'' x_3^3 + \cdots,$$

die durch rückwärts einführen der alten Variabeln in:

$$y_2 + b x_2 + c x_2^{\frac{\lambda}{\mu}} + c' x_2^{\frac{\lambda+1}{\mu}} + \cdots$$

und weiterhin in:

$$y + a x + b x^{\frac{\iota}{\varkappa}} + c x^{\frac{\lambda+\mu(\iota-1)}{\varkappa\mu}} + c' x^{\frac{\lambda+\mu(\iota-1)+1}{\varkappa\mu}} + \cdots$$

übergeht.[1])

Tritt dagegen der Factor $y_3 + c x_3$ mehrfach auf, so hat man wiederum zunächst eine Substitution vorzunehmen u. s. w. Da die Ordnung des ersten Gliedes hinsichtlich y bei jeder neuen Abscheidung, die möglich wird, sich erniedrigt, so hat das angegebene Verfahren im Allgemeinen ein Ende.

1) Aus den Zahlen, vermöge deren oben die Exponenten der successiven Transformation gebildet wurden,

$$\frac{\iota}{\varkappa}, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\nu}{\varrho}, \cdots$$

entstehen diejenigen Exponenten der Reihe in x, die H. J. S. Smith „kritische", Halphen „charakteristische" Zahlen genannt hat. Unter den Brüchen:

$$\frac{\iota}{\varkappa}, \frac{\iota}{\varkappa} + \frac{\lambda-\mu}{\mu\varkappa}, \frac{\iota}{\varkappa} + \frac{\lambda-\mu}{\mu\varkappa} + \frac{\nu-\varrho}{\varrho\mu\varkappa}, \cdots$$

sind es diejenigen, für welche die hinzutretenden Factoren des Nenners: $\varkappa, \mu, \varrho, \cdots$ von 1 verschieden sind.

Nur in dem einen Fall, dass das erste Glied der transformirten Reihe selbst die Potenz eines linearen Ausdrucks $y_\nu + k x_\nu$ von der Höhe desjenigen der vorhergehenden Reihe ist, also wenn z. B. oben die Function ψ_p wieder p gleiche Factoren besitzt, ist zunächst eine Abscheidung unmöglich. Man wiederhole dann das Verfahren so oft, bis die Factoren verschieden werden. Erhält man aber immer wieder nur p-te Potenzen, so muss man schliessen, dass die vorliegende Reihe überhaupt die p-te Potenz eines Linearfactors $y + \mathfrak{P}(x)$ ist, wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe ist.

In der That, wenn ψ_p (s. oben) eine p-te Potenz ist, wie φ_p, so muss zunächst $\varkappa = 1$ sein. Denn die Rücktransformation:

$$x_2 = x_1^{\frac{\iota}{\varkappa}}\,;\; y_2 = y_1\, x_1^{\frac{1-\iota}{\varkappa}},$$

auf das Anfangsglied von φ:

$$x_2^{p(\iota-1)}\psi'_p = [(y_2 + b\,x_2)\,x_2^{\iota-1}]^p = \Sigma_\varrho \binom{p}{\varrho} (y_2\, x_2^{\iota-1})^{p-\varrho}\, b^\varrho\, x_2^{\iota\varrho}$$

($\varrho = 0, 1, \cdots p$) angewandt, liefert:

$$\Sigma_\varrho \binom{p}{\varrho} y_1^{p-\varrho}\, b^\varrho\, x_1^{\frac{\iota\varrho}{\varkappa}},$$

also nur dann ganzzahlige Exponenten von x_1, wenn:

$$\varkappa = 1$$

ist. — Wendet man ferner jene Rücksubstitution (mit $\varkappa = 1$) auf die Glieder höherer Dimension $\psi'_{p+\sigma}$ ($\sigma > 1$) an:

$$x_2^{p(\iota-1)}\psi'_{p+\sigma} = \Sigma_\varrho\, A_\varrho\, y_2^{p-\varrho}\, x_2^{\varrho+\sigma}\, x_2^{p(\iota-1)}$$

($\varrho = 1, 2, \cdots p$), wo A_ϱ ein Coefficient ist, so kommt:

$$\Sigma_\varrho\, A_\varrho\, y_1^{p-\varrho}\, x_1^{\iota\varrho+\sigma}.$$

Es ergeben sich also nur Glieder, die bei gleicher Ordnung in y_1 von höherer Ordnung in x_1 sind, wie die bei der Rücktransformation aus ψ'_p hervorgegangenen. Dies gilt

auch noch nach Einführung von $x = x_1$, $y = y_1 - a x_1$. Weil nun für jede Wiederholung des Transformationsprocesses, sofern immer wieder eine p-te Potenz auftritt, die gleiche Bemerkung gilt, so wird die nach mehrmaliger Wiederholung erhaltene Reihe:

$$\varphi = x_\nu^N [(y_\nu + m x_\nu)^p + \vartheta_{p+1} + \vartheta_{p+2} + \cdots]$$

nach erfolgter Rückwärts-Einführung der Variabeln x, y in die Form übergehen:

$$\varphi = (y + a x + b x^\iota + c x^{\iota+\lambda-1} + \cdots k x^K)^p + \Phi(x, y),$$

wo Φ höchstens von der $(p-1)$-ten Ordnung in y und in Bezug auf x in jedem Glied von höherer Ordnung ist, wie die hinsichtlich y gleich hohen Glieder der p-ten Potenz des Linearfactors.

Weil nun, wenn man den Process unbegrenzt oft wiederholt, der Exponent K unbegrenzt wächst, so geht φ in die p-te Potenz eines Linearfactors $y + \mathfrak{P}(x)$ über, wo in $\mathfrak{P}$ nur ganzzahlige Exponenten vorkommen, w. z. b. w.

Ist insbesondere die Ausgangsfunction $F(xy)$ (§ 1) hinsichtlich der Veränderlichen x, y irreducibel, so können sich nicht immer nur wieder p-te Potenzen als Anfangsglieder ergeben. Denn enthielte die reducirte Form $f(xy)$ einen Factor von der Gestalt:

$$[y + \mathfrak{P}(x)]^p,$$

wo $p > 1$ ist, so würde aus der in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ identischen Gleichung

$$\alpha F = f$$

folgen, dass nicht nur F ihn besitzt, sondern auch der Differentialquotient von F nach y, was mit dem Begriff der Irreducibilität unvereinbar ist.

In allen Fällen gelangt man durch das angegebene Verfahren zu einer Zerlegung der Reihe f in Linearfactoren,

und zwar zu einer einzigen. Denn wären zwei verschiedene Zerlegungen möglich, also zugleich:

$$f = (y-\mathfrak{P})(y-\mathfrak{P}')\cdots(y-\mathfrak{P}^{(n-1)})$$
$$= (y-\mathfrak{Q})(y-\mathfrak{Q}')\cdots(y-\mathfrak{Q}^{(n-1)}),$$

und die $\mathfrak{P}$ von den $\mathfrak{Q}$ verschieden, so müsste, weil das eine Product für $y = \mathfrak{P}$ verschwindet, dies auch mit dem anderen der Fall sein, also etwa $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ sein. Dann könnte man beiderseits mit $x - \mathfrak{P}$ dividiren und die Uebereinstimmung eines weiteren Linearfactors links und rechts nachweisen u. s. w.

3.

Es erübrigt nun noch, einen Giltigkeitsbereich nachzuweisen für den in § 1 angegebenen Process der Spaltung der Reihe f in die beiden φ, ψ:

$$\begin{aligned} f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + x^4 f''_{n-1} + \cdots \\ = (\varphi_p + x^2\varphi_{p-1} + x^3\varphi'_{p-1} + \cdots) \\ (\psi_q + x^2\psi_{q-1} + x^3\psi'_{q-1} + \cdots), \end{aligned} \tag{1}$$

wo

$$f_n = \varphi_p \psi_q$$
$$n = p + q$$

ist. Zu dem Zweck wird hinsichtlich der Coefficienten von f die Annahme gemacht, dass sie dem absoluten Betrage nach < 1 sind, ein Verhalten, das sich, sofern f überhaupt in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ convergirt, durch eine Transformation von der Form $x = \varrho x'$ und Division der Identität $f = \varphi\psi$ mit einer passend gewählten Constanten immer herstellen lässt.

Man bemerke zunächst, dass die aus der Identität (1) fliessenden Einzelgleichungen nach § 1 alle von der Form sind:

$$\Psi_{q-1}\varphi_p + \Phi_{p-1}\psi_q = F_{n-1} \tag{2}$$

wo $F_{n-1} = A^{(0)} y^{n-1} + \binom{n-1}{1} A^{(1)} y^{n-2} x + \binom{n-1}{2} A^{(2)} y^{n-3} x^2 + \cdots + A^{(n-1)} x^{n-1}$

eine bekannte, φ_p, ψ_q ebensolche theilerfremde, Φ_{p-1}, Ψ_{q-1} gesuchte, in x, y homogene Functionen sind. Die Coefficienten der letzteren bestimmen sich aus den $n = p + q$ linearen Gleichungen, die man durch Gleichsetzen der Coefficienten von y^{n-1}, $y^{n-2}x$, $\cdots x^{n-1}$ links und rechts erhält, und zwar enthalten die Ausdrücke die Coefficienten $A^{(i)}$ von F linear und homogen. Irgend ein Coefficient $\alpha^{(k)}$ von Φ_{p-1}, Ψ_q — stellt sich also durch eine Summe dar von der Form:

$$\alpha^{(k)} = \Sigma A^{(i)} R^{(ik)},$$

wo die $R^{(ik)}$ nur noch von den Coefficienten von φ_p, ψ_q abhängen. Ist nun unter allen Ausdrücken $R^{(ik)}$ der dem absoluten Betrag nach grösste absolut genommen $= \frac{\varrho}{n}$, so genügt jeder Coefficient $\alpha^{(k)}$ von Φ_{p-1}, Ψ_{q-1} der Ungleichung:

$$|\alpha^{(k)}| < \varrho A, \qquad (2a)$$

wenn A der grösste unter den Coefficienten $|A^{(i)}|$ von F ist. Nun lautet die erste der aus (1) folgenden Identitäten:

$$\varphi_p \psi_{q-1} + \psi_q \varphi_{p-1} = f_{n-1},$$

wo φ_p, ψ_q gegeben sind. Die absoluten Beträge der Coefficienten von φ_{p-1}, ψ_{q-1} vergrössern sich, wenn man hier statt der Coefficienten von f_{n-1} die zu grossen Werthe 1 einsetzt, also statt f_{n-1} die Function:

$$x^{n-1} + x^{n-2} y + \cdots + y^{n-1}$$

oder statt ihrer:

$$(x + y)^{n-1}$$

einträgt. Nach 2a erhält man so für den dem absoluten Betrag nach grössten Coefficienten α von φ_{p-1} und ψ_{q-1} die Ungleichung:

$$|\alpha| < \varrho,$$

wo ϱ dieselbe Bedeutung wie oben hat.

Die anderen Identitäten sind sämmtlich von der Form:

$$\psi_{q-1}^{(k)}\varphi_p + \varphi_{p-1}^{(k)}\psi_q - f_{n-1}^{(k)} - x(\psi_{q-1}^{(k-1)}\varphi_{p-1} + \varphi_{p-1}^{(k-1)}\psi_{q-1}' \\ + \psi_{q-1}^{(k-2)}\varphi_{p-1}' + \varphi_{p-1}^{(k-2)}\psi_{q-1}' + \cdots) = F_{n-1}^{(k)} \qquad (3)$$

Es erhöht sich wiederum der absolute Betrag der Coefficienten in F, wenn man:

1. Statt der Coefficienten der Einzelfactoren ihre absoluten Beträge einsetzt.
2. Die Coefficienten in $f_{n-1}^{(k)}$ allenthalben gleich 1 macht.
3. Für diejenigen von φ, ψ; bezw. φ', ψ'; $\cdots$ $\varphi^{(k-1)}$, $\psi^{(k-1)}$ gewisse sogleich zu bestimmende zu grosse Beträge α bezw. $\alpha', \alpha'', \cdots \alpha^{(k-1)}$ einträgt.

Tritt auf diese Weise an Stelle von $F_{n-1}^{(k)}$ die Function:

$$(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots x^{n-1}) + x(y^{p-1} + \cdots + x^{p-1}) \\ (y^{q-1} + \cdots + x^{q-1})(2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \cdots)$$

oder gar:

$$(y+x)^{n-1}(1 + 2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \cdots),$$

so folgt um so mehr — wegen (2a) — für die Coefficienten $\alpha^{(k)}$ von $\varphi_{p-1}^{(k)}, \psi_{q-1}^{(k)}$:

$$\alpha^{(k)} < \varrho(1 + 2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \cdots) \qquad (4)$$

Die anstatt der Coefficienten von φ, ψ; φ', ψ'; $\cdots$ eingeführten Beträge $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots \alpha^{(k-1)}$ wollen wir, weil dies in der That eine Vergrösserung bedeutet, folgeweise den Gleichungen entnehmen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varrho \\ \alpha' &= \varrho(1 + \alpha\alpha) \\ \alpha'' &= \varrho(1 + 2\alpha\alpha') \\ \alpha''' &= \varrho(1 + 2\alpha''\alpha + \alpha'\alpha') \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (4a)$$

welche aus der Relation (4) hervorgehen, wenn man das Zeichen $<$ durch $=$ ersetzt.

Aber dieselben Gleichungen ergeben sich aus dem speciellen Problem: Die in der Umgebung von $\xi = 0$, $\eta = 0$ durch folgende Reihe definirte Function:

$$f = \eta^2 - \frac{\xi^2}{4\varrho^2} + \xi^3 + \xi^4 + \cdots = \eta^2 - \frac{\xi^2}{4\varrho^2} + \frac{\xi^3}{1-\xi}$$

in ihre Linearfactoren zu zerlegen

$$f = \left(\eta - \frac{\xi}{2\varrho} + \alpha\xi^2 + \alpha'\xi^3 + \alpha''\xi^4 + \cdots\right) \left(\eta + \frac{\xi}{2\varrho} - \alpha\xi^2 - \alpha'\xi^3 - \alpha''\xi^4 - \cdots\right). \qquad (5)$$

In der That gehen für diese Identität die allgemeinen Gleichungen (3) genau in diejenigen (4a) über. Andererseits berechnen sich die $\alpha^{(i)}$ in (5) mittelst der Binomialformel aus:

$$\eta = \frac{\xi}{2\varrho}\left(1 - \frac{4\varrho^2\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\xi}{2\varrho}\left(1 - 2\varrho^2\xi - 2\varrho^2(1+\varrho^2)\xi^2 - \cdots\right)$$

und weil aus der Convergenzbedingung: $\frac{4\varrho^2\xi}{1-\xi} < 1$

sich die obere Grenze ableitet: $|\xi| < \frac{1}{4\varrho^2+1}$,

so folgt, dass auch die Reihen der $\varphi^{(k)}_{p-1}$, $\psi^{(k)}_{q-1}$ convergiren, wenn der absolute Betrag der Veränderlichen x die Grenze nicht übersteigt:

$$|x| < \frac{1}{4\varrho^2+1}.$$

Hiermit ist ein Convergenzbereich für die Reihen φ, ψ und also ein Giltigkeitsbereich für die Identität:

$$f = \varphi\psi$$

nachgewiesen.

Ein solcher existirt demnach auch für die ganze Zerlegung, weil dieselbe nur in der wiederholten Anwendung des Spaltungsprocesses besteht.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1891.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in
schverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangs-
ätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philos.-philol. u. histor. Classe be-
mten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1891 Heft III verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Observatory Adelaide, South Australia:

teorological Observations. Year 1883 and 1888. 1889/90. Fol.

Royal Society of South Australia in Adelaide:

nsactions. Vol. XIII. part. 2. 1890. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

ro Pilar, Geografijeske Koordinate. 1890. Fol.
t. Janeček, Obća teoret. i fizik. lučba. I. 1890. 8⁰.

New-York State Museum in Albany:

noirs. Vol. I. Nr. 1. 1889. 4⁰.

Royal Dutch Meteorological Institute in Amsterdam:

attempt to compare the instruments for absolute magnetic measurements by Van Rijckevorsel. Utrecht 1890. 4⁰.

Société d'études scientifiques in Angers:

lletin. Nouv. Série. Année XIX. 1889. 1890. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

· Bericht. 1890. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

American chemical Journal. Vol. 12 Nr. 6—8. Vol. 13 Nr. 1. 1890 —91. 8⁰.

Studies from the biological Laboratory. Vol. IV. Nr. 6. 1890. 8⁰.

American Journal of Mathematics. Vol. XIII. Nr. 1. 2. 1890. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. IX. Heft 1. 1890. 8⁰.

Magnetical and Meteorological Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XII. 1889. 1890. Fol.

Regenwaarnemingen. XI. Jahrg. 1889. 1890. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke. Bd. V. VI. 1890/91. 4⁰.

Centralbureau für internationale Erdmessung in Berlin:

Verhandlungen der 1890 zu Freiburg im Br. abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der Internationalen Erdmessung. 1891. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 23. Jahrg. Nr. 18. 19. 24. Jahrg. Nr. 1—11. 1890/91. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 42. Heft 3. 4. 1890/91. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. XXI. 1891. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1884. Jahrg. 40. Abth. 1—3. 1890. 8⁰.

Verhandlungen. 9. Jahrg. 1891. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. IV. Nr. 20—26. Bd. V. Nr. 1—5. 1890/91. 8⁰.

Verhandlungen. 1890—91. Nr. 1—5. 8⁰.

K. Technische Hochschule in Berlin:

Deutschlands Leistungen und Aussichten auf technischem Gebiet von F. Reuleaux. (Festrede.) 1891. gr. 8⁰.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Die Schwerkraft im Hochgebirge, von F. R. Helmert. 1890. 4⁰.

Das Berliner Basisnetz. 1891. 4⁰.

K. Preussisches meteorologisches Institut in Berlin:

andlungen. Bd. I. Nr. 1 3. 1890. 4⁰.
k. preuss. meteorol. Institut von W. v. Bezold. 1890. 8⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

rbuch. Bd. XX. Jahrg. 1888. Heft 1. 2. 1890. 8⁰.

K. geologische Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

andlungen. Neue Folge. Heft 3. Die Foraminiferen der Aachener Kreide, von Ignaz Beissel. Text und Atlas. 1891. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in Berlin:

tenflora. Jahrg. 1890. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

chenschrift. 1891. Nr. 3—26. 4⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

schrift. XI. Jahrg. 1891. Heft 1—6. gr. 8⁰.

Gewerbeschule zu Bistriz:

I. Jahresbericht f. d. J. 1889/90. 8⁰.

Naturhist. Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

handlungen. Jahrg. 47. 2. Hälfte. 1890. 8⁰.

Société de Géographie commerciale in Bordeaux:

letin. 1891. Nr. 9—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

ceedings. Vol. XXV. 1890. 8⁰.

Boston Society of natural history in Boston:

ceedings. Vol. XXIV. part 3. 4. 1890. 8⁰.
moirs. Vol. IV. Nr. 7—9. 1890. 4⁰.

Meteorologische Station in Bremen:

ebnisse der meteorol. Beobachtungen in Bremen von 1803—1890. Jahrg. I. 1891. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

handlungen. Bd. XII. Heft 1. 1891. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

rhandlungen. Bd. 28. 1889. 1890. 8⁰.
II. Bericht der meteorologischen Commission. 1890. 8⁰.

Nr. 1—4. 1890/91. 8°

XXXVII

Budapest:

Budapest:

Bd. VIII. Heft 9. Bd. IX. H

Heft 8—12. Band XXI. Heft 1-

IX. Heft 2—5. 1890/91. 8°.

in Caen:

1. 2. Vol. V. fasc. 1. 1

of India in Calcutta

11th year. 1890. Fo.

Meteorological Department

1888—89. 1890. Fo.

the Bay of Bengal by J. E

Calcutta:

Mission. Coleoptera. 1890.

Calcutta:

Wood-Mason. Nr. 2. 1891.

in Calcutta:

Mountain-Districts. Jan. to

Geological Survey of India in Calcutta:

XXIII. part 4. 1890. 4⁰.
XXIV. part 2. 1890. 4⁰.
ı Indica. Ser. XIII. Vol. IV. part 1. 1889. Fol.

Philosophical Society in Cambridge:

Vol. VII. part 3. 1891. 8⁰.
Vol. XV. part 1. 1891. 4⁰.

: Maxwell Memorial Committee in Cambridge:

Papers of James Clerk Maxwell. Vol. 1. 2. 1890. 4⁰.

mparative Zoölogy at Harvard College in Cambridge, M.:

t for 1889–90. 8⁰.
XX. Nr. 4–8. Vol. XXI. No. 1. 1890/91. 8⁰.

ard College Observatory in Cambridge, Mass.:

he Astronomical Observatory. Vol. XXIII. part 1.
XIV. Vol. XXVII. 1890. 4⁰.
Harvard College Observatory 1840–1890. 1890. 8⁰.
eport. 1890. 8⁰.
ring, Variable Stars of long period. 1891. 4⁰.

Accademia Gioenia in Catania:

nsile. Nuova Ser. Fasc. XV–XIX. November 1890 bis
891. 8⁰.
. Vol. 2. 1890. 4⁰.

. sächsisches meteorol. Institut in Chemnitz:

teorologisches Jahrbuch. I. Hälfte. Abth. 1 und 2.
4⁰.

ociété des sciences naturelles in Cherbourg:

n. XXVI. Paris 1889. 8⁰.

mmittee of the Norwegian North-Atlantic Expedition in Christiania:

Nordhavs-Expedition 1876–1878. Nr. XX. 1891. Fol.

K. Norwegische Universität in Christiania:

meteorol. Instituts für 1888. 1890. 4⁰.
athematik. Bd. XIII, 2–4. Bd. XIV, 1. 2. 1890. 8⁰.
for Naturvidenskaberne. Bd. XXXI. Nr. 4. 1890. 8⁰.
er, Viridarium Norvegicum. Bd. III. 1889. 4⁰.

Observatory in Cincinnati:

Nr. 11. Charts and micrometrical measures of nebulae
. Porter. 1891. 4⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung. 1890 Nr. 100—105. 1891 Nr. 1—46. 1890/91. 4°.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tom. VI. livr. 2. Leiden 1890. 4°.

Meteorologisches Observatorium in Dorpat:

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen für das Jahr 1888. 1891. 4°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XI. Janv.—Juin 1890. 8°.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. III. 1891. 8°.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VI. part 2. 1890. 8°.

R. Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1889—1890. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

75. Jahresbericht pro 1889/90. 1891. 8°.

R. Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. 4. Serie. Vol. XIII. disp. 3. Vol. XIV. disp. 1. 1890/91. 8°.

Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XVI. Heft 2. 1890. 4°.
Katalog der Vogelsammlung im Museum der Gesellschaft, von Ernst Hartert. 1891. 8°.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:

Botanisch Jaarboek. 3. Jaargang 1891. 8°.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie II. Vol. 7—9. 1889—90. 8°.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:

27. Bericht. 1890. 8°.

Geological Society in Glasgow:

Transactions. Vol. IX. part 1. 1891. 8°.

scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:
lletin. Vol. V. 1890. 8⁰.

turwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:
tbeilungen. Jahrg. XXII. 1891. 8⁰.

l. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde von Nederlandsch-Indië im Haag:
Badoej's door Jul. Jacobs en J. J. Meijer. 1891. 8⁰.

poldino-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:
poldina. Heft XXVI. Nr. 21—24. XXVII. 1—8. 1890/91. 4⁰.

Deutsche Seewarte in Hamburg:
alog der Bibliothek der deutschen Seewarte. 1890. 8⁰.

Musée Teyler in Harlem:
hives. Ser. II. Vol. II. partie 5. 1890. 4⁰.

Société Hollandaise des sciences in Harlem:
aives Néerlandaises des sciences exactes. Tom. XXIV. 4. 5. XXV. Nr. 1. 1891. 8⁰.
vres complètes de Christiaan Huygens. Tom. III. La Haye 1890. 4⁰.

Naturhistorisch-medizinischer Verein in Heidelberg:
andlungen. N. F. Bd. IV. Heft 4. 1891. 8⁰.

benbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:
andlungen und Mittheilungen. 40. Jahrgang. 1890. 8⁰.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:
ische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 25. Heft 1 und 2. 1890. 8⁰.

Section médicale de la Société des Sciences in Kharkow:
ly. Jahrg. 1890. 1891. 8⁰.

ist.-Kommission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:
ericht für die Jahre 1887—1889. XVII. bis XIX. Jahrg. II. Heft. 1890. Fol.
ebnisse der Beobachtungs-Stationen. Jahrg. 1890. Heft X—XII. 1891. qu. 4⁰.
as deutscher Meeresalgen. Heft II. Lief. 1 u. 2. 1891. 2⁰.

Naturwissenschaftl. Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:
riften. Bd. VIII. Heft 2. 1891. 8⁰.

R. Microcopical Society in London:

ıal. 1891. Part 1—3. 8⁰.

Zoological Society in London:

:edings. 1890. part IV. 1891. part I. 8⁰.
sactions. Vol. XIII. part 1. 2. 1891. 4⁰.

Zeitschrift Nature in London:

re. Vol. 13 Nr. 1105—1122. Vol. 44 Nr. 1123—1125. 1891. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

les. Tom. XVI, 2. XVII, 4. 1890. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:

cations. Vol. VII. part 1. 1890. 4⁰.

Scientific Association in Meriden, Conn.:

ıactions. Vol. 4. 1889—90. 1891. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:

rio. Anno XI. 1891. 1890. 8⁰.
in. Tom. I. Nr. 2. 1891. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético de México in Mexico:

in mensual. Resumen meteorologico del año de 1889. 1890. 4⁰.
s psycrométricas calculadas para la altura de México, por José Zendejas. 1889. 8⁰.

ociedad de geografia y estadistica de la república Mexicana in Mexico:

in. Tom. II. Nr. 1. 2. 1890. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:

aturaleza. II. Serie. Tom. I. Nr. 9. 1890. Fol.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Mexico:

ıeilungen. Bd. I. Heft 2. 3. 1890. Fol.

Società dei Naturalisti in Modena:

Serie III. Vol. IX. Fasc. 2. 1890. 8⁰.

Geological Survey in Montreal:

ributions to Canadian Palaeontology. Vol. III. Nr. I. 1891. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. 1890. Nr. 3. 4. 1891. 8⁰.
Meteorologische Beobachtungen. 1890. I. u. II. Hälfte. 189

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie etc. in Berlin und

Correspondenzblatt. XXI. Jahrg. 1890. Nr. 10—12. XXII. 1891. Nr. 1. München. 4⁰.
Gedächtnissfeier für Heinrich Schliemann. 1891. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schul heiten in München:

Die Deutschen Expeditionen und ihre Ergebnisse. Bd. I. licher Theil, herausgeg. von G. Neumayer. Berlin
Die k. Observatorien für Astrophysik, Meteorologie und Geo Potsdam. Berlin 1890. 4⁰.

Société des Sciences in Nancy:

Bulletin. Ser. II. tom. 10, fasc. 23. Paris 1890. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Nea

Rendiconto. Ser. II. Vol. IV. Fasc. 1—12. 1890. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. IX. Heft 4. Berlin 1891. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-up

Report of the French Commission on the use of explosives. 1891. 8⁰.
Transactions. Vol. 39. part I. II. Vol. 40. part 1. 1891. 8

Connecticut Academy of arts et sciences in New-Hav

Transactions. Vol. VIII. part 1. 1890. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. Nr. 239—244. Nov. 1890—Apr. 1891. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. IV. Index. Vol. V. Nr. 4—8. 1890. 8⁰.
Transactions. Vol. IX. Nr. 3—8. 1889—90. 8⁰.

The Journal of comparative medecine and veterinary ar in New-York:

Journal. Vol. XII. Nr. 1—5. 1891. 8⁰.

American Museum of natural history in New-York

Bulletin. Nr. 7. 8. Vol. II. Nr. 9. 10. Vol. III. Nr. 1. Alt —1890. gr. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XII. Nr. 10. XIII. 1—4. 1890. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXII. Nr. 4 and Supplement. XXIII. Nr. 1. 1890/91. 8⁰.

Neurussische Naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XV. Heft 1. 2 und Mathem. Abtheilung. Tom. XI. 1890. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Osnabrück:

8. Jahresbericht für die Jahre 1889 und 1890. 1891. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Vol. VII. Fasc. 1. 1891. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. V. Fasc. 1—3. 1891. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Anno XIII. 1890. Maggio—Dicembre. 1890/91. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1890. Nr. 52. 1891. Nr. 1—25. 8⁰.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 111 Nr. 26. Tom. 112 Nr. 1—25. 1890/91. 4⁰.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. II. Ser. tom. IX. 1891. 4⁰.

Comité International des Poids et Mesures in Paris:

Procès-verbaux des séances de 1889. 1890. 8⁰.
XIIIe Rapport sur l'année 1889. 1890. 4⁰.
Comptes rendus des séances de la première conférence générale en 1889. 1890. 4⁰.
Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures. Tom. VII. 1890. 4⁰.

Laboratorie de Géologie à la Sorbonne in Paris:

Edmond Hébert. 1891. 8⁰.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur scientifique. Livr. 589—595. Janvier—Juillet 1891. gr. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. II. Série. tom. VII. Fasc. 1. III. Série. tom. II. Fasc. 1. 1884—1890. Fol.

Société d'anthropologie in Paris:

Mémoires. 2e Sér. tom. IV. Fasc. 2. 1890. 8⁰.
Bulletins. III. Série. tom. XII. Fasc. 4. IV. Série. tom. I. Fasc. 1890. 8⁰.

Société botanique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 38. Comptes rendus des séances. Nr. 1. 1891. 8

Société de géographie in Paris:

Bulletin. VII. Ser. tom. XI. trimestre 3. 4. tom. XII. trim. 1. —91. 8⁰.
Compte rendu 1890 Nr. 16. 17. 1891 Nr. 1—13. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVIII. Nr. 5. 6. XIX. Nr. 1—5. 1890/91. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Mémoires. Tom. III. partie 4 et 5. Tom. IV. partie 1 et 2. Fe 26 à 35. 1890/91. 8⁰.
Bulletin. Tom. XV. Nr. 7—10. Tom. XVI. Nr. 1—5. 1890/91.

Zeitschrift L'Électricien in Paris:

L'Électricien. II. Ser. tom. I. Nr. 1—26. 1891. gr. 8⁰.

Accademia medico-chirurgica in Perugia:

Atti e rendiconti. Vol. II. Fasc. 4. 1890. 8⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Mémoires. Vol. IV. Nr. 2. Vol. V. Nr. 1 und 5. Vol. VIII. N Vol. X. Nr. 1. 1890. 4⁰.
Bulletins. Tom. IX. Nr. 7. 8. 1890. 8⁰.

Chemisch-physikalische Gesellschaft an der k. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXII. Nr. 9. XXIII. Heft 1—4. 1890/91. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1889. Theil II. 1890. 4⁰.

Academy of natural sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1890. part II. III. 1890. 8⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. 38th annual meeting held ad Old Point Comfort. tember 1890. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 28. Nr. 134. 1890. 8⁰.

Geological Survey of Pennsylvania in Philadelphia:

ıary of Fossils. Vol. 2. 3. Harrisburg 1889—90. 8°.
Southern Anthracite Field. Part III.
port on the Oil and Gas Fields. Harrisburg 1890. 8°.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

lemorie. Vol. XI. 1891. 8°.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

ı. Bd. XX. Heft 1—4. 1890/91. 8°.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

ŗsberichte. Mathem.-physik. Classe 1890, I u. II. 8°.

Sternwarte in Pulkowa:

ment III. aux observations de Poulkova. St. Petersburg. 1891. Fol.
ˌphemeriden auf d. Jahr 1891 von W. Doeller. St. P. 1890. 8°.
: des Directors der Nicolai-Hauptsternwarte 1887—1889. St. P. 1890. 8°.

Observatorio in Rio de Janeiro:

ı. Anno V. Nr. 12. Anno VI. Nr. 1—4. 1890/91. 8°.

Academy of Science in Rochester U. St.:

dings. Brochure I. 1890. 8°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Anno 43. Sessione 4—6. 1890. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

ino 1890. Nr. 11. 12. 8°.

taafsch Genootschap der proefonder-vindelijke Wijsbegeerte in Rotterdam:

e Verhandelinger. II. Reeks, 3. Deel, 3. Stuk. 1890. 4°.

California Academy of Sciences in San Francisco:

onal Papers. I. III. 1890. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in St. Gallen:

t während des Vereinsjahres 1888/89. 1890. 8°.

R. Accademia dei Fisiocritici in Siena:

Serie IV. Vol. 3. Fasc. 1—4. 1890/91. 8°.

Société des Sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. XXIV. Fasc. 10. Tom. XXV. Fasc. 1–4. 1890/91. 8⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. XXIII. part 2. Vol. XXIV. part 1. 1889/90. 8⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1889. 1890. 8⁰.
Magnetische Beobachtungen im Jahre 1888—89. 1890. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo

Mittheilungen. 45. Heft. Yokohoma 1891. Fol.

Medicinische Fakultät der kaiserl. japanischen Universität in Tokyo.

Mittheilungen. Bd. I. Nr. 4. 1890. 4⁰.

College of science, Imp. University of Japan in Tokyo:

Journal. Vol. IV. part 1. 1891. 4⁰.

Kansas-Academy of Science in Topeka:

Transactions. Vol. XII. part 1. 1890. 8⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. I. part 1. 2. 1890. 8⁰.
4th annual Report. 1891. 8⁰.

Reale Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche dell' anno 1890. 1891. 8⁰.

Observatoire météorologique de l'Université in Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. XXII. Année 1890. 1890–91. Fol.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

North American Fauna. Nr. 3. 4. 1890. 8⁰.

Navy Department in Washington:

Astronomical Papers of the American Ephemeris. Vol. II. part V. und Vol. IV. 1890. 4⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Report 1888 and National Museum Report 1888. 1890. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

port for the year ending 1890, June 30. 8⁰.
servations for 1885. 1891. 4⁰.

Surgeon General's Office in Washington:

lex-Catalogue. Vol. XI. 1890. 4⁰.

U. S. Coast and geodetic Survey in Washington:

port of the Superintendent during the year ending with June 1888
 1889. 4⁰.
letin. Nr. 19—21. 1891. 4⁰.

U. S. Geological Survey Office in Washington:

nographs. Vol. I. Laske Bonneville by Grove Karl Gilbert. 1890. 4⁰.
neral Resources of the U. St. Calendar, year 1888. 1890. 8⁰.
letin. Nr. 58—61. 63—66. 1890. 8⁰.
th Annual Report 1887—1888. 1889. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes in Wernigerode:

riften. 5. Band 1890. 8⁰.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

zungsberichte. Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse.

I. Abth. 1889 Nr. 4—10. 1890 Nr. 1—3.	1889—1890. 8⁰.
IIª Abth. 1889 Nr. 4—10. 1890 Nr. 1—3.	
IIᵇ Abth. 1889 Nr. 4—10. 1890 Nr. 1—3.	
III. Abth. 1889 Nr. 5—10. 1890 Nr. 1—3.	

ikschriften. Mathem.-naturw. Klasse. Bd. 56. 1889. 4⁰.
theilungen der prähistorischen Commission. 1890. Bd. I. Nr. 2. 4⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

handlungen. 1890. Nr. 14—18. 1891. Nr. 1—7. 4⁰.
handlungen. Bd. XIV. 1890. Bd. XV. Heft 3. 1891. Fol.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

ener klinische Wochenschrift. IV. Jahrg. 1891. Nr. 1—27. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

theilungen. Bd. XX. Heft 3. 4. XXI. Heft 1. und Register zu
 Bd. XI—XX. 1890/91. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

theilungen. Band XXXIII. 1890. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 1890. Quartal 3 und 4. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. V. Nr. 4. Bd. VI. Nr. 1. 1890/91. gr. 8⁰.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. I. Suppl.-Band. Katalog der Argelander'schen Zonen von Edmund Weiss. 1890. 8⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftl. Kenntnisse in Wien:

Schriften. 30. Bd. 1890. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 43. 1890. 8⁰.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. XXIV. Nr. 6. 7. XXV. Nr. 1. 2. 1890—91. 8⁰.

Sitzungsberichte. 1890. Nr. 8—10. 1891. Nr. 1. 1890/91. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 35. Heft 2—4. 1890. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Florentino Ameghino in Buenos Aires:

Revista Argentina de historia natural. Tom. I. entrega 1. 2. 1891. 8⁰.

Giovanni Capellini in Bologna:

Zifioidi Fossili. 1891. 4⁰.

R. Fresenius in Wiesbaden:

Die Thermalquellen Wiesbadens in chemischer Beziehung. 1890. 8⁰.

Nikolai von Kokscharow in St. Petersburg:

Materialien zur Mineralogie Russlands. Bd. X. p. 225—352. 1891. 8⁰.

L. Kronecker in Berlin:

13 mathematische Abhandlungen. Separatabdrücke aus den Sitzungsberichten der Berliner Akademie und d. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1890. in 4⁰ u. 8⁰.

A. Kurz in Augsburg:

illarität. 2. Mittheilung. 1891. 8⁰.
modernen Gastheorie. 1891. 8⁰.

H. W. Middendorp in Groningen:

th des Koch'schen Heilverfahrens gegen Tuberkulose. Emden 91. 8⁰.

Fürst Albert I. von Monaco:

rschung der Meere und ihrer Bewohner. Uebersetzt von nil von Marenzeller. Wien 1891. 8⁰.

Ph. Plantamour in Genf:

uments périodiques du sol. 12. année. 1890. 8⁰.

Michele Stossich in Triest:

della Croazia. . Zagreb 1890. 8⁰.
Veneti. II. Serie. 1891. 8⁰.
: Dispharagus Dujardin. 1891. 8⁰.

Jean Servais Stas in Brüssel:

ation en l'honneur de Jean Servais Stas à l'occassion du 50e nniversaire de sa nomination comme membre titulaire de la asse des sciences. 1891. 8⁰.

G. Tschermak in Wien:

ritgruppe. Theil I. II. 1890/91. 8⁰.

Rudolf Wolf in Zürich:

nische Mittheilungen. Nr. LXXVII. LXXVIII. 1891. 8⁰.

Silvestro Zinno in Rom:

rasformazione della glicerina in glucosio. 1890. 4⁰.

Sitzungsberichte

der

·igl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 7. November 1891.

Ierr H. SEELIGER legt den zweiten Band der neuen en der Kgl. Sternwarte vor und macht hieranf zwei ·ilungen:

1. „Notiz über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre“:
2. „Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre.“

über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 7. November.)

Venn eine Kugel von einer brechenden Atmosphäre ·en ist, so wird dieselbe einem Beobachter ausserhalb grösseren scheinbaren Durchmesser zeigen als in dem wo kein brechendes Medium die Umhüllung bildet. Vergrösserung des scheinbaren Durchmessers ergiebt n überaus einfacher Weise und völlig streng aus den nfachsten Sätzen der Refractionstheorie. Nimmt man, lies ist die einzige erforderliche Voraussetzung, an, las die Kugel umgebende brechende Medium in con-

centrischen Schichten gleicher Dichtigkeit angeordnet ist und bezeichnet man mit μ den Brechungsexponenten in einer Entfernung r vom Centrum und mit i den Winkel, den die nach aussen gerichtete Tangente der Refractionscurve mit r in jenem Puncte bildet, so ist bekanntlich

$$\mu\ r \sin i = \text{Const.} \tag{1}$$

für alle Puncte der Refractionscurve. Wenn demnach ein Punct der Oberfläche einen Lichtstrahl unter einem Winkel z gegen den verlängerten Radius aussendet und dieser Strahl den Beobachter trifft, so muss zufolge (1) sein:

$$\mu_0\ a \sin z = \varDelta \sin \sigma$$

und hierin bedeutet: μ_0 den Brechungsexponenten an der Oberfläche des Planeten, a seinen Radius, $\varDelta$ die Entfernung des Beobachters vom Centrum und σ die scheinbare Entfernung des genannten Punctes vom Centrum der Planetenscheibe.

Nennt man nun σ_0 den scheinbaren Radius der Planetenscheibe, wie er ohne Atmosphäre erschiene, so ist

$$a = \varDelta \sin \sigma_0$$

und demzufolge

$$\sin \sigma = \mu_0 \sin \sigma_0 \sin z.$$

Der Lichtstrahl, welcher in Betracht gezogen worden ist, wird gerade noch den Beobachter erreichen können, wenn $z = 90^0$ wird. Dann hat man also für den factisch stattfindenden scheinbaren Radius σ die Formel:

$$\sin \sigma = \mu_0 \sin \sigma_0$$

oder für astronomische Zwecke genügend genau

$$\sigma = \mu_0\ \sigma_0. \tag{2}$$

Diese Formel gilt ganz allgemein, gleichgiltig nach welchem Gesetze die Dichtigkeit des brechenden Mediums von der Entfernung vom Centrum der Kugel abhängt. Man sieht übrigens, dass einzig und allein der Brechungsexponent an der Oberfläche in Frage kommt. Ferner ergiebt sich aber

auch, dass, falls das Mittel eine Dispersion aufweist, die in verschiedenfarbigem Lichte gemessenen Radien σ von verschiedenen Grössen ausfallen müssen. Betrachten wir z. B. die Erde vom Monde aus. Hier ist für die beiden Fraunhofer'schen Linien B und G, an welchen Stellen des Spectrums die optischen Strahlen noch keineswegs unwirksam sind

$$B \cdots \mu_0 = 1.000\,2935$$
$$G \cdots \mu_0 = 1.000\,2987$$

und mit der Mondparallaxe 57′2″ findet man die Vergrösserung des Erddurchmessers für:

B . . .	2″·0087
G . . .	2″·0443
Differenz .	0″·036

Ganz rein werden diese Differenzen in den Messungen nicht hervortreten, da durch die Absorption die brechbareren Theile des Spectrums etwas mehr geschwächt werden; auch werden die Ränder nicht mehr ganz scharf sich darstellen und schliesslich bewirkt die Diffraction der Lichtstrahlen an den Rändern des Fernrohrobjectives eine Verschiebung des scheinbaren Randes, welche wahrscheinlich von der Farbe abhängig ist. Im Allgemeinen ergiebt sich aber, dass die im blauen Lichte gemessenen Durchmesser grösser ausfallen müssen, als die im rothen und man wird berechtigt sein zu behaupten, dass bei dichteren Atmosphären von grösserer Dispersionskraft, die nicht nur denkbar sind, sondern gewiss vorkommen, die oben erwähnten Differenzen bis zu sehr bemerkbaren Beträgen wachsen können[1]). Es darf indessen

1) Die im Vorigen dargelegten höchst elementaren Ueberlegungen begründen die Ansichten, welche ich über diese Frage seit Jahren in meinen Vorlesungen auszusprechen pflege und auf welche sich Herr Dr. Wellmann in den „Astron. Nachrichten" Bd. 119, S. 241 bezieht.

hierbei ein Umstand nicht ausser Acht gelassen werden, dessen Nichtberücksichtigung zu den allergröbsten Irrthümern veranlassen kann. Die Formel (2) erleidet nämlich eine sehr wichtige Beschränkung, weil sie, obgleich dies aus der obigen Aufstellung nicht hervorgehen konnte, doch über die Constitution des brechenden Mediums eine gewisse Voraussetzung macht. Diese besteht darin, dass die Refractionscurve ohne Unterbrechung durch die Gleichung (1) definirt ist. Dies findet aber nicht statt, wenn totale Reflexionen eintreten. Solche totale Reflexionen sind aber bei dem Uebergange eines Lichtstrahls von dichteren Theilen des brechenden Mediums in weniger dichte unter gewissen Bedingungen möglich und da die Atmosphären der Himmelskörper unter normalen Verhältnissen mit zunehmender Höhe an Dichtigkeit abnehmen, so müssen diese Verhältnisse näher betrachtet werden. Aehnliches gilt auch, wenn ein homogenes Medium den Planeten umgiebt und in der Höhe h unstetig an den leeren Raum grenzt. Hier muss an der Grenze zufolge (1) die Gleichung stattfinden

$$\sin i = \frac{\mu_0 \, a \sin z}{a + h}$$

und die obigen Betrachtungen erfahren keinen Widerspruch nur dann, wenn unter allen Umständen $\sin i < 1$ ist, also:

$$\frac{\mu_0 \, a}{a + h} < 1$$

d. h. $$h > (\mu_0 - 1)\, a.$$

Ist h weniger bedeutend, dann finden totale Reflexionen an der Grenze statt. Die Verfolgung dieser in photometrischer Beziehung ist verwickelt man sieht aber sofort ein, dass unter keinen Umständen der Planet grösser erscheinen kann, als wenn die Atmosphäre zu ihm als fester Bestandtheil gehörte, weil von der Grenze dieser alle den Beobachter erreichenden Lichtstrahlen gradlinige Wege beschreiben. Um

den allgemeineren Fall in Betracht zu ziehen, muss man selbstverständlich das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit des brechenden Mediums kennen. Dann lässt sich die Bedingung für das Nichtzustandekommen totaler Reflexionen aus der Bedingung

$$\sin i < 1$$

stets ableiten. Es soll für die Erdatmosphäre diese Bedingung aufgestellt werden. Es würde hierbei voraussichtlich genügen von den Temperaturabnahme mit der Höhe abzusehen. In gleich einfacher Weise, wie für diese Annahme, lässt sich aber die Betrachtung nach der Bessel'schen Refractionstheorie erledigen, die freilich bekanntlich den thatsächlichen physikalischen Verhältnissen nur sehr roh Rechnung trägt. Nach dieser Theorie sind die Dichtigkeit ϱ in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde und die Dichtigkeit ϱ_0 an der Oberfläche durch die Gleichung verbunden

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\beta \frac{r-a}{r}}$$

wo β eine empirisch bestimmte Constante ist. Da die Brechungsexponenten der Luft sehr wenig von 1 verschieden sind, darf auch bei Aufrechterhaltung der älteren Annahmen stets gesetzt werden

$$\mu = 1 + c\varrho_0 e^{-\beta \frac{r-a}{r}}$$

$$\mu_0 = 1 + c\varrho_0.$$

Totale Reflexionen werden nun jedenfalls ausgeschlossen sein, wenn

$$\mu \, r > \mu_0 \, a.$$

Setzt man zur Abkürzung $s = \frac{r-a}{r}$ so kann man diese Bedingung schreiben

$$1 - e^{-\beta s} < \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} \cdot s \qquad (3)$$

Nun ist $\frac{d(1-e^{-\beta s})}{ds} = \beta e^{-\beta s}$ stets positiv und nimmt mit wachsendem s ab, während die rechte Seite von (3) ebenfalls positiv ist und gleichmässig wächst. Für $s = 0$ werden beide Seiten von (3) gleich Null. Wenn demnach für $s = 0$

$$\beta e^{-\beta s} < \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1}$$

so wird diese Bedingung (3) auch für alle grösseren s erfüllt sein. Demnach werden totale Reflexionen **nicht** eintreten können, wenn:

$$\beta < \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} \tag{4}$$

Die Verhältnisse der Erdatmosphäre sind nun sehr weit von dieser Bedingung entfernt, denn es ist

$$\mu_0 - 1 \text{ nahe} = \frac{1}{3399}$$

und es müsste nach (4) sein

$$\beta < 3400.$$

In der That ist aber $\beta = 746$.

Wie sich die Sache auf einem physikalisch so total von der Erde verschiedenen Körper, wie es die Sonne ist, verhält, kann man nicht von vornherein wissen. Ich werde aber in einem andern Aufsatze zeigen, dass gewisse Wahrnehmungen dafür zu sprechen scheinen, dass dort wirklich totale Reflexionen stattfinden. Im anderen Falle müssten die in den verschiedenen Theilen des Spectrums gemessenen Sonnendurchmesser um so bedeutende Grössen verschieden sein, dass dies den Beobachtern nicht hätte entgehen können, obwohl ähnlichen Fragen bisher noch nicht die genügende Aufmerksamkeit geschenkt worden ist.

Die Dispersion des Lichtes in der Erdatmosphäre äussert sich in der Erscheinung, dass die einfachen Lichtpuncte der Fixsterne zu Spectren sich verlängern. Die Länge dieser Spectren $\delta\zeta$ lässt sich sehr leicht berechnen. Bis zu Zenithdistanzen von etwa 80° wird man mit genügender Genauigkeit ansetzen dürfen

$$\delta\zeta = 2\zeta \cdot \frac{\delta\mu_0}{\mu_0^2 - 1} \tag{5}$$

wo ζ die Refraction in Zenithdistanz und $\delta\mu_0$ die Differenz der an der Erdoberfläche stattfindenden Brechungsexponenten für die Farben des Spectrums, welche die Grenzen desselben angeben, bedeuten.

Herr Ketteler[1]) hat die Dispersion der Luft untersucht und gefunden:

Linie	λ	μ_0	Δ
B	0.687	1.000 29353	− 4
C	0.656	29383	− 1
D	0.589	29470	+ 2
E	0.527	29584	+ 2
F	0.486	29685	+ 3
G	0.431	29873	− 2
H	0.397	30026	− 1

Hier sind die Wellenlängen in $^1/_{1000}$ mm. angesetzt. Ich finde hieraus durch die Cauchy'sche Dispersionsformel

$$\mu = 1.000\,29010_5 + 159.9\,\frac{1}{\lambda^2}$$

welche Formel die äusserst kleinen Fehler Δ im Sinne Rechnung-Beobachtung übriglässt.

Setzt man $\lambda_0 = 0.575$, ungefähr entsprechend dem hellsten Theile des Spectrums, so wird

1) U. A. Mousson, Lehrbuch der Physik. II S. 548.

$$\delta\zeta = 0.00542\,\zeta \cdot \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right)$$

und wenn nach der Bessel'schen Refractionstafel

$$\zeta = 57\rlap{.}''7 \text{ tg } z$$

gesetzt wird, so ergiebt sich:

$$\delta\zeta = A \text{ tg } z$$

$$A = \frac{0''\cdot 313}{\lambda^2} - 0''\cdot 946$$

Man findet hieraus für

$$\lambda = 0.400;\ A = +\ 1\rlap{.}''01$$

$$\lambda = 0.700;\ A = -\ 0\rlap{.}''31$$

Die Gesammtlänge des kleinen Spectrums innerhalb d angegebenen Grenzen ist also 1''.32. Vor kurzer Zeit h Herr P. Henry[1]) durch Versuche für dieselbe Grösse 1''·(gefunden, was auf eine etwas grössere Dispersion hindeut würde, als Herr Ketteler gefunden hat.

1) Compt. Rend. Band 112.

Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 7. November.)

Die Extinction des Fixsternlichtes in der Atmosphäre ist in genauerer Weise zuerst von Herrn Seidel[1]) und in neuerer Zeit von Herrn G. Müller[2]) empirisch bestimmt worden. Die Resultate beider Beobachter stimmen ziemlich nahe mit einander überein und man kann bepaupten, dass die von beiden Beobachtern gegebenen Extinctionstabellen in ihrem characteristischen Verlaufe sogar vollständige Aehnlichkeit zeigen.

Aber auch mit der Theorie stimmen diese Tabellen bis zu sehr grossen Zenithdistanzen überein, wie im folgendem erwähnt wird und wie auch ganz neuerdings Herr G. Müller gezeigt hat. Diese letztere Arbeit des Herrn Müller ist mir indessen erst nach Abschluss meiner Rechnungen bekannt geworden, was ich deshalb erwähne, weil ich die von mir abgeleiteten Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung anführen und benutzen werde und nicht die a. a. O. gegebenen.

Was die Theorie der Extinction betrifft, so kann die von Lambert aufgestellte ganz ausser der Betrachtung bleiben;

1) Abhandlungen der kgl. bayer. Akademie, Band VI, 3. Abtheilung, 1852.

2) Publicationen des Potsdamer Observatoriums, Band III, 1883 und Band VIII, 1891.

denn dieselbe ist nichts weiter als eine Interpolationsformel, welche mehr zu bestimmende Parameter enthält, als nothwendig sind. Dagegen besitzen die von Laplace[1]) abgeleiteten Formeln einen hohen Grad der Allgemeinheit. Um hierüber keinen Zweifel zu lassen, werde ich dieselben in Artikel 1 des folgenden Aufsatzes in etwas allgemeinerer Weise ableiten, als von Laplace geschehen ist. Dagegen sind in neuester Zeit besonders von Herrn Langley[2]) beachtenswerthe Einwendungen gegen die Voraussetzungen, auf welchen diese Extinctionstheorie gegründet ist, erhoben worden. Obwohl schon auch von anderer Seite bemerkt worden ist, dass diese Einwände in practischer Beziehung nicht so folgenschwer sein können, als Herr Langley vermuthet hat, so schien es mir doch nicht ganz unnütz, auf diesen Gegenstand noch einmal zurückzukommen. Dies soll in Artikel 2 geschehen. Schliesslich soll in Artikel 3 die Extinction in der Sonnenatmosphäre betrachtet werden. Die vorliegenden Beobachtungen lassen allerdings nur ziemlich unsichere Schlüsse zu. Es scheinen aber durch sie merkwürdige und von vornherein nicht zu erwartende Andeutungen über gewisse Eigenschaften der Sonnenatmosphäre gegeben zu sein, die kurz besprochen zu werden verdienen.

1.

Bezeichnet μ den Brechungsexponenten der in kugelförmigen Dichtigkeitsschichten angeordneten Atmosphäre in der Entfernung r vom Centrum, μ_0 denselben für die Oberfläche der Erde, deren Radius a sei, ferner $\delta\zeta$ das Element der Refraction im Sinne: scheinbare Zenithdistanz weniger wahre, i den Winkel zwischen der nach Aussen gerichteten Tangente an die Refractionscurve und r, z die scheinbare

1) Mécanique céleste, Band IV.
2) American Journal of Science 1884. Vol. 28.

Zenithdistanz des Fixsterns, ds ein Längenelement der Refractionscurve, so ist bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} \mu r \sin i &= \mu_0 a \sin z \\ ds &= \frac{dr}{\cos i} \\ d\zeta &= \frac{-d\mu \operatorname{tg} i}{\mu} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Setzt man noch, wie üblich

$$\mu^2 - 1 = c\varrho$$

wo c eine Constante und ϱ die Dichtigkeit der Luft ist, so hat man

$$d\zeta = -\frac{c}{2\mu^2} \operatorname{tg} i \, d\varrho$$

Der Absorptionscoefficient wird zufolge sehr plausibler Annahmen der Luftmasse proportional gesetzt, welche der Lichtstrahl trifft.

Demzufolge hat man für die Intensität des beobachteten Sternlichtes J die Gleichung

$$\frac{dJ}{J} = -Q\varrho\, ds$$

was man mit Hilfe von (1) so schreiben kann:

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{2Q\mu^3}{c\mu_0 a \sin z} \varrho \frac{d\zeta}{d\varrho} r\, dr \qquad (2)$$

Nach der Bessel'schen Refractionstheorie, welche die beobachteten Erscheinungen im Allgemeinen gut darstellt und welche deshalb hier angenommen werden soll, ist

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\beta \frac{r-a}{r}}$$

wo ϱ_0 die Dichtigkeit der Luft an der Erdoberfläche und β eine empirisch bestimmte Constante ist. Hieraus folgt

$$\varrho \frac{d r}{d \varrho} = - \frac{r^2}{\beta a}$$

und hierdurch wird (2):

$$\frac{d J}{J} = - \frac{2 Q a}{c \mu_0 \beta} \left(\frac{\mu r}{a}\right)^3 \frac{d \zeta}{\sin z}$$

Der Factor $\left(\frac{\mu r}{a}\right)^3$ weicht nur dort von 1 merklich ab, wo $d\zeta$ sehr klein ist; aus diesem Grunde wird man ihn, wie dies in ähnlicher Weise bei der Entwicklung der meisten Refractionstheorien geschieht, fortlassen können. Es wird demnach, wenn H eine Constante bedeutet:

$$\frac{d J}{J} = - \frac{H}{\sin z} \cdot d \zeta$$

und integrirt

$$\log J = C - \frac{H}{\sin z} \cdot \zeta \qquad (3)$$

Die gewöhnlichen Refractionstafeln geben die Refraction ζ in der Form

$$\zeta = \alpha \operatorname{tg} z$$

wo α mit z selbst veränderlich ist. Bezeichnet man nun mit J_1 die Lichtintensität des Sternes, wenn derselbe im Zenith stände, und mit J_0 die Intensität des ungeschwächten Sternlichtes, so ergiebt sich aus (3)

$$\left.\begin{aligned} \log \frac{J}{J_1} &= - H \frac{\alpha - \alpha_0 \cos z}{\cos z} \\ \log \frac{J_1}{J_0} &= - H \alpha_0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Dies sind die bekannten von Laplace gegebenen Gleichungen.

Unter der Correction wegen Extinction $\log \varphi$ versteht man die Grösse, welche zu den beobachteten Helligkeitslogarithmen zu addiren ist, um auf das Zenith zu reduciren.

abe nun aus der a. a. O gegebenen Extinctionstabelle lerrn G. Müller die Werthe von log φ in passend ver- en Intervallen herausgenommen und diese Werthe durch 'ormeln (4) nach der M. d. kl. Q dargestellt. Die er'schen Werthe sind mit M, die aus der Formel iden mit L bezeichnet.

z_{app}	M	L	M—L	x
0°	0	0	0	1.0
20	0.004	0.005	— 1	1.1
40	0.024	0.023	+ 1	1.3
50	0.048	0.043	+ 5	1.6
60	0.092	0.077	+ 15	2.0
70	0.180	0.146	+ 34	2.9
75	0.261	0.216	+ 45	3.8
80	0.394	0.352	+ 42	5.6
81	0.432	0.395	+ 37	6.1
82	0.477	0.448	+ 29	6.8
83	0.533	0.515	+ 18	7.7
84	0.607	0.599	+ 8	8.8
85	0.707	0.707	— 0	10.2
86	0.846	0.859	— 13	12.1
87	1.045	1.066	— 21	14.8
87.5	1.176	1.208	— 32	16.7

ie Constante H ergab sich aus

$$\log (H \alpha_0) = 8.8874-10$$

$$\frac{J_1}{J_0} = 0.837$$

'ie Darstellung der Beobachtungen ist eine recht be- ende. Indessen sind die Differenzen doch von systema- n Character, dem wir um so grösseres Gewicht zusprechen ı, als auch die Seidel'schen Beobachtungen, die mit ganz anderen Instrumente ausgeführt sind, Abwei-

chungen von der Theorie in demselben Sinne geben. W des Folgenden fassen wir das Resultat der Vergleichung Beobachtungen mit der als richtig vorausgesetzten Th so zusammen. Die beobachteten Helligkeiten stimmen 0° und 85° Grad Zenithdistanz völlig mit den berechi überein. Dazwischen sind die ersteren etwas kleiner, dai hinaus sind dieselben etwas grösser.

2.

Herr Langley hat zuerst darauf aufmerksam gem dass die obige Absorptionsformel strenge genommen für einfarbiges Licht giltig ist. Nennt man die wirkl also beobachtete Intensität des Lichtes eines Sternes J_B muss gesetzt werden

$$J_B = B_1 c_1^\gamma + B_2 c_2^\gamma + \cdots + B_n c_n^\gamma \quad ($$

wo die einzelnen c die Transmissionscoefficienten der schiedenen Theile des Spectrums sind und die B die Ant der einzelnen Farben an der Gesammtintensität darst γ giebt die Dicke der Luftschicht, auf welche sich J_B be hängt also in einfacher Weise von der Zenithdistanz ab. im obigen auseinandergesetzte Extinctionstheorie nimm gegen auch im Allgemeinen, wie bei einfarbigem Licht

$$J_R = C A^\gamma$$

Man kann sich nun die Berechnung der 2 willkürl Constanten C und A in letzterer Formel so ausgeführt de dass für 2 Zenithdistanzen, also für 2 verschiedene W von γ, $J_B = J_R$ gemacht worden ist. Es fragt sich dann die Differenz $\log J_B - \log J_R$, als Function der Zenithdist dargestellt, verläuft. Die beiden Werthe für γ, für w J_B und J_R übereinstimmen, seien γ_0 und γ_1. Dann ist

$$C A^{\gamma_0} = B_1 c_1^{\gamma_0} + \cdots + B_n c_n^{\gamma_0}$$

$$C A^{\gamma_1} = B_1 c_1^{\gamma_1} + \cdots + B_n c_n^{\gamma_1}$$

Setzt man noch

$$\gamma_1 = m \gamma_0, \text{ wo } m > 1$$

$$c_1^{\gamma_0} = b_1 \; ; \; c_2^{\gamma_0} = b_2 \cdots c_n^{\gamma_0} = b_n$$

und allgemein

$$\gamma = x \gamma_0$$

so findet man leicht

$$J_B(x) = B_1 b_1^x + B_2 b_2^x + \cdots B_n b_n^x$$

$$J_R(x) = (B_1 b_1 + \cdots + B_n b_n) \cdot \left(\frac{B_1 b_1 + \cdots + B_n b_n}{B_1 b_1^m + \cdots + B_n b_n^m}\right)^{\frac{1-x}{m-1}}$$

$$C A^{\gamma_0} = J_B(1)$$

$$C^{m-1} = \frac{(J_B(1))^m}{J_B(m)}$$

und demzufolge (3)

$$Z_m(x) = \left(\frac{J_B(x)}{J_R(x)}\right)^{m-1} = \frac{(B_1 b_1^x + \cdots)^{m-1} (B_1 b_1 + \cdots + B_n b_n)^{x-m}}{(B_1 b_1^m + \cdots + B_n b_n^m)^{x-1}}$$

Hieraus lässt sich für ganze m sehr leicht, wie bereits Herr Langley gezeigt hat und für beliebige m auf etwas complicirtere Weise zeigen, dass jederzeit $Z_m(0) > 1$ also $J_B > J_R$ für $\gamma = 0$ ist. Es folgt hieraus, dass die gewöhnliche Extinctionstheorie die Schwächung des Sternlichtes im Zenith zu klein giebt und hieraus hat Herr Langley geschlossen, dass der aus der Extrapolation der gewöhnlichen Extinctionstheorie hervorgehende Werth $\frac{J_1}{J_0}$ um einen sehr beträchtlichen Procentsatz verkleinert werden müsse, und zwar wollte er es wahrscheinlich machen, dass der richtige Werth

... möglicherweise in der

... wie schon erwähnt,

... werden.

... lässt sich in den Haupt-

... schreiben

... Es folgt also, weil

... hat demnach

... nach oben ge-

... $(y = 0)$ in

... $0 < c < 1$

... zwischen

... wiederum ober-

... des vorigen

... $M - L$ ihrem Vor-

... Function $\log Z$

... Einflüssen.

... hindeuten,

... barer Weise

durch den Einwand Herrn Langley's getroffen wird. In der genannten Tabelle wird $\log Z(x) = 0$ für $z = 0$ und $z = 85^0$, was den Werthen $x = 1$ und $x = 10.2$ entspricht. Es sind übrigens zur besseren Uebersicht in der genannten Tabelle gleich die den verschiedenen z entsprechenden Werthe von x mit aufgeführt worden.

Man kann nun auch den Transmissionscoefficienten der Luft im Zenith $\alpha = A^{\gamma_0}$ aus jeder einem beliebigen x zugehörenden Lichtintensität berechnen. Diese Werthe von α werden unter einander nicht übereinstimmen. Denn es ist

$$\alpha = \left(\frac{B_1 b_1^x + \cdots + B_n b_n^x}{B_1 b_1 + \cdots + B_n b_n}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

was man mit Hülfe von (3) auch schreiben kann:

$$\alpha = \left(\frac{J_B(x)}{J_R(x)}\right)^{\frac{1}{x-1}} \cdot \left(\frac{B_1 b_1^m + \cdots + B_n b_n^m}{B_1 b_1 + \cdots + B_n b_n}\right)^{\frac{1}{m-1}}$$

oder auch

$$\log \alpha = \frac{J_B(x) - \log J_R(x)}{x-1} + \frac{\log J_B(m) - \log J_B(1)}{m-1}$$

Nach den Müller'schen Beobachtungen der obigen Tabelle ist

$$m = 10.2\,; \ \log J_B(m) - \log J_B(1) = -0.707$$

d. h.

$$\log \alpha = \frac{\log J_B(x) - \log J_R(x)}{x-1} - 0.0768 \qquad (4)$$

Es folgt hieraus, was eigentlich von vornherein selbstverständlich war, dass $\log \alpha$ für $x = 1$ und $x = m$ denselben Werth erhält, ferner dass für dazwischenliegende Werthe $\log \alpha$ kleiner ist. Indessen werden durch die Division mit $x - 1$ die Abweichungen in $\log \varphi$ zwischen Beobachtung und Rechnung wesentlich verkleinert. Man kann sofort aus den Zahlen der obigen Tabelle die verschiedenen Werthe, welche für $\log \alpha$ hervorgehen, angeben und da diese nur wenig von einander abweichen, so wird man, im Gegensatze zu einer

[illegible] Behauptung, in der Ueberein- [illegible] nur einen sehr wenig entschei- [illegible] die Berechtigung der Langley'- [illegible]

[illegible] kann man aber zeigen, dass aus den [illegible] der beobachteten und berechneten [illegible] insofern diese nur durch eine im [illegible] Extinctionstheorie entstanden sind, [illegible] Annahmen auf die Abweichung [illegible] gestattet ist, was im Allgemeinen [illegible] gleichkommt. Hierbei sollen die [illegible] mit dem Bolometer gefundenen Trans- [illegible] Grunde gelegt werden.

[illegible] ergiebt sich sofort der Ausdruck

$$\left\{Z(x) \cdot Z(0)\right\}^{\frac{1}{m-1}} =$$

$$[illegible] \quad B_1 + \cdots + B_n) \; [illegible] B_n b_n) \left(\frac{B_1 b_1 + \cdots + B_n b_n}{B_1 b_1^m + \cdots + B_n b_n^m}\right)^{\frac{x-2}{m-1}}$$

[illegible] dieser Ausdruck für $x = 2$, nämlich:

$$[illegible] = \frac{(B_1 + \cdots + B_n)\,(B_1 b_1^2 + \cdots + B_n b_n^2)}{(B_1 b_1 + \cdots + B_n b_n)^2}$$

$$[illegible] \frac{[illegible] b_2)^2 + B_1 B_3 (b_1 - b_3)^2 + \cdots}{(B_1 b_1 + \cdots + B_n b_n)^2}$$

[illegible] Werth des zweiten Gliedes rechts (I) [illegible] Nimmt man β den grössten Werth, den

$$[illegible] \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right)^2$$

[illegible] falls (I) kleiner als

$$[illegible] \frac{[illegible] 2 B_1 B_3 b_1 b_3 + \cdots}{[illegible] + \cdots + B_n b_n)^2}$$

und da der zweite Factor wiederum viel kleiner als 1 ist, jedenfalls

$$\{Z(0) \cdot Z(2)\}^{\frac{1}{m-1}} < 1 + \beta$$

Die Transmissionscoefficienten b der nicht ganz lichtschwachen Regionen im Sonnenspectrum bewegen sich, wenn man von selectiven Absorptionswirkungen absieht, innerhalb der Grenzen $b = 0.64$ und $b = 0.80$. Man findet hiernach für den Maximalwerth β:

$$\beta < 0.03125$$

und hieraus

$$\frac{J_B(0)}{J_R(0)} \cdot \frac{J_B(2)}{J_R(2)} < 1.03125$$

Nach der obigen Tabelle ist

$$\log \frac{J_B(2)}{J_R(2)} = -0.015$$

woraus man findet

$$\frac{J_B(0)}{J_R(0)} < 1.07$$

Danach ergiebt sich der Transmissionscoefficient des Lichts um weit weniger zu klein als um etwa 7%.

In Wirklichkeit aber sind alle diese Rechnungen auf Hypothesen begründet, die bei der optischen Photometrie gar nicht zulässig sind. Die physiologischen Wirkungen der einzelnen Farben in einem gewöhnlichen Spectrum concentriren sich ausserordentlich im Gelb und hier ist es nur eine schmale Zone, die an Wirkung auf das Auge alle andern Farben so ausserordentlich übertrifft, dass man z. B. beim Sonnenlicht fast nur sie allein zu berücksichtigen nöthig hat. Bei auffallend gefärbten Sternen mag die Sache sich anders verhalten; bei der überwiegenden Anzahl der Sterne aber sehr wahrscheinlich nicht. Man kann für das Sonnenspectrum die betreffende Rechnung ausführen, wenn man die B proportional den relativen physiologischen Intensitäten der einzelnen Spectralfarben setzt und für die b die von

Herrn **Langley** selbst angegebenen Werthe, welche sich zwischen 0.6 und 0.8 bewegen, einsetzt. Dann ergiebt sich für $\frac{J_B(0)}{J_R(0)}$ der von 1 minimal verschiedene Betrag von etwa 1.01. Eine solche Rechnung ist freilich insofern eine hypothetische, weil, soviel ich weiss, nicht bekannt ist, ob sich bei der Mischung von Farben die Intensitäten nach diesem Grundsatze zusammensetzen. Um indessen auch für andere und zwar wesentlich verschiedene Annahmen einen Ueberblick über den Verlauf der Funktion Z zu gewinnen, habe ich noch einige Rechnungen angestellt, die hier kurz angeführt werden mögen.

Trägt man die einzelnen b, wie sie z. B. Herr **Langley** gefunden hat, als Function der Wellenlänge λ auf, so erhält man eine sehr schwach gekrümmte Curve. Es ist deshalb erlaubt, bei Ueberschlagsrechnungen für diese Curve eine gerade Linie zu setzen und anzunehmen

$$d\,b = a\,d\,\lambda.$$

Nimmt man noch einen stetigen Verlauf der Absorption innerhalb des Spectrums an, sieht also von dem Einflusse der dunklen Linien ab, und setzt alle $B = 1$, was also eine gleiche physiologische Helligkeit aller Farben voraussetzt, so ist

$$\frac{\Sigma B b^x}{n} = \frac{1}{a(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot \frac{b_1^{x+1} - b_0^{x+1}}{x+1}$$

worin λ_0 und λ_1 die Wellenlängen für die Grenzen des sichtbaren Spectrums und b_0 und b_1 die diesen entsprechenden Transmissionscoefficienten bedeuten. Die Formel (3) giebt dann

$$\frac{J_B(0)}{J_R(0)} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{b_1^{x+1} - b_0^{x+1}}{b_1^2 - b_0^2} \left\{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{b_1^2 - b_0^2}{b_1^{m+1} - b_0^{m+1}}\right\}^{\frac{x-1}{m-1}}$$

oder wenn

$$\frac{b_0}{b_1} = y$$

gesetzt wird:

$$\frac{J_B(x)}{J_R(x)} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-y^{x+1}}{1-y^2} \cdot \left\{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{1-y^2}{1-y^{m+1}}\right\}^{\frac{x-1}{m-1}}$$

Als numerisches Beispiel möge den Langley'schen Werthen von b für die Wellenlängen 0.666 und 0.430 ungefähr entsprechend $\log y = 9.8920-10$ und der obigen Darstellung der Müller'schen Beobachtungen zufolge m 10.16 gesetzt werden. Dann ergiebt sich

$$X = \log J_B(x) - \log J_R(x) = 0.7079 + \log\left(\frac{1-y^{x+1}}{1+x}\right) + (x-1)\,[0.04014]$$

und hiermit für die linke Seite dieser Gleichung

x	X	M—L
0	+0.011	
1	0	0
2	−0.008	−0.015
3	−0.014	−0.037
4	−0.018	−0.047
5	−0.020	−0.046
6	−0.020	−0.038
8	−0.014	−0.014
10	−0.001	0
12	+0.018	+0.013
14	+0.043	+0.022
16	+0.073	+0.030
18	+0.108	

Eine grosse Aehnlichkeit des Verlaufes von X mit dem der aus einer graphischen Darstellung der M—L entnommenen Werthe ist nicht zu leugnen. Wenn man auch diesem ziemlich willkürlich gewählten Beispiele keine grosse Wichtigkeit zuertheilen kann, so scheint doch auch diese Annahme dafür zu sprechen, dass ein Theil der Differenzen M—L in der

Theil durch den von Herrn Langley erhobenen Einwand erklären ist. Wichtiger aber erscheint der Umstand, d auch hier bei $x = 0$ der Werth von X sehr klein und g nicht von Belang ist. Der extrapolirte Werth für $x = 0$ wie die Zahlen zeigen, viel geringer als die Abweichung zwischen $x = 1$ und $x = 10$ und völlig verschwindend geg die Werthe für sehr grosse x. Es ist ja von vornherein klar, d bei sehr kleinen Höhen die Emissionstheorie, auf nicht mo chromatisches Licht angewandt, grössere Fehler zeigen mu

Wie in dem angeführten Beispiele ein besserer Anschl an die Beobachtungen erreichbar war, als sich thatsächlich f die Beobachtungen des Herrn Müller ergeben hat, so kom man bei der Annahme $y = 0$ zu ganz enormen Abweichunge Für diesen Fall hat man

$$X = \log J_3(x) - \log J_1(x)$$
$$= 0.3010 - \log(1 + x) + (x - 1)\cdot[0.0823]$$

indem m rund zu 10 angenommen wird.

x	X
0	— 0.219
1	0
2	— 0.094
3	— 0.137
4	0.151
5	0.148
6	— 0.133
7	— 0.109
8	0.077
9	— 0.041
10	0

Bemerkenswerth erscheint aber, dass selbst hier der Wer von X für $x = 0$ einzelne Werthe zwischen $x = 1$ und x nicht so bedeutend übersteigt, dass sich die Grösse des ext polirten Werthes für $x = 0$ nicht sofort in den Abweichung zwischen Beobachtung und Theorie verrathen müsste.

chliesslich habe ich noch das Beispiel zu besprechen, es Herr Langley selbst zum Beweise der Berechtigung Einwürfe und namentlich zur Klarlegung des Ums, dass der Transmissionscoefficient A^{γ_0} der Luft durch ewöhnlichen Extinctionsbeobachtungen viel zu gross den wird, angeführt hat. Es muss nun in der That eben werden, dass dieses Beispiel ausserordentlich günstig lt ist, indem es gerade für die Argumente x zwischen 0 verhältnissmässig sehr grosse Werthe für $\log J_B - \log J_R$. Trotzdem liefert aber auch dieses Beispiel, ganz abgedavon, dass es eben nur ein Beispiel ist, das den thatsäch- Verhältnissen keineswegs zu entsprechen braucht, Zahlen, ch mit den vorhandenen Darstellungen, so vornehmlich des Herrn G. Müller keineswegs vereinigen lassen. Herr Langley nimmt an, dass unter je 10 Lichtstrahlen ichtbaren Spectrums je 1 Strahl mit den Transmissionscienten $b = 0.01$, 0.1, 0.2, 0.6, 0.9, 1.0, und je 2 Strahlen len Werthen $b = 0.7$ und $b = 0.9$ vorkommen. Mit dieser mmensetzung habe ich nun wieder für verschiedene he von x die zugehörigen Werthe von $X = \log J_B(x)$ g $J_R(x)$, wie die folgenden Zahlen angeben, berechnet:

x	X	M — L
0	+ 0.173	—
1	0	0
2	— 0.048	— 0.015
3	— 0.071	— 0.037
4	— 0.082	— 0.047
5	— 0.083	— 0.046
6	— 0.071	— 0.038
8	— 0.047	— 0.014
10	0	0
12	+ 0.062	+ 0.013
14	+ 0.132	+ 0.022
16	+ 0.211	+ 0.030

Die Differenzen $M - L$ sind hier so angesetzt, wie sie sich aus einer graphischen Darstellung der in der ursprünglichen Tabelle enthaltenen Differenzen ergaben und mögen vielleicht in der letzten Stelle nicht ganz sicher sein. Was nun die Grössen X betrifft, so zeigen dieselben in der That die Eigenschaft, dass sie für $x = 0$ bis 1 wesentlich positiv sind und zwischen $x = 1$ bis $x = 10$ negativ bleiben und zwar zu nicht sehr bedeutender Höhe anwachsen. Aber schon die letzteren Differenzen dürften sich kaum mit den Beobachtungen vereinigen lassen, wie die Vergleichung mit den Zahlen $M - L$ beweist. Für grosse Zenithdistanzen ($m > 10$) ist vollends die Abweichung so enorm, dass man sagen muss, das Langley'sche Beispiel entspricht auch nicht entfernt den durch die Beobachtungen angezeigten Verhältnissen. Man wird schon hieraus vermuthen, dass es auch zwischen $x = 0$ und $x = 1$ sich nicht bestätigen wird. Es kann dies natürlich nur durch Beobachtungen auf hohen Bergen untersucht werden und in der That sprechen die von Herrn Müller auf dem Säntis angestellten Beobachtungen keineswegs dafür, dass die Einwendungen des Herrn Langley eine solche practische Bedeutung haben, wie derselbe meinte.

Man wird nach alledem behaupten dürfen, dass für die Photometrie, welche die Stärke des Lichtes nach seinen physiologischen Wirkungen misst, die Einwände des Herrn Langley, trotz ihrer prinzipiellen Richtigkeit und Wichtigkeit, von keiner grossen Bedeutung sind. Andeutungen der erwähnten Einwirkungen zeigen sich, wie in dem Früheren auseinandergesetzt worden, in unzweifelhafter Weise. Dass dieselben aber nur in sehr verkleinertem Maassstabe eintreten können, wird nach den obigen Bemerkungen erklärlich erscheinen. Jedoch wurde hierbei stets von der selectiven Absorption abgesehen. Diese kann in den obigen Formeln dadurch zum Ausdruck gebracht werden, dass man eine ihrer Stärke entsprechende Anzahl von Strahlen mit sehr

kleinen b annimmt. Innerhalb der Werthe der x von 1 bis nahe dem Horizonte ist aber, wie die Vergleichung mit den Beobachtungen ergeben hat, hiervon nur wenig zu merken. Es folgt hieraus natürlich noch nicht, dass dies auch zwischen $x = 0$ und $x = 1$ sich so verhält, denn es könnten viele Strahlen mit so kleinen b vorkommen, dass ihre Intensitäten schon für $x = 1$ fast völlig unmerklich geworden sind. Dass diese Annahme aber besonders wahrscheinlich wäre, kann wohl kaum behauptet werden, und auch die Beobachtungen auf hochgelegenen Stationen haben dies kaum oder wenigstens nur in sehr geringem Grade bestätigt.

Noch auf einen Punkt muss hingewiesen werden, in welchem sich die optisch-physiologische Photometrie wesentlich unterscheidet von andern Methoden, aus den Wirkungen des Lichtes auf dessen Intensität zu schliessen. Es ist seit Purkinje bekannt, dass die relative physiologische Wirkung verschiedenfarbigen Lichtes von der Intensität abhängt und dass bei abnehmender Intensität die brechbareren Theile des Spectrums gegenüber den rothen grössere Wirkungen erzielen. Es würde daraus folgen, dass röthliches Fixsternlicht, wenn es, wie üblich, mit einer in Bezug auf Farbe unveränderlichen Lichtquelle verglichen wird, bei der Annäherung an den Horizont etwas mehr geschwächt wird, als die strenge Absorptionstheorie verlangt und für blaues Licht würde sich die Sachlage umkehren. Eine Wirkung in demselben Sinne ergiebt sich, wenn man die grösseren dem rothen Theil des Spectrums zugehörigen b verkleinert gegenüber den kleineren dem blauen Theil angehörenden, oder was dasselbe ist, wenn man das Intervall, innerhalb dessen sich die b bewegen, verengt. Zu einer zahlenmässigen Verfolgung dieses Gegenstandes fehlen aber vorläufig fast alle Daten. Vor allem darf man hierbei nicht vergessen, dass es keineswegs feststeht, wie die erwähnten Einwirkungen sich bei Mischfarben gestalten und selbst wenn man hierüber im Klaren wäre, wäre es

nothwendig, die Lichtvertheilung innerhalb der Spectra der beobachteten Sterne zu untersuchen und in Rechnung zu ziehen. Jedenfalls ergiebt sich, dass das Resultat der Extinctionsbeobachtungen in verwickelter Weise von vielen Umständen abhängt. Dass die Färbung der Sterne von Einfluss auf dieses Resultat ist, haben ebenfalls die Beobachtungen des Herrn G. Müller deutlich gemacht.

3.

Es ist jedenfalls eine interessante Aufgabe, zu versuchen, ob die Laplace'sche Extinctionstheorie auch noch auf einen von der Erde so sehr verschiedenen Körper, wie die Sonne, anwendbar bleibt.

Denkt man sich die Sonne als einen glühenden Körper, so wird dieselbe sich, wenn anders die für solche Körper geltenden photometrischen Grundgesetze Geltung behalten, als gleichförmig helle Kreisscheibe darstellen. Es war schon Bouguer bekannt, dass dies nicht der Fall ist, vielmehr die Helligkeit vom Mittelpunkt nach dem Rande merklich abnimmt. Hieraus hat Laplace[1] auf das Vorhandensein einer absorbirenden Sonnenatmosphäre geschlossen. Seine den [illegible] Rechnungen gehen aber von einem [illegible] Gesetz über die Helligkeit [illegible]

[illegible] Helligkeitsvertheilung [illegible] Zeit von Herrn [illegible] und zwar mit einem [illegible] seine Messungen auch [illegible] Verbesserung des

[illegible] Berlin.

erwähnten Fehlers) bearbeitet, ist aber zum Theil aus dem Grunde, weil nicht die Helligkeitslogarithmen der Rechnung zu Grunde gelegt worden sind, zu einem nicht sehr befriedigenden Resultat gelangt. Dagegen fand er eine fast vollständige Uebereinstimmung mit der Theorie, wenn die in verschiedenen Farben gemessenen Helligkeiten mit verschieden grossen Sonnendurchmessern berechnet werden. Dass dieses Resultat zu einem näheren Eingehen auffordert, wird wohl kaum bezweifelt werden können.

Nennt man die Helligkeit in der Mitte der Sonnenscheibe J_0 und in der scheinbaren Entfernung ϱ vom Mittelpunkte (Sonnenradius = 1 gesetzt) J, ferner z die Zenithdistanz, unter welcher von einem Elemente der Sonnenoberfläche ein Strahl ausgehen muss, um in's Auge zu gelangen und ζ die Refraction, welche dieser Strahl in der als dunkel und das Licht absorbirend angesehenen Sonnenatmosphäre erfährt, so ist nach der obigen Extinctionsformel

$$\log \frac{J}{J_0} = -\nu_1 \left\{ \frac{\zeta}{\sin z} - \left(\frac{\zeta}{\sin z} \right)_0 \right\}$$

Nimmt man nun noch vorderhand an, und diese Annahme hat Laplace ausschliesslich verfolgt, dass die Refraction dem Gesetze

$$\zeta = \alpha \operatorname{tg} z$$

folgt, wo α constant für alle z ist, so wird

$$\log \frac{J}{J_0} = -\nu \frac{1-\cos z}{\cos z} \qquad (1)$$

Bezeichnet aber μ_0 den Brechungsexponenten der Sonnenatmosphäre an der Oberfläche, so hat man zufolge der Bemerkungen in der vor diesem Aufsatze abgedruckten Notiz [1])

$$\sin z = \frac{\varrho}{\mu_0} \qquad (2)$$

Auf die eigentliche Bedeutung der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) soll später eingegangen werden.

1) Notiz über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre.

Ich habe nun die Beobachtungen des Herrn Vogel zunächst mit dem Werthe $\mu_0 = 1$ nach Formel (1) **reducirt** und die besten Werthe von ν im Sinne der **Methode der** kleinsten Quadrate, angewandt auf die **Helligkeitslogarithmen,** für jede Farbe abgeleitet. Man findet alles in der **folgenden** Tabelle zusammengestellt. Es sind unter B die **beobachteten** und unter R die berechneten J (Numeri) gegeben. **Ich habe** hierbei nur einen Auszug aus den Vogel'schen **Tabellen** benutzt und die Ausgleichung bezieht sich auf die **Helligkeiten** für $\varrho = 0.0, 0.1, 0.2 \cdots 0.9$. Die Werthe für $\varrho = 0.95$ sind nur zur Vergleichung angesetzt, denn es war doch von vornherein nicht zu erwarten, so nahe am Rande noch mit der Formel (1) auszureichen. Die Wellenlänge der **Farbe,** in welcher die Messung ausgeführt worden, ist in 0.001 *mm* angesetzt.

	Violett		Dunkelblau		Blau		Grün		Gelb		Roth	
	$\lambda = 0.409$		$\lambda = 0.443$		$\lambda = 0.470$		$\lambda = 0.513$		$\lambda = 0.579$		$\lambda = 0.662$	
ϱ	B	R	B	R	B	R	B	R	B	R	B	R
0.0	10.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
0.1	99.6	99.7	99.7	99.6	99.7	99.8	99.7	99.8	99.8	99.8	99.9	99.9
0.2	98.5	98.7	98.7	98.9	98.8	99.1	98.7	99.0	99.2	98.2	99.5	99.5
0.3	96.3	97.1	96.8	97.3	97.2	97.8	96.9	97.8	98.2	98.0	98.9	98.8
0.4	93.4	94.6	94.1	95.0	94.7	96.0	94.3	95.9	96.7	96.8	98.0	97.7
0.5	89.7	91.0	90.2	91.7	91.3	93.0	90.7	93.1	91.5	93.8	96.7	96.1
0.6	82.4	85.8	84.9	87.0	87.0	89.3	86.2	89.1	90.9	90.2	94.8	93.7
0.7	74.4	78.3	77.8	80.0	80.8	83.4	80.0	83.1	84.5	84.7	91.0	90.2
0.8	63.7	66.5	67.0	68.9	71.7	73.9	70.9	73.5	74.6	75.9	84 3	84.1
0.9	47.7	45.4	50.2	49.8	57.6	55.7	56.6	55.1	59.0	58,6	71.0	71.5
[0.95	34.7	26.8]	[35.0	29.3]	[45.6	36.9]	[44.0	36.2]	[46.0	40.8]	[58.0	56.5]
ν	0.2655		0.2419		0.1969		0.2004		0.1795		0.1127	
log ν	9.4240		9.3837		9.2941		9.3018		9.2542		9.0517	

Aus den Werthen ν ergeben sich für den Transmissions-coefficienten der Sonnenatmosphäre (Intensität für $z = 0$ dividirt durch die ungeschwächte Intensität)

Roth . . .	0.77	Blau . . .	0.64
Gelb . . .	0.66	Dunkelblau .	0.57
Grün . . .	0.63	Violett . .	0.54

Diese Zahlen ergeben, was selbstverständlich bereits Herr Vogel bemerkt hat, eine überraschend geringe Schwächung des Lichtes durch die Sonnenatmosphäre, so dass man dieser (insoweit sie als nicht leuchtendes, absorbirendes Medium in Frage kommt) entweder eine sehr geringe Höhe oder eine auffallend geringe Dichtigkeit wird zuertheilen müssen. Was ferner die Differenzen zwischen B und R betrifft, so wird man schon jetzt die Darstellung im Roth und Gelb als genügend anerkennen müssen. Im Roth ist sie sogar ganz ausgezeichnet. Das Mittel der absoluten Werthe der Abweichungen ist

für Roth 0.002 bez. 0.003
„ Gelb 0.003 „ 0.009

je nachdem man die Werthe für $\varrho = 0.95$ fortlässt oder mitnimmt. Dagegen lassen die Abweichungen in den anderen Farben zu wünschen übrig. Wenn auch systematische Fehler in den vorliegenden Rechnungen nicht ganz ausgeschlossen sind, (Blau und Grün scheinen dies anzudeuten) so sind doch offenbar die Messungen so vortrefflich, dass man den Versuch einer besseren Darstellung wohl wagen darf und man wird hierzu gezwungen, weil diese Differenzen fast vollständig verschwinden, wenn man eine etwas strengere Extinctionstheorie, als die Formel (1) vorausgesetzt, zu Grunde legt.

Zuerst wurden Werthe von μ_0 schätzungsweise so angenommen, dass die nach Formel (2) und (1) gerechneten Werthe $\log J$ sich den beobachteten besser als früher anschlossen. Es ergab sich so:

	Violett		Dunkelblau		Blau		Grün	
	$\frac{1}{\mu_0} = 0.947$		$\frac{1}{\mu_0} = 0.947$		$\frac{1}{\mu_0} = 0.92$		$\frac{1}{\mu_0} = 0.92$	
ϱ	B	R	B	R	B	R	B	R
0.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
0.1	99.6	99.6	99.7	99.7	99.7	99.7	99.7	99.7
0.2	98.5	98.4	98.7	98.6	98.8	98.8	98.7	98.7
0.3	96.3	96.3	96.8	96.8	97.2	97.2	96.9	97.1

	Violett		Dunkelblau		Blau		Grün	
	$\frac{1}{\mu_0}$ 0.947		$\frac{1}{\mu_0} = 0.947$		$\frac{1}{\mu_0} = 0.92$		$\frac{1}{\mu_0} = 0.92$	
ϱ	*B*	*R*	*B*	*R*	*B*	*R*	*B*	*R*
0.4	93.4	93.1	94.1	94.1	94.7	94.8	94.3	94.7
0.5	88.7	88.7	90.2	90.3	91.3	91.5	90.7	91.3
0.6	82.4	82.8	84.9	85.0	87.0	87.0	86.2	86.5
0.7	74.4	74.8	77.8	77.7	80.8	80.6	80 0	80.0
0.8	63.7	63.7	67.0	67.0	71.7	71.5	70.9	70.9
0.9	47.7	47.7	50.2	50.2	57.6	57.7	56.6	56.6
0.95	[34.7	36.8]	[35.0	37.8]	[45.6	47.6]	[44.0	46.4]
ν	40.4101		0.3268		0.3048		0.3155	
log ν	9.6134		9.5142		9.4840		9.4990	
$\frac{J_0}{i}$	= 0.39		0.47		0.50		0.48	

Wie man sieht, ist schon jetzt die Darstellung eine so vollkommene geworden, dass es völlig illusorisch wäre, etwa durch Veränderung von μ_0 einen noch besseren Anschluss zu erzielen. Eine Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate scheint mir vorderhand nicht am Platz, da es sich durchaus nur um Abweichungen handelt, die von den Beobachtungen kaum verbürgt werden können. Man wird aber auch nicht den Zahlenwerthen μ_0 allzu grosses Gewicht beilegen dürfen und als gesicherte Folgerung darf nur gelten gelassen werden, dass man mit solchen Werthen von μ_0, welche um einige Hundertstel grösser als 1 sind, die vorhandenen Beobachtungen in den obigen vier Farben gut darstellen kann, während dies bei Roth und Gelb schon mit Werthen von μ_0, welche sich nicht merklich von 1 unterscheiden, gelungen ist. Um nun einzusehen, auf welche Verhältnisse in der Sonnenatmosphäre die angestellten Rechnungen hindeuten, muss zuerst hervorgehoben werden, dass die Formel (1) schon bei der Berechnung der Extinction in der Erdatmosphäre nicht ausreichend ist. Denn es genügt nicht, in dem Ausdruck

$$\zeta = \alpha \operatorname{tg} z_0$$

wo z_0 die scheinbare Zenithdistanz ist, α als constant vorauszusetzen, wohl aber wird es bei den in diesem Artikel vorkommenden Zenithdistanzen genügen, zu setzen:

$$\zeta = \alpha \operatorname{tg} z_0 - \gamma \operatorname{tg}^3 z_0$$

woraus die Extinctionsformel hervorgeht

$$\log \frac{J}{J_0} = -\nu \left\{ \frac{1 - \cos z_0}{\cos z_0} - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\sin^2 z_0}{\cos^3 z_0} \right\} \qquad (3)$$

Die z_0 sind bei den vorliegenden Sonnenbeobachtungen nicht bekannt. Die Rechnungen zeigten, dass man mit den beiden Formeln (2) und (1) auskommt; die gefundenen μ_0 sind nun aber keineswegs die Brechungsquotienten an der Sonnenoberfläche, vielmehr sagen sie nur aus, dass die Brechungen in der Sonnenatmosphäre nicht mehr nach (1), sondern nach der allgemeineren Formel (3) berechnet werden müssen. Um dies einzusehen braucht man nur die gefundenen von 1 wenig verschiedenen Werthe

$$\mu_0 = 1 + \lambda$$

zu setzen und die zweiten und höheren Potenzen von λ zu vernachlässigen. Setzt man dann

$$\sin z = \sin z_0 - \lambda \sin z_0$$

in die Formel (1) ein, so ergiebt sich sofort

$$\log \frac{J}{J_0} = -\nu \left\{ \frac{1 - \cos z_0}{\cos z_0} - \lambda \frac{\sin^2 z_0}{\cos^3 z_0} \right\} \qquad (4)$$

also genau die Formel (3), wenn nur

$$\lambda = \frac{\gamma}{\alpha}$$

gemacht wird.

Hiernach sagen an sich auch die absoluten Werthe von μ_0 nichts über die Brechungsquotienten an der Sonnenoberfläche aus, sie könnten nach Umständen auch kleiner als 1 werden, ohne zu physikalischen Widersprüchen zu führen. Dagegen aber spricht der Umstand, dass die Werthe von μ_0 so verschieden

von einander sind, so entschieden, als es der Genauigkeit der Beobachtung entspricht, dafür, dass eine ziemlich bedeutende Dispersion in der Sonnenatmosphäre stattfindet. Dieser Schluss ist freilich wesentlich darauf gegründet, dass die Beobachtungen im Roth und Gelb einerseits und in den übrigen Spectralfarben andrerseits nicht durch nahe dieselben Werthe von μ darstellbar sind und man wird natürlich diese Folgerung, da sie sich nur auf die Beobachtungen eines Beobachters und eines Instrumentes stützt, nur mit grosser Reserve aussprechen können.

Wenn nun die Sonnenatmosphäre wirklich so bedeutende Dispersionen zeigt, wie die oben angeführten Zahlen andeuten, so muss zunächst der Widerspruch beseitigt werden, der darin liegt, dass die in verschiedenen Farben gemessenen Sonnendurchmesser nicht jene enorme Differenzen aufweisen, wie hieraus zu folgen scheint. Nach der früheren Notiz ist die Vergrösserung des scheinbaren Durchmessers der Sonne σ proportional mit $(\mu_0 - 1)$ und zufolge der obigen Werthe wäre diese Vergrösserung so gross, dass sie auch ganz rohen Messungen nicht hätte verborgen bleiben können, auch solchen nicht, die mit keineswegs monochromatischen Blendgläsern ausgeführt worden sind. Man darf, obwohl diese Verhältnisse, deren Untersuchung genug des Interessanten darbietet, nicht ausreichende Beobachtung gefunden haben, doch mit ziemlicher Sicherheit behaupten, dass die Verschiedenheit der in verschiedenen Farben gemessenen Durchmesser nicht grösser als vielleicht 0ʺ2 beträgt, wenigstens sind die von Herrn Auwers[1] neuerdings ausgeführten Messungen kaum mit grösseren Abweichungen zu vereinigen. Es ist aber leicht einzusehen, wie man beide Thatsachen in Uebereinstimmung bringen kann.

Nach den gefundenen Werthen für ν ist, wie schon bemerkt, die Absorption, welche die Sonnenatmosphäre ausübt,

1) Astron. Nachr. No. 2935.

in Anbetracht der Grösse des Sonnenkörpers, auffallend gering. Es muss hieraus geschlossen werden, dass entweder diese Atmosphäre sehr wenig hoch oder sehr wenig dicht sei. Nimmt man nun das erstere an, so kommt man, so weit ich sehe, nirgends zu Widersprüchen. Die relativ grossen Werthe von $\mu_0 - 1$, welche auf eine grössere Dichtigkeit der absorbierenden Schicht der Sonnenoberfläche hindeuten, wenigstens nach der den Verhältnissen auf der Erde entsprechenden Annahme, dass $\mu - 1$ oder $\mu^2 - 1$ der Dichtigkeit proportional ist, enthalten gar nichts Unmögliches und ferner müssen dann, wie aus der bereits citirten Notiz hervorgeht, am Sonnenrande totale Reflexionen auftreten, welche jene Vergrösserung des scheinbaren Durchmessers nicht zu Stande kommen lassen. Die zweite von vornherein als möglich zuzulassende Annahme einer ausgedehnten und sehr dünnen Sonnenatmosphäre dagegen wird so lange als sehr unwahrscheinlich gelten müssen, als nicht die für verschiedene Farben so verschieden sich ergebenden Werthe von μ als aus systematischen Beobachtungsfehlern hervorgegangen nachgewiesen sind. Man könnte hierbei noch zweifelhaft sein, ob nicht die factischen Brechungsexponenten an der Sonnenoberfläche, infolge des Auftretens eines grossen Factors, trotzdem die in Formel (4) vorkommende Grösse λ für zwei Farben um einige Hundertstel verschieden erhalten worden sind, doch nur sehr wenig verschieden zu sein brauchen, und demzufolge eine grosse Dispersion anzunehmen nicht nothwendig ist. Wahrscheinlich ist dies an sich nicht; wenn man beispielsweise die Brechungsverhältnisse, wie sie die Bessel'sche Theorie liefert, auf die vorliegenden Verhältnisse anwendet, lässt sich die Sache leicht entscheiden.

Ist α die Refractionsconstante und β die Constante der Bessel'schen Theorie, so ist für kleine α nahe

$$\lambda = \frac{1}{\beta} + \frac{7}{4}\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2}\alpha$$

und für zwei verschiedene Farben

$$\lambda_0 - \lambda_1 = (\alpha_0 - \alpha_1)\left[\frac{7}{4\beta} - \frac{1}{2}\right]$$

Es wird demnach $\alpha_0 - \alpha_1$ und demzufolge auch die Differenz der Brechungquotienten für zwei verschiedene Farben nur dann nicht von derselben Grössenordnung wie $\lambda_0 - \lambda_1$ werden, wenn β sehr klein ist und dies ist nach der ersten Gleichung für λ nicht möglich, weil λ klein, nämlich einige Hundertstel ist.

Wenn sich auch der Gegenstand nicht weit genug verfolgen lässt, so scheinen sich doch interessante Ausblicke zu eröffnen und es wäre sehr wünschenswerth, wenn solche Beobachtungsreihen, wie sie Herr Vogel geliefert hat, wiederholt und mit der grössten erreichbaren Genauigkeit ausgeführt werden möchten.

Oeffentliche Sitzung

u Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1891.

Wahlen.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden ge-
ihlt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten
stätigt:

zum ordentlichen Mitgliede:

'rr Dr. Ludwig Boltzmann, k. k. österr. Hofrath und Professor der theoretischen Physik an der Universität zu München;

zum auswärtigen Mitgliede:

s bisherige correspondirende Mitglied Herr Dr. Ernst Haeckel, Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie an der Universität zu Jena;

zu correspondirenden Mitgliedern:

rr Dr. Eduard van Beneden, Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie an der Universität zu Lüttich;

rr Dr. Giovanni Capellini, Professor der Geologie und Paläontologie an der Universität zu Bologna.

Sitzung vom 5. Dezember 1891.

1. Herr L. v. SEIDEL überreicht eine Abhandlung des correspondirenden Mitgliedes, Leo Königsberger in Heidelberg: „über die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme."

2. Herr W. v. GÜMBEL legt seine Publikation: „Vierte Abhandlung der geognostischen Beschreibung von Bayern (Fränkischer Jura) in fünf Kartenblättern und einem Textband mit einer Uebersichtskarte" mit einigen erläuternden Bemerkungen vor.

3. Derselbe übergiebt sodann eine von dem auswärtigen Mitgliede, Professor Dr. F. v. Sandberger in Würzburg eingeschickte Abhandlung: „über die Erzgänge der Gegend von Freudenstadt und Bulach im Württembergischen Schwarzwalde."

Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme.

Von Leo Königsberger in Heidelberg.

(Eingelaufen 7. November.)

Ich erlaube mir im Folgenden einige Sätze bezüglich der Irreductibilität partieller Differentialgleichungssysteme mitzutheilen, deren ausführliche Darlegung nächstens im „Journal für Mathematik" erscheinen wird.

Eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die sich bekanntlich stets auf die Form bringen lässt

$$(1)\qquad \frac{\partial G\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_\mu}, t_1\right)}{\partial t_1} \frac{\partial u}{\partial z_1} = G_1\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_\mu}, t_1\right),$$

worin G und G_1 ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen und t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen

$$z_1, z_2, \cdots z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_\mu}$$

algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(2)\qquad G\left(z_1, z_2, \cdots z^\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial z_\mu}, t\right) = 0$$

ist, soll irreductibel genannt werden, wenn keines ihrer Integrale das Element eines Integralsystems irgend eines Systems algebraischer partieller Differentialgleichungen mit beliebig vielen abhängigen und nur $\mu - 1$ der unabhängigen Variabeln $z_1, z_2 \ldots z_\mu$ bildet, oder, was dasselbe ist, wenn keines ihrer Integrale eine algebraische partielle Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit nur $\mu - 1$ der unabhängigen Variabeln befriedigt.

Eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln ist also irreductibel, wenn sie mit keiner gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung ein Integral gemein hat.

Man zeigt dann leicht,

> dass eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer anderen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, aber niederen Grades[1] nie ein Integral gemein haben kann, dass aber, wenn dieselbe mit einem partiellen Differentialgleichungssystem höherer Klasse[2]) oder derselben (ersten) Klasse, aber höheren oder desselben Grades ein Integral gemein hat, dann auch sämmtliche Integrale der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung Elemente von Integralsystemen des partiellen Differentialgleichungssystems bilden werden,

und daraus wieder unmittelbar,

1) Der Grad der partiellen Differentialgleichung wird durch den Grad der Gleichung (2) in Bezug auf t definirt.

2) Die Klasse eines partiellen Differentialgleichungssystems wird durch die Anzahl der abhängigen Variabeln bestimmt.

dass, wenn eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer algebraischen partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung ein Integral gemein hat, sie alle Integrale mit derselben gemein haben, also selbst ein algebraisches Integral der letzteren sein muss.

Die angeführten Sätze führen nun mit einigen Modifionen auf die allgemeine Irreductibilitätsdefinition und die dieser entspringenden Sätze für beliebige partielle Ferentialgleichungssysteme.

Sei das partielle Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse den m abhängigen Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_m$ und den μ bhängigen Variabeln $z_1, z_2, \cdots z_\mu$ vorgelegt

$$3)\quad \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t_1}\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = G_1 \\ \frac{\partial G}{\partial t_1}\frac{\partial u_2}{\partial z_1} = G_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial G}{\partial t_1}\frac{\partial u_m}{\partial z_1} = G_m, \end{cases}$$

rin $G_1, G_2, \cdots G_m$ ganze Functionen der Grössen

$$\cdots z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}, t_1,$$

l t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen (α) ebraisch irreductiblen Gleichung

$$G\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}, t\right) = 0$$

so soll dasselbe ein **irreductibles** genannt wer-n, wenn **kein** System von $1, 2, 3, \cdots$ oder $m-1$ In-ralelementen $u_1, u_2, \cdots u_{m-1}$ wiederum $1, 2, 3, \cdots$ er $m-1$ Elemente eines Integralsystems eines

partiellen Differentialgleichungssystems beli Klasse und beliebigen Gradesbildet, in welch den nach z_1 genommenen partiellen Differ quotienten nur

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1} \text{ oder } \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \text{ oder} \cdots, \text{ oder } \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \cdots \frac{\partial u_m}{\partial}$$

enthalten sind, oder welches die Form hat

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = v_1 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = v_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial z_1} = v_k \\ \psi_{k+1}\Big(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_k, v_1, v_2, \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots \\ \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_\mu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{k+\varepsilon}\Big(z_1, z_2, \cdot z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_k, v_1, v_2, \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots \\ \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_2}, \cdots \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu} \cdots \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_\mu} \end{cases}$$

worin k eine der Zahlen $1, 2, \cdots m-1$ bedeute und $\psi_1, \cdots \psi_{k+\varepsilon}$ algebraische Functionen der schlossenen Grössen sind.

Mit Hülfe dieser Definition lässt sich nun der mentalsatz der Irreductibilität folgendermassen aussp

Wenn **ein** Integralsystem des **irreduc** Differentialgleichungssystems (3) einen Th Elemente oder alle Elemente eines Integrals

des algebraischen partiellen Differentialgleichungs-systems höherer Klasse oder derselben Klasse, aber höheren Grades

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = H_1 \\ \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = H_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1}\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial z_1} = H_\lambda \end{cases}$$

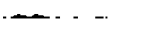
bildet, worin $H_1, H_2, \cdots H_\lambda$ ganze Functionen der Grössen

$$(\beta) \cdots\, z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1,$$

und τ_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen (β) algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(7)\ H\left(z_1, z_2, \cdots z_\mu, u_1, u_2, \cdots u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \cdots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_2}, \cdots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau\right) = 0$$

ist, so werden alle Integralsysteme von (3) das Differentialgleichungssystem (6) befriedigen.



Ueber die Erzgänge der Gegend von Freudenstadt und Bulach im württembergischen Schwarzwald.

Von F. v. Sandberger.

(Eingelaufen 5. Dezember.)

Der nördliche **Schwarzwald** ist am Ostrande von einer Buntsandsteinzone umgeben, welche früher offenbar mit jener des Westrandes in Verbindung gestanden hat, wie zahlreiche über das Hochplateau des Gebirges verlaufende Züge desselben beweisen. Diese stehen aber jetzt zum Theil nicht mehr in unmittelbarem Zusammenhange, sondern bilden hochgelegene Wasserscheiden der tief in das Grundgebirge eingeschnittenen Thäler der Rench, Kinzig, Murg und Enz. Im Nagoldthale, dem östlichsten der Hauptthäler, tritt das Grundgebirge nur in Form von Granit und nur auf einer kleinen Strecke bei dem oberen Bade von Liebenzell zu Tage; es mag das eine besonders hoch aufragende Granitklippe gewesen sein, welche daher von dem Buntsandstein nicht so vollständig bedeckt werden konnte, als ihre nächste Umgebung. Die geringste Breite zeigt der nördliche Buntsandsteinzug bei Schenkenzell, wo er sich an den südlichen anschliesst, welcher dann das Grundgebirge bis an den Rhein bei Waldshut und Säckingen begleitet. Nach Norden nimmt er fortwährend an Breite zu, bei Freudenstadt erreicht er schon 17, bei Neu-Bulach 29, bei Neuenbürg 38 km, bei Durlach ist er aber meist schon durch die überlagernde Wellenkalk-

Gruppe grösstentheils verdeckt und tritt erst am Südrande des Odenwaldes bei Heidelberg wieder an die Oberfläche.

Bezüglich der Gliederung des Buntsandsteins mag einstweilen bemerkt werden, dass ich keine Veranlassung habe, von meiner früheren Auffassung derselben abzugehen. Hiernach folgen von unten nach oben

Unterer Buntsandstein.

1. Heller, oft ganz weisser Sandstein mit zahlreichen Feldspath-Bröckchen und Flecken von Manganoxyden und Brauneisenstein (Tigersandstein), zuweilen, namentlich nach oben reich an Porphyr-, aber auch Quarz-Geröllen, stellenweise Conglomerat-Bänke bildend (Rossbühl, Bahnhof Teinach).

2. Rothgefärbte thonige, oft plattenförmige Sandsteine nach oben von gröberem Korne, reich an Kaolin-Bröckchen und gewöhnlich auch an infiltrirter Quarzsubstanz, zu oberst mit einer oder mehreren Conglomerat-Bänken, in welchen Gerölle von weissem Quarze und verschiedenfarbigen harten Quarzsandsteinen vorherrschen. Kieselsandstein (Sandb.). Mittlerer Buntsandstein (Eck). Ueberall verbreitet.

Mittlerer Buntsandstein.

3. Bläulicher oder violeter Sandstein mit dolomitischen Putzen und Carneol-Schnüren, nur an einzelnen Orten gut aufgeschlossen, z. B. am Kienberg bei Freudenstadt, Kniebis beim Gasthaus zum Lamm 942,32 m, Elmen bei Baiersbronn 899,20 m, Rossberg 800 m, Wildberg bei Calw, Durlach u. s. w.

Oberer Buntsandstein

4. Thoniger, meist dunkelrother Sandstein, nach oben in dünnplattige, glimmerreiche Lagen übergehend (Lossburg, Rodt, Wittlensweiler, Neu-Bulach u. a. O.)

5. Rother Schieferthon (Röth), ebenfalls nicht überall gut aufgeschlossen, aber oft sehr deutlich, wie in den Eisenbahn-Einschnitten bei Freudenstadt, Calw, Pforzheim und Durlach.

Zwischen den Abtheilungen 4 und 5 lagert, wie aus dem Profile bei Wittlensweiler ersichtlich, zuweilen noch genau in demselben Niveau, wie der Chirotherien-Sandstein in Franken, eine lichte, feinkörnige Sandstein-Bank mit kalkigem Bindemittel.

Ueber dem Röth folgt unmittelbar der Wellen-Dolomit. Ein im August 1891 in Begleitung des Herrn Dr. Beck aus Stuttgart an der Bahnlinie nahe dem grossen Viaduct bei Wittlensweiler aufgenommenes Profil zeigt die folgende Schichtenreihe:

Oberer Buntsandstein	Glimmereicher Thonsandstein . .	8,00 m	
	Weisser harter, glimmerarmer Sandstein	0,75 „	(Chiroth.-Bk. in Franken 0,60 m)
	Röth, selten dolomitische Putzen und kleine Kalkspath-Drusen enthaltend	3,00 „	
		11,75 m	
Unterster Wellendolomit.	Harter graugrüner Mergel . . .	0,35 m	
	Unterste gelbgraue, sehr feinkörnige Dolomitbank	0,50 „	
	Harter graugrüner Mergel . . .	1,50 „	
	Mittelkörniger gelbbrauner Dolomit, plattenförmig, mit Wad, Kupferlasur und Malachit	0,75 „	
		3,10 m	

In der Nähe des Profils steht ein kleiner Schwerspath-Gang im Wellendolomit zu Tage.

Ebenso verhält sich die Grenzregion bei Aach, Rohrdorf, Nagold, Neu-Bulach (Signalhöhe) u. a. a. O., nur die weisse Sandstein-Bank ist nicht überall aufgeschlossen.

Es wird nun zunächst nothwendig sein, der kurzen Schilderung der für das vorliegende Thema hauptsächlich in Betracht kommenden Gesteine eine eingehendere mit besonderer

Rücksicht auf die chemische Beschaffenheit derselben folgen zu lassen.[1])

Der Tigersandstein ist stets licht gefärbt und namentlich in der tiefsten Region reich an Flecken von Mangan- und Eisenoxyden, welche ich schon 1861 als Reste manganhaltiger Braunspathe erkannt hatte.[2]) In den Bohrlöchern zu Teinach[3]) war dieses Bindemittel noch vollständig erhalten vorgefunden worden, es ist das Material, aus welchem durch Einwirkung der in den Wassern des darüber lagernden Sandsteins reichlich vorhandenen Kieselsäure die Kohlensäure entwickelt wird, welche den Teinacher Quellen den Charakter von Säuerlingen verleiht. Aber nicht bloss unter Tag lässt sich das nachweisen, sondern wenigstens ebenso schön auch in dem erst seit dem Bau der württembergischen Schwarzwaldbahn freigelegten grobkörnigen Sandstein am Bahnhof Teinach, 342 m ü. M., also ungefähr in demselben Niveau, in welchem die Wiesenquelle in Teinach erbohrt wurde. Hier steht ein zwar nicht gefleckter, aber durch sein grobes Korn und seinen Reichthum an Feldspath-Trümmern, wie durch sein Niveau noch deutlich als zu derselben unteren Abtheilung des Buntsandsteins, wie der Tigersandstein, gehörig erkennbarer Sandstein zu Tage an, dessen Bindemittel (20,37 proc.) durchweg aus lichtem etwas bittererdehaltigem Kalkspath[4]) besteht, welcher sich in Salzsäure unter starkem Brausen auflöst. Eckige Gerölle von Quarz-Porphyr, bis 0,04 m lang und 0,03 m breit, herrschen in seinen Conglomerat-Bänken

1) Bezüglich der in dem Schlämmrückstande der sämmtlichen Sandsteine enthaltenen Mineralien mag bemerkt werden, dass in ihnen mikroskopischer Zirkon und Turmalin, sowie Magnetkies niemals fehlen, zuweilen ist auch Rutil in geringer Menge vorhanden.

2) Geolog. Beschreib. der Gegend von Baden S. 19.

3) Regelmann, Quellwasser Württembergs S. 36.

4) 16,13 $CaOCO^2$, 4,10 $MgOCO^2$ und 0,34 $CaOSO^3$.

vor, auch solche von weissem Quarze sind nicht selten[1]), jedoch stets weit kleiner, Quarzsandstein fehlt aber gänzlich. Das Ganze könnte man statt Conglomerat, in Betracht der eckigen Beschaffenheit der Gerölle wohl auch Breccie nennen. Man wird die aus Porphyr bestehenden als von einer nahegelegenen, aber jetzt ganz von Buntsandstein überdeckten Porphyr-Kuppe oder einer Porphyr-Breccien-Bank des mittleren Rothliegenden abgeschwemmtes und hier wieder abgelagertes Material ansehen müssen. In letzterem Falle liegt es nahe, den Ursprungsort der Porphyrgerölle in dem 8 km entfernten Enzthale zu suchen, wo ja Rothliegendes in grossen Massen ansteht und feldspathreicher Granit zur Bildung der Feldspath-Bröckchen des Sandsteins in grösster Menge zur Verfügung stand. An Porphyr-Geröllen so reiche Bänke, wie sie hier als Local-Bildung vorliegen, sind mir in der tiefsten Abtheilung des unteren Buntsandsteins im badischen Schwarzwald nie zu Gesicht gekommen. Dort[2]) treten sie vielmehr massenhaft, aber niemals über die Quarz- und Quarzsandstein-Gerölle vorwiegend, erst neben diesen in der oberen auf und werden von solchen des mittleren härteren Rothliegenden, Kieselhölzern aus demselben u. s. w. begleitet, wie das auch im Odenwald u. a. a. O. der Fall ist.

Die auf den Tigersandstein folgenden Wechsel von thonigen, plattenförmigen und mittelkörnigen, z. Th. an infiltrirter Quarzsubstanz reichen, aber meist nicht fest verkitteten, sondern lockeren (zuckerkörnigen) Sandsteine (Kieselsandstein Sandb.[3]) näher zu beschreiben erscheint unnöthig, da dies bereits meisterhaft von Daubrée und wiederholt von mir[4])

1) In einer Durchschnittsprobe 20 auf 45 Porphyr-Gerölle.

2) Untersuch. über Erzgänge I. S. 45.

3) Gänzlich verschieden von dem von Paulus und anderen württembergischen Geologen ebenso benannten verkieselten Nebengesteine der Erzgänge.

4) Geolog. Beschreib. der Gegend von Baden S. 19 u. a. a. O.

geschehen ist. Sie schliessen mit Bänken von grobem, vorwiegend aus Geröllen von weissem Quarze und verschiedenfarbigen harten Quarzsandsteinen gebildetem Conglomerat nach oben ab. Nur der in Berührung mit den Erzgängen im grossen Steinbruche an der Christophsaue bei Freudenstadt aufgeschlossene Theil dieser Gruppe wird später genauer zu schildern sein.

Ebensowenig geben die Aufschlüsse in der mittleren carneolführenden Schichten-Gruppe hier zu weiterer Besprechung Veranlassung. Die oberen rothen thonigen Sandsteine, unten regelmässig in Quader und oben in glimmerreiche Platten abgesondert, sind über das ganze Plateau verbreitet und bilden bei Neu-Bulach das unmittelbare Nebengestein des dortigen Ganges; soweit bis jetzt bekannt, enthalten sie ausser Eisen und wenig Mangan keine Schwermetalle. Diese Gesteine zeigen im Gebiete des südwestdeutschen Buntsandstein-Zuges eine ausserordentlich grosse Beständigkeit in petrographischer und chemischer Beziehung, so dass es mir nicht möglich sein würde, Handstücke von Lossburg, Neu-Bulach und Durlach von solchen aus dem badischen Odenwalde oder Franken zu unterscheiden. Auch die Analysen zeigen höchstens Schwankungen im Kieselsäuregehalt, d. h. in der Menge des Quarzsandes.[1] Die Leitpflanzen, Anomopteris Mougeoti und Equisetum Mougeoti, sind ebenfalls von Villingen bis Durlach an einzelnen Orten, namentlich bei Nagold[2]) beobachtet.

Ebenso verhält es sich auch mit dem rothen Schieferthone, dem Röth, dessen petrographische Beschaffenheit und durch sie bedingte Undurchlässigkeit für Wasser ihm in dem

1) Vergl. die Analysen des oberen Buntsandsteins von Neuenbürg von Wolff (Württemb. Jahresh. XXIII. S. 84 und von Erlabrunn und Thüngersheim bei Würzburg von Hilger (Mitth. a. d. pharmac. Institute und Laboratorium f. angew. Chemie zu Erlangen I. S. 140 ff.)

2) Begleitworte zu Blatt Calw S. 9.

ganzen Gebiete eine hervorragende Wichtigkeit als Quellenhorizont verleiht. Seine Brauchbarkeit zur Verbesserung von Kalkböden und zur Darstellung von Cement ist in dem württembergischen Schwarzwalde schon lange bekannt, auch wird er mit den kalkärmeren Mergeln des Wellendolomits zusammen seit langer Zeit zur Ziegel-Fabrikation benutzt, wie bei Freudenstadt, Bulach u. s. w., doch sind die Ziegel nur von mittlerer Qualität. Die Resultate der Analysen[1]) von württembergischem und fränkischem Material stimmen wieder völlig überein. Minimale Spuren von Kupfer wurden wiederholt beobachtet, aber keine weiteren Schwermetalle ausser Eisen und wenig Mangan. Kleine Mengen von kohlensaurem Kalke und kohlensaurer Bittererde fehlen nie.

Gegen die tiefrothe Farbe des Röths bildet die schwarzgraue des unverwitterten und die gelbbraune des verwitterten Wellendolomits, welcher ihm unmittelbar aufgelagert ist, einen starken Gegensatz. Für den vorliegenden Zweck erscheint es überflüssig, auf die ganze Schichtenfolge des Wellendolomits und seine Beziehungen zu den weiter südlich und nördlich auftretenden Fortsetzungen einzugehen; das bleibt einer anderen Arbeit vorbehalten. Nur soviel möge bemerkt werden, dass seine tiefsten Bänke südlich bis in die Gegend von Nieder-Eschach und Horgen bei Rottweil, nördlich bis in jene von Ettlingen (Jttersbach) durch den gleichen Gehalt an Kupfer und anderen Schwermetallen ausgezeichnet sind. Auch im Rheinthale bei Hubbad unweit Achern finden sich noch die kupferhaltigen Bänke, wenn auch nicht über Tag.[2]) Diese Ablagerungen erscheinen jetzt vorzugsweise auf der rechten

1) s. B. C. Gmelin, Naturwiss. Abh. Tübingen 1826 S. 173. Hilger a. a. O. S. 141.

2) Sandberger, Geol. Beschreib. der Gegend von Baden S. 17. — Die Verbreitung des Gesteins ist auf den sorgfältig ausgeführten Blättern der geogn. Specialkarten von Württemberg und Baden leicht zu verfolgen.

Seite des Nagoldthales mächiger entwickelt. Kleine abgerissene Ablagerungen auf der linken, wie bei Neu-Bulach, beweisen, dass das ganze Plateau von Freudenstadt an nördlich bis gegen Pforzheim von ihnen überdeckt war, aber sehr starke Abschwemmungen erfahren hat. Der Kupfergehalt dieser Bänke ist schon lange bekannt[1], eine genauere chemische Untersuchung derselben hat niemals stattgefunden, wurde aber für die vorliegende Arbeit nothwendig. Das Material habe ich bereits im Jahre 1886 an Ort und Stelle gesammelt und 1891 zweckentsprechend ergänzt. Hierbei ergab sich, dass nur die in dem oben angegebenen Profile angeführten versteinerungsleeren unteren Dolomit-Bänke Kupfer, Arsen, Antimon, Wismuth, Kobalt und Silber enthalten, wie sich bei Verwendung von 20—22 grm. auf das Deutlichste herausstellt, und es ist nun an der Zeit, diese eingehender zu besprechen.

Die unterste Dolomitbank ist fast nur in Eisenbahn-Einschnitten im unverwitterten Zustande zu treffen, sie stellt dann einen schwarzgrauen, fast dichten Dolomit dar, welcher seine Färbung einem reichlichen Gehalte an Bitumen verdankt. Gewöhnlich ist er aber in Folge der Verwitterung bereits in ein gelbgraues, äusserst feinkörniges Gestein umgewandelt, wie z. B. in den Profilen bei Aach, Wittlensweiler, Nagold, an der Signalhöhe zwischen Neu- und Alt-Bulach u. s. w.

Was zunächst die chemische Zusammensetzung[2] betrifft, so liegen ältere Analysen I—IV von Wellendolomit vor, dessen Niveau nicht bestimmt wurde, Analyse V bezieht sich aber auf die zweitunterste Bank von Grünthal bei Freudenstadt.

1) v. Alberti Monographie 1834 S. 37, 39, 41.

2) Der Schlämmrückstand des Wellendolomits enthält nur sehr wenig mikroskopischen Zirkon und Turmalin, sowie Magnetkies und seine Bestandtheile haben daher keinen Einfluss auf das Resultat der Analysen.

		Kohlens. Kalk	Kohlens. Bittererde	Kohlens. Eisenoxydul	Kohlens. Kupferoxyd	Kohlens Manganoxydul	Unlösl. Rückstand	Wasser
I.	Dornstetten [1])	50,82	40,62	0,87	—	0,53	5,66	1,50
II.	Nagold [1])	46,53	38,17	1,46	—	0,25	13,57	—
III.	Ittersbach [2])	54,48	31,48	2,17	—	nicht best.	2,83	—
				Eisenoxydhydrat			ausserdem Thonerde 6,71, Kali 0,26, Natron 1,83.	
IV.	Durlach [3])	27,66	15,00	13,07	—	nicht best.	44,82	—
				Kohlens. Eisenoxydul				
V.	Grünthal [4])	47,25	33,18	2,04	0,046	—	14,78 (Thonerde, Kieselsäure u. Schwerspath-Blättchen [5])	

Der kohlensaure Kalk verhält sich zu der kohlensauren Bittererde annähernd wie

I. 1:1, II. 1:1, III. 3:2, IV. 3:2, V. 3:2.

Ausser den angeführten Bestandtheilen des Wellendolomits fand sich in der untersten Bank von Aach noch reichlich Kupfer, Arsen, Antimon, Wismuth, Kobalt und schon auf nassem Wege Silber, welches für diese Varietät in der k. k. Probir-Anstalt zu Přibram zu 0,0015 proc. bestimmt wurde. Es ist nach Analogie des sogleich zu besprechenden Verhaltens der zweituntersten Schicht des Wellendolomits wohl kaum zweifelhaft, dass die Schwermetalle auch in der untersten als Fahlerz enthalten waren, in den an-

1) C. Gmelin, Naturw. Abh. 1. Bd. 1. Hft. 1826.

2) Nessler bei Platz, Geol. Beschr. d. Gegend v. Ettlingen S. 26.

3) Cnefelius, Verhandl. d. naturwissensch. Vereins zu Karlsruhe I. S. 22.

4) Hilger's gefällige Mittheilung.

5) Der ganz unzersetzte Wellendolomit der zweituntersten Bank vom Glatten enthielt in 100 Theilen 0,135, in 1 kg also 1,35 g Schwerspath; um 1 g des Spaths in Freiheit zu setzen, war also die Auslaugung von 740,74 g Wellendolomit erforderlich.

gewitterten Varietäten war aber kein metallglänzender Körper mehr zu entdecken, vermuthlich ist das Erz hier schon in die später zu besprechenden gelben erdigen Massen umgewandelt. Der geringe Schwefelsäuregehalt des Gesteins würde ebenfalls dafür sprechen, wie spätere Beobachtungen über die Zersetzungs-Producte des Fahlerzes darthun werden. Der Schlämmrückstand des mit Salzsäure behandelten Gesteins bestand überwiegend aus Quarzsplittern. Ausblühungen von Salzen schwerer und edler Metalle wurden an der untersten Bank nicht beobachtet, sondern lediglich sehr dünne, dunkelschwarze Ueberzüge von Wad auf den Kluftflächen, auf welchen nicht selten Gruppen von Kalkspath-Rhomboedern oder solche von wasserhellen Aragonit-Nadeln aufsitzen. Zu Neu-Bulach sind auf Klüftchen auch Aggregate kleiner durch Bitumen schwarzgefärbter Quarzkrystalle vorgekommen. Das kohlensaure Manganoxydul, welches zweifellos dem frischen Dolomit als isomorpher Bestandtheil angehört, in den Analysen der verwitternden Gesteine aber als Oxydhydrat angegeben wird, ist daher zuerst als Hyperoxyd abgeschieden worden, wo auf den Klüften des Gesteins lufthaltige Wasser eingedrungen waren und gleichzeitig wurde auch ein Theil des kohlensauren Kalks gelöst und als reiner Kalkspath, bezw. Aragonit wieder abgesetzt.

Was die zweitunterste Bank des Wellendolomits betrifft, so ist sie nicht fein-, sondern mittelkörnig, im frischen Zustande, wie z. B. in den Eisenbahn-Einschnitten, dann in den Brüchen bei Grünthal und Glatten bei Freudenstadt tief schwarzgrau und so hart, dass sie, abgesehen von dem Gebrauche als „schwarzer“, d. h. hydraulischer Kalk auch als Strassenmaterial benützt werden kann, z. B. auf der Strasse von Freudenstadt nach Dietersweiler. Sehr gewöhnlich enthält sie kleine Bitterspath-Drusen, in welchen Gruppen sehr kleiner Fahlerz-Kryställchen aufsitzen, welche dieselben Elemente enthalten, die oben aus dem untersten Wellendolomit angeführt

wurden. Sobald die Verwitterung unter Zerstörung des Bitumens grössere Fortschritte gemacht hat, geht das Gestein in erbsengelbe bis gelbbraune Massen über und auf den Klüftchen erscheinen dann zunächst wieder schwarze Anflüge von Wad, welche bald mehr bald weniger reichlich mit traubigem oder strahligem Malachit, Kupferlasur[1]) und kleinen Kalkspath-Krystallen (R) bedeckt sind. Ueberaus merkwürdig ist das Verhalten des erst in neuerer Zeit von mir genauer untersuchten, in Salzsäure unlöslichen Rückstands, indem derselbe sich als theilweise aus Blättchen von Schwerspath[2]) bestehend erwiesen hat. Gewiss ist das in Gesteinen häufiger der Fall, als man bisher vermuthen konnte. So verhält sich auch der sog. blaue Dolomit der Lettenkohlen-Gruppe bei Würzburg ganz ebenso.

Das Gestein hatte ich schon 1885[3]) näher charakterisirt und als vollständiges Analogon des Kupferschiefers bezeichnet. Wenn man erwägt, dass sich die sämmtlichen in demselben auftretenden Schwermetalle und das Silber, wenn auch nur in geringer Menge in den Glimmern der krystallinischen Gesteine des nördlichen Schwarzwalds[4]) ebensowohl wiederfinden, wie der Baryt in den Feldspathen derselben, so lässt sich wohl begreifen, dass sie längere Zeit als schwefelsaure und Chlorverbindungen in den Wassern des Trias-Meeres gelöst bleiben und endlich durch organische Substanz ausgefällt werden konnten. Das Rothliegende, welches ja auch nur aus Schutt des Urgebirgs besteht, enthält ja am Rande des Schwarzwaldes nicht selten ebenfalls Kupfererze und in demselben setzt sogar bei Königswart unweit Schwarzenberg im

1) Zuweilen in kleinen, aber deutlichen Krystallen $\infty P \infty . 0P . - P$.

2) Mikroskopischer Schwerspath war bisher in Gesteinen nicht bekannt, da der in Säuren nicht lösliche Rückstand in der Regel nicht weiter untersucht wurde.

3) Unters. über Erzgänge II. S. 244 f.

4) Daselbst I. S. 48, 49, 52. II. S. 273 f., 340 f. u. a. a. O.

oberen Murgthale ein Fahlerz und Kupferwismuthglanz führender Gang auf. Derselbe wurde urkundlich 1598, 1623, 1787 und zuletzt als Johann-Friedrichsgrube 1823—25 bebaut und führte, nach den s. Z. von dem Revierbeamten Eisenlohr zu Freudenstadt gesammelten Stücken zu schliessen, Fahlerz von derselben Zusammensetzung wie das der Freudenstadter und Bulacher Gänge, jedoch mit etwas höherem Antimon- und geringerem Kobaltgehalte. Der mit vorgekommene Wismuthkupferglanz wird in vielen Schriften irrig als „Nadelerz" bezeichnet, er enthält aber keine Spur Blei, sondern ausser Kupfer und Wismuth nur sehr wenig Antimon.

Innerhalb des ursprünglich überall von Wellendolomit bedeckten Buntsandstein-Gebietes und nur in diesem treten nun Schwerspath-Gänge da auf, wo sich Verwerfungs-Spalten gebildet haben. Sie zeigen sich, wo ersterer nicht abgeschwemmt worden ist, noch in dem Wellendolomit selbst, wie bei Wittlensweiler, Aach und Glatten, gewöhnlich aber in dem durch Erosion des letzteren und des Röths entblössten Buntsandstein. Wie tief sie hinabreichen, ist nicht sicher zu ermitteln.

Da die Verhältnisse nicht überall die gleichen sind, so erscheint es nützlich, die Gang-Gruppen um Freudenstadt und Neu-Bulach zunächst getrennt zu behandeln, obwohl ihre Ausfüllung nicht verschieden ist.

I. Die Erzgänge der Gegend von Freudenstadt.

Zu dieser Gruppe gehören die in unmittelbarer Nähe von Freudenstadt in Friedrichsthal, an der Christophsaue und bei Wittlensweiler, Aach, Hallwangen und Glatten auftretenden Gänge, welche seiner Zeit von dem verstorbenen Hüttenverwalter Eisenlohr aufgenommen wurden und auch auf dem Blatte Freudenstadt der geognostischen Specialkarte

von Württemberg (1866) eingetragen sind. Es sind deren im Ganzen 17.[1]) Die Grubenbauten, namentlich die Schächte sind meistens nicht mehr zugänglich, doch ist das Ausgehende von manchen Gängen über Tag noch deutlich sichtbar und zeigt sich meist 1 m und darüber mächtig, wie der östlichste Gang, welcher noch heute in dem Walddistricte Steinbruch bei Christophsthal anstehend zu beobachten und über Christophsaue und die Aufschlüsse am Rödter Weg fast bis Lossburg zu verfolgen ist. Ebenso verhalten sich die Gänge bei Hallwangen, dann jene bei Aach und Glatten und einer bei Wittlensweiler. Das Streichen schwankt von h. 9, welches stark vorherrscht, bis zu h. 11. Der grosse städtische Steinbruch an der Christophsaue bei Freudenstadt ist für die Beobachtung der Gänge und ihres Verhaltens zum Nebengesteine der lehrreichste Punct, obwohl kein Wellendolomit in demselben ansteht, sondern erst etwas tiefer an der bis Lossburg fortsetzenden Verwerfungsspalte auftritt, welcher die südliche Fortsetzung des östlichen Ganges folgt. In dem nördlichen Theile des grossen Steinbruchs wurde gemeinsam mit Herrn Dr. Beck das folgende Profil der hier ziemlich ungestörten Schichtenfolge des Buntsandsteins in aufsteigender Reihe aufgenommen:

1. Mittelkörniger Sandstein, roth und weiss gestreift, nicht selten voll von rothen Thongallen	13,0 m
2. Roth und weiss gestreifter feinkörniger, in Platten abgesonderter Sandstein	0,5 „
3. Röthlicher mittelkörniger Sandstein . .	1,0 „
4. Plattenförmiger Sandstein mit Zwischenlagen von rothem Schieferthon	0,3 „
5. Untere Gerölle führende Bank mit zerstreuten Geröllen	1,5 „

1) Quenstedt, Geol. Ausflüge S. 133 gibt, wohl aus Irrthum 30 an.

6.	Plattenförmiger roth und weiss gestreifter Sandstein	0,2 m
7.	Harter gelber Sandstein ohne Gerölle . . .	3,5 „
8.	Kaolinführender Sandstein[1]) mit Geröllen, zu oberst förmliche Conglomerat-Bank	4,0 „
9.	Plattenförmiger Sandstein, oben mit Wellenfurchen	1,7 „
		25,7 m

Etwas über der Mitte des Bruchs nach Süden zu tritt die erste schmale Gangkluft mit 70° Einfallen nach SSW auf, dann folgt eine zweite breitere mit gleichem Einfallen, die dritte unter gleichem Winkel, aber nach N fallende, ist schon 1 m breit, aber erst von der vierten, gleichfalls 1 m breiten, mit Schwerspath und Erzen (Fahlerz und wenig Kupferkies, sehr selten auch Kupferwismuthglanz (Emplektit)) ausgefüllten an senken sich die Schichten stark nach Süden und liegt z. B. die obere Conglomerat-Bank nur wenig über der oberen Sohle des Steinbruchs. Der fünfte Gang von gleicher Mächtigkeit und gleicher Ausfüllung ist jetzt leider durch das in den Bruch hineingebaute Hotel Waldeck fast ganz verdeckt.

Was die Struktur der Gänge betrifft, so sind Salbänder niemals und Absonderung in Lagen nur selten erkennbar. Drusen sind nicht häufig mit Schwerspath oder Eisenspath-Krystallen, vielmehr gewöhnlich mit Quarz ausgekleidet, auf welchen dann Ueberzüge von Brauneisenstein und Kupfermanganerz folgen. Die Klüfte in der Nähe von reichlicher eingewachsenem Fahlerz erscheinen gewöhnlich mit Zersetzungsproducten desselben, namentlich Mixit, seltener auch Würfelerz und Olivenit bedeckt. Das Nebengestein zwischen den Gängen ist stets vollkommen verkieselt und zwar durch

1) Enthält ein wenig kohlensauren Baryt, wie auch andere Buntsandsteine. Unters. über Erzgänge II. S. 355 f.

infiltrirte Quarzsubstanz [1]), welche auch die kleinsten Zwischenräume ausfüllt, wie nachgegossene Melasse jene des Zuckers in Zuckerhüten, und daher seine Bestandtheile zu einem scheinbar völlig homogenen Ganzen verbindet. Natürlich ist dieses Gestein als Strassen- und Pflaster-Material sehr geschätzt. Auch die kleineren eckigen Gesteinsbrocken, welche im Gangraum selbst von Schwerspath oder Quarz umschlossen häufig zu treffen sind, haben diese Umwandlung erfahren. In der Teufe, wie auch meist in der nordwestlichen Fortsetzung, z. B. im Walddistrikte Steinbruch ist Quarz dem Schwerspath so häufig und in Masse beigemengt, dass dieser für die Verwendung bei der Bleiweiss-Fabrikation untauglich wird und wohl kaum mehr eine andere als die zum Bestreuen der Fusswege finden wird. In der Teufe sollen die Erze in Quarz eingebrochen sein, ich kann darüber nicht urtheilen, will aber nicht unterlassen zu bemerken, dass mir der verstorbene Hüttenverwalter Eisenlohr Erzproben von der letzten Befahrung des tiefen Christophsstollens[2]) mitgetheilt hat, welche aus nicht reichlich in Quarz eingewachsenem Fahlerz und Kupferwismuthglanz[3]) bestanden.

Brauneisenstein trat nur in einer Grube am Rödter Wege in solchen Mengen auf, dass er benutzt werden konnte. Das daraus producirte Eisen wird aber wohl von geringer Qualität gewesen sein, da das Erz viel Mangan, Kupfer und Arsen[4]) enthält.

Ich gebe nun zunächst Beispiele für die Reihenfolge der Mineralien auf den Gängen der nächsten Umgebung von Freudenstadt.[5])

---

1) Amorphe Kieselsäure war nirgends mehr zu entdecken.

2) Der 300 Lachter lange Stollen ist ganz im Tigersandstein, aber nicht im Grundgebirge aufgefahren.

3) Analyse s. unten.

4) In Drusen fand sich nicht selten Würfelerz und Kupfermanganerz.

5) Da die Mineralien der Gänge der Gegend von Freudenstadt und jene von Neu-Bulach fast völlig übereinstimmen, so werden sie zusammen erst in einem späteren Abschnitte dieser Abhandlung eingehender geschildert werden.

I. 1. Verkieselter Sandstein. 2. Fahlerz $\left(+\frac{O}{2}\cdot\infty O\right)$, z. Th. von grossblätterigem Schwerspath I. umhüllt.

II. 1. Wie bei I. 2. derbes Fahlerz, hier und da mit Kupferkies verwachsen.

III. 1. Wie bei I u. II. 2. Schwerspath mit eingewachsenem Fahlerz. 3. Eisenspath in Rhomboedern, stellenweise schon stark verwittert und in dichten Brauneisenstein umgewandelt.

IV. 1. Schwerspath, zahlreiche Putzen von Fahlerz in verschiedenen Zersetzungsstufen und von erdigem Rotheisenstein umschliessend. 2. Mixit in zahlreichen strahligen Büscheln.

V. 1. Schwerspath mit stark zersetztem, in gelbliche pulverige Massen umgewandeltem Fahlerz. 2. Quarz II $(\infty R\cdot+R)$. 3. Würfelerz in sehr klein. Krystallen $\left(\infty O\infty\cdot+\frac{O}{2}\right)$.

VI. 1. Grobblätteriger Schwerspath, oben mit Krystallen bedeckt, welche mit Quarzkryställchen überzogen und z. Th. schon Pseudomorphosen sind. In Drusen: 2. kugeliger Erinit und 3. krystallisirter Olivenit.

VII. 1. Brauneisenstein. 2. in Drusen: Würfelerz $\left(\infty O\infty\cdot\frac{O}{2}\right)$. 3. Schaliges Kupfermanganerz (Rödter Weg).

VIII. 1. Schwerspath mit 2. Brauneisenstein-Schnüren, welche meist in Hydrohämatit umgewandelt sind (Christophsthal).

IX. 1. Verkieselter Sandstein. 2. Quarz II $(\infty R\cdot+R)$. 3. Schaliger Brauneisenstein. 4. Schaliges Kupfermanganerz.

X. 1. Wie bei IX. 2. Quarz II $(\infty R\cdot+R)$. 3. Schaliger Brauneisenstein. 4. Kupfermanganerz in kleintraubigen Gruppen. 5. Schwerspath II, weisse Tafeln.

XI. 1. Schwerspath I. 2. Kupfermanganerz. 3. Kleintraubiger Chalcedon (Friedrichsthal).

Der Bergbau bei Freudenstadt ist sehr alt und würde wohl die an zahllosen Stellen unternommenen Versuche reich-

licher gelohnt haben, wenn das 33,89 proc. Kupfer und 1,37 proc. Silber enthaltende Fahlerz öfter in grösseren Mitteln eingebrochen wäre. Nach den vorliegenden Nachrichten sind aber nur selten grössere Mengen von Silber gewonnen worden. Daraus wurden sogenannte Christophs-Thaler[1]) geprägt, wie in den Jahren 1573, 1603, 1659[2]), den Blüthezeiten des Bergbaus, die später nicht mehr wiederkehrten. Die Silberhütte im Forbachthale existirt längst nicht mehr, der Staat hat jetzt auch die früher an Stelle derselben in grösserem Massstabe betriebene Eisenwaaren-Production (Pfannenschlägerei u. s. w.) stark reducirt. Die z. Z. allein noch fortbestehende Sensen-Fabrication steht aber noch in vollem und lohnendem Betrieb. In neuerer Zeit sind die Freudenstadter Gruben zwar wieder gemuthet, aber nicht in Betrieb gesetzt worden.

In östlicher Richtung folgt nun eine Anzahl von Gängen bei dem Dorfe Wittlensweiler. Sie sind nur noch an geringen Ueberresten der Halden von Schächten zu erkennen und scheinen niemals edle Erze, sondern nur Schwerspath und wenig Brauneisenstein geliefert zu haben. Die wahrscheinliche Fortsetzung eines derselben tritt in dem Wellendolomit bei Glatten zu Tage, wenn dieser Gang nicht die etwas verschobene des von Grünthal über den „Silberberg" bei Aach in dem gleichen Gesteine fortstreichenden, reichlich 1 m mächtigen Ganges ist. Letzterer setzt, soviel ich sehen konnte, ebensowenig als der erste in die versteinerungsführenden Bänke des Dolomits herauf. An beiden Orten findet sich nur noch Schwerspath mit manganhaltigem Brauneisenstein bzw. sattelförmigen Pseudomorphosen desselben nach Eisenspath und nur Spuren von Malachit.

Der oberhalb des Dorfes Hallwangen bei Dornstetten

---

1) Binder, Württemb. Münz- u. Medaillenkunde 1846 S. 82, 144.

2) Das Ausbringen pr. Centner Erz betrug damals 26 Pfund Kupfer und 8 Loth Silber.

auftretende Gang, welcher in quarzreichem Schwerspath und Quarz eingesprengtes Fahlerz führt, ist schon an der Mündung des alten oberen, jetzt anderweitig benutzten Stollens der Grube „Himmlisches Heer“ noch gut erkennbar. Er setzt, in zwei Trümer getheilt, welche sich im Inneren des Stollens zu einem 1 m mächtigen Gangkörper vereinigen, in verkieseltem Buntsandstein auf. Hier hat, wie die bis zum Bache herabgehenden mächtigen Schachthalden beweisen, ein ziemlich bedeutender Bergbau stattgefunden, die Erze enthielten nach einer 1723 ausgeführten Probe im Centner 15 Pfund Kupfer und 10 Loth Silber. Auch diese Grube wurde wegen zu geringer Ergiebigkeit[1]) schon im vorigen Jahrhundert verlassen. Auf den Halden findet man noch einzelne Gangstückchen mit frischem und zersetztem Fahlerz, Mixit, Wad, Malachit, Brauneisenstein und Kupfermanganerz von ganz gleicher Beschaffenheit wie zu Christophsaue. Der Wellendolomit steht in ganz geringer Entfernung von dem Gange, aber nicht unmittelbar neben ihm an, in den gleichfalls ganz nahe liegenden Hauptmuschelkalk setzt die Spalte nicht herauf und auch in der nahe gelegenen grossartigen Verwerfungsspalte bei Schopfloch hat sich meines Wissens weder Schwerspath noch Erz gezeigt, sie ist offenbar weit jünger als unsere Gangspalten.

II. Die Gänge von Neu-Bulach unweit Calw.

Das vortrefflich ausgeführte Blatt Calw der geognostischen Specialkarte von Württemberg bringt die Lage derselben im Buntsandstein zwischen zwei ehemals zweifellos zusammenhängenden Schollen von Wellendolomit sehr klar zur Anschauung, während die Schilderung der Mineral-Vorkommen im Texte viel zu wünschen übrig lässt. Ich habe diese schon

1) „Weil es in der Teufe schlecht aussahe.“

oft besprochene Gegend im Sommer 1891 wieder von Teinach aus besucht, aber auf den Halden der alten Gruben nichts Neues gefunden. Soviel bis jetzt bekannt, streicht der Hauptgang h. 8¾ und spaltet sich in SO in zwei Trümer. Sein unmittelbares Nebengestein ist, wie aus dem grossartigen, reichlich 1 Stunde weit von Seitzenthal bei Neu-Bulach bis Liebelsberg reichenden Haldensturz hervorgeht, glimmerreicher oberer Buntsandstein, dessen plattenförmig abgesonderte Bänke ganz in der Nähe in einem kleinen Steinbruche unweit der Signalhöhe an der Strasse von Neu- nach Alt-Bulach aufgeschlossen sind und östlich, d. h. unter den jene Höhe bildenden Röth und Wellendolomit einfallen. Der Sandstein hat am Gange ganz dieselbe Verkieselung erfahren, wie der neben den Freudenstadter Gängen anstehende und leistet daher als Strassenmaterial ebenso gute Dienste wie jener.

Ueber die Mächtigkeit des Ganges liegen actenmässige Nachrichten nicht vor, doch muss sie bedeutend gewesen sein. Bemerkenswerth ist für die Art der Ausfüllung, dass im südöstlichen Theile Schwerspath, im nordwestlichen dagegen Quarz vorgeherrscht hat. Die Erze sind dieselben, wie zu Freudenstadt, unter den Zersetzungsproducten aber sind Kupferlasur und Malachit dort recht selten, hier äusserst häufig. Die Paragenesis ergiebt sich aus folgenden Beispielen:

I. 1. Verkieselter Sandstein. 2. Fahlerz. 3. Quarz II ($\infty R \cdot + R$). 4. Hohle Pseudomorphosen von Arseniosiderit (R) nach Eisenspath. 5. Würfelerz ($\infty O \infty \cdot \frac{O}{2}$). 6. Kupferlasur in strahligen Gruppen. 7. Malachit in kleintraubigen Aggregaten.

II. 1. Derber Quarz mit vielen eingewachsenen z. T. schon zersetztem Fahlerz. 2. Quarz II ($\infty R \cdot + R$). 3. Kupferlasur in schönen Krystallen ($\infty P \infty \cdot \infty P \cdot 0P \cdot \frac{1}{3}P \infty$). 4. Mixit in kleinen strahligen Büscheln. 5. Schwerspath II. Farblose Gruppen ($\infty \acute{P} \infty \cdot \infty \acute{P} 2 \cdot \bar{P} \infty$).

III. 1. Verkieselter plattenförmiger Sandstein, reich an Glimmerblättchen. 2. Fahlerz. 3. Quarz II ($\infty R \cdot \pm R$). 4. Kupferlasur in strahligen Gruppen. 4. Schwerspath II, wie bei II.

IV. 1. Wie bei III. 2. Weisser blätteriger Schwerspath I, stellenweise zersetztes Fahlerz umhüllend. 3. Quarz II ($\infty R \cdot \pm R$). 4. Kupferlasur in kleinen Kugeln.

V. 1. Sandstein wie bei III und IV. 2. Fahlerz, nach oben zersetzt. 3. Kupferlasur, krystallisirt wie bei II., nach oben mit Erhaltung der Form in Malachit umgewandelt.

VI. 1. Wie bei III—V. 2. Quarz II. 3. Arseniosiderit in kleintraubigen Ueberzügen. 4. Malachit, feinstrahlig in kleinkugeligen Krusten.

VII. 1. Wie oben. 2. Quarz II. 3. Brauneisenstein. 4. Kupfermanganerz.

Der Bergbau ist uralt und wird schon 1322 in Urkunden erwähnt. Er wurde meist mit geringer Ausbeute bis in das dritte Jahrzehnt dieses Jahrhunderts betrieben. Auch bestand eine Zeitlang eine Silberhütte, welche im Teinach-Thale an dem Platze gelegen war, welchen jetzt die Gebäude des Badhotels einnehmen. Der Hüttenprocess war jedenfalls sehr mangelhaft, da für Erz-Proben aus dem Jahre 1596 nur 8 Pfund Kupfer, zugleich aber bis 4 Loth Silber im Centner angegeben werden, während die Analyse des reinen Fahlerzes in 100 Theilen 41,28 Kupfer und nur Spuren von Silber aufweist. Das liesse sich nur erklären, wenn einmal ausser Fahlerz local ächte Silbererze eingebrochen wären. Allerdings schwankt wohl auch sonst der Silbergehalt von Fahlerzen auf demselben Gange, aber so kupferarme, wie sie die Erzprobe anzunehmen veranlassen würde, sind wohl kaum bekannt.

Von den ehemaligen Grubengebäuden waren zwei Stollen die bedeutendsten. Der erste, Ziegelbach-Stollen genannt, war von Seitzenthal bis zum Himmelfahrtsschachte am

Städtchen von SO nach NW herangetrieben und 500 Lachter lang. Zusammengebrochene Reste desselben sind noch jetzt über Tag deutlich sichtbar. Der zweite, angeblich ebenfalls 500 Lachter lang, erstreckte sich von dem erwähnten Schachte aus unter dem Städtchen durch gegen Liebelsberg. Kleine Versuchsbaue bei Schmieh, Martinsmoos und Sommenhardt wurden bald aufgegeben. Im Jahre 1883 wurden die zuletzt noch einmal 1820 vom Staate betriebenen und dann ins Freie gefallenen Gruben von der badischen Anilin- und Soda-Fabrik in Ludwigshafen gemuthet, aber nicht in Betrieb gesetzt. Die mit dünnen Anflügen von Kupferlasur, Malachit und Kupfermanganerz bedeckten Gangstückchen, welche noch jetzt in Menge auf den Halden liegen, müssten zunächst aus sehr grossen Massen des metallleeren Nebengesteins ausgesucht werden, was sehr kostspielig sein würde. Ob sie auch bei sorgfältigster Verarbeitung mittelst des Cement-Verfahrens oder galvanischer Ausfällung einen Gewinn abwerfen würden, ist mir sehr zweifelhaft.

III. Die Mineralien der Gänge.

1. Fahlerz (Wismuth-Fahlerz)[1], zweifellos das technisch werthvollste und auch wissenschaftlich interessanteste Mineral der Gänge, kommt meist in Körnern bis zu Wallnuss-Grösse vor, muss aber nach Stücken in alten Sammlungen zu schliessen, zuweilen auch in kopfgrossen Nestern eingebrochen sein, welche meist an quarzige Gangart gebunden waren. Dasselbe erscheint, wenn krystallisirt, stets in der einfachen Form $\frac{O}{2} \cdot \infty O$, selten noch mit $\frac{2O2}{2}$ combinirt, besitzt starken, aber etwas zum Fettglanz geneigten Metall-

[1] Sandberger, Jahrb. f. Mineral. 1864 S. 223. 1865 S. 584 ff. Th. Petersen, das. 1870 S. 464 f.

glanz, dunkel stahlgraue Farbe und graulichschwarzen Strich. Das specifische Gewicht betrug bei der Varietät von Freudenstadt 4,90, bei jener von Neu-Bulach 4,908. Ein höheres specifisches Gewicht zeigen nur noch hoch silber- und quecksilberhaltige Fahlerze. Das Löthrohrverhalten ist bei beiden nahezu das gleiche. Auf Kohle erhält man im Oxydations-Feuer Dämpfe von arseniger und antimoniger Säure, sowie einen strohgelben Beschlag von Wismuthoxyd, welcher sich mit Jodkalium feuerroth färbt. Setzt man Soda zu und arbeitet mit der Reductions-Flamme, so kann man durch Einschmelzen der magnetischen Schlacke, welche das silberhaltige Kupferkorn umgibt, in eine Boraxperle das Kobalt leicht nachweisen. Die qualitative Analyse auf nassem Wege führt ausserdem zur Entdeckung kleiner Mengen von Nickel, Zink und Blei.

Die quantitativen Analysen ergaben:

	Freudenstadt (Hilger.)	Neu-Bulach (R. Senfter.)
Schwefel	26,40	24,85
Arsen	6,98	13,53
Antimon	14,72	4,28
Wismuth	4,55	6,33
Silber	1,37	Spur
Kupfer	33,83	41,43
Eisen	6,40	3,74
Kobalt (nebst Spur Nickel)	4,21	Spur
Zink	0,00	3,82
Blei	0,00	1,52
	98,46	99,50

Bekanntlich gehören Analysen von Fahlerzen zu den schwierigsten, es darf daher nicht verwundern, dass beide Analysen, wie so viele andere, einen etwas geringeren Schwefelgehalt ergeben, als die ideale Formel der Fahlerze $4\,RS \cdot R^2 S^3$ verlangt. Höchst merkwürdig ist, dass die Erze von Freudenstadt und Neu-Bulach trotz aller sonstigen Uebereinstimmung doch auch wesentliche Verschiedenheiten in dem

Gehalte an Antimon und Arsen, Silber und Kobalt, Blei und Zink zeigen, doch ist das in noch höherem Maasse bei anderen Kobalt-Wismuth-Fahlerzen der Fall, z. B. bei jenen von Riechelsdorf in Hessen, Kaulsdorf unweit Saalfeld nach Hilger[1]) und Sommerkahl bei Aschaffenburg nach Petersen.[2]) Selten tritt auch Wismuth allein, d. h. ohne Begleitung von Kobalt in Fahlerzen auf, z. B. in jenem von der Grube Eduard bei Langhecke in Nassau, in welchem, wie in den meisten nassauischen Fahlerzen Antimon vorherrscht. Eine höchst merkwürdige Analogie mit diesen Fahlerzen zeigt in der Gruppe der Sulfosalze von der Formel $3\,RS \cdot R^2S^3$ der Annivit, von welchem Scharizer's Falkenhaynit nur eine antimonreiche Varietät bildet, wie ich vor Kurzem[3]) gezeigt habe.

Aus Erzen, welche eine so grosse Anzahl von Elementen enthalten, gehen begreiflicher Weise bei der Oxydation mannigfaltige Neubildungen hervor, namentlich schwefelsaure, arsensaure und kohlensaure Verbindungen, welche nicht selten in ausgezeichneter Weise krystallisirt auftreten. Schon früher habe ich diesen Zersetzungsprocess nach dem damals vorliegenden Materiale zu schildern versucht, komme aber hier nochmals auf ihn zurück, weil sich inzwischen noch mancherlei Neues gefunden hat, von dem ich nur gelegentlich Erwähnung thun konnte.

Der erste Angriff der Oxydation gibt sich durch blaue Anlauffarben zu erkennen, welche von der Bildung von Kupferindig (CuS) herrühren. Gleichzeitig treten Haarrisse in grosser Menge auf, aus welchen ein Theil des Eisens und Kupfers in Form schwefelsaurer Salze durch Wasser ausgezogen werden kann. Diese scheinen längere Zeit im Gang-

---

1) Jahrb. f. Min. 1865 S. 591 ff.

2) Das. 1881, I. S. 262.

3) Jahrb. f. Min. 1891 I. S. 373.

raume in Lösung zu bleiben und zuletzt durch kohlensauren Kalk in Kupferlasur und Malachit umgesetzt zu werden, welche zu den jüngsten Absätzen auf demselben gehören. Nur einmal traf ich eine förmliche Pseudomorphose von Kupferindig nach Fahlerz[1]), in welcher daher die Substanz auf der ersten Zersetzungsstufe stehen geblieben war. In der Regel folgt alsbald die Bildung schmutzig olivengrüner poröser Massen, aus arsensaurem, vielleicht auch theilweise antimonsaurem Kupferoxyd, arsensaurem Kupfer-Wismuthoxyd (Mixit), basisch schwefelsaurem und arsensaurem Eisenoxyd und Kobaltoxydul, sowie schwefelsaurem Antimonoxyd und basisch schwefelsaurem Wismuthoxyd bestehend. Wie bekannt zersetzt sich die Antimon-Verbindung leicht in Antimonoxyd und freie Säure und auch die des Wismuths erfährt, wenn auch weniger rasch, die gleiche Umwandlung. Die arsensauren Kupferverbindungen scheiden sich aus der zersetzten Masse nur selten in kleinen Mengen als Erinit und Olivenit aus, dagegen häufig mit Wismuth zusammen als Mixit, das Eisen als basisch arsensaures Oxyd in Form von Würfelerz. Je mehr von diesen Körpern aus dem Gemenge ausgetreten sind, desto mehr geht die Farbe des erdigen Restes in schmutzig gelbgrau und zuletzt in strohgelb über, womit eine ständige Anreicherung an Antimon und Wismuth verbunden ist, so dass das Gemenge schon bei grünlichgrauer Färbung neben beträchtlichen Mengen von Antimonocker und Stiblith[2]) einen Wismuth-Gehalt von 5,5 proc. zeigt, der Gehalt an Schwefelsäure ist aber auf 0,55 herabgesunken. Wiederholte Versuche, die einzelnen Bestandtheile des erdigen Gemenges durch Schlämmen zu trennen, blieben resultatlos, auch unter dem Mikroskope bildet

1) Jahrb. f. Min. 1866 S. 201.

2) Beide Körper müssen deshalb in dem Gemenge vorhanden sein, weil sich ein Theil der antimonhaltigen Substanz sofort und leicht in Salzsäure löst, der Rest aber erst nach längerem Kochen aufgenommen wird.

r Zersetzungs-Rest nur eine einfarbige Masse. Die verhiedenen Mineralien, welche direkt aus dem Fahlerze her-rgehen, werden später einzeln besprochen werden.

Ein übersichtliches Bild des Zersetzungs-Processes gewährt e folgende 1865 entworfene Tabelle. Das Vorkommen des lixits ist erst in neuerer Zeit constatirt worden.

Zersetzungs-Producte	Dem Fahlerz entnommene Bestandtheile								Den Atmosphärilien entnommene Bestandtheile			% der Gesammtmenge der Zersetzungs-Producte
	S	*Cu*	*Fe*	*Ag*	*Co*	*As*	*Bi*	*Sb*	*O*	H^2O	CO^2	
Kobaltblüthe . . .	—	—	—	—	4,21	3,52	—	—	2,99	3,37	—	9,88
Würfelerz	—	—	1,73	—	—	1,73	—	—	1,66	1,04	—	4,32
Olivenit	—	2,92	—	—	—	1,73	—	—	1,66	0,21	—	4,57
Misy	3,11	—	4,67	—	—	—	—	—	3,55	2,00	—	9,34
Malachit	15,59	30,91	—	—	—	—	—	—	7,79	4,38	10,72	37,71
Antimons. Antimonoxyd	—	—	—	—	—	—	—	14,72	7,83	—	—	15,81
Schwefels. Wismuthox.	0,35	—	—	—	—	—	4,55	—	1,05	—	—	4,18
Gediegen Silber . .	—	—	—	1,37	—	—	—	—	—	—	—	0,96
Schwefelsäure[1]) . .	7,16	—	—	—	—	—	—	—	11,74	—	—	13,24
Summa	26,21	33,83	6,40	1,37	4,21	6,98	4,55	14,72	—	—	—	100,00

1) Bei der Zersetzung der Antimon- und Wismuthsalze durch Wasser frei geworden.

2. Kupferwismuthglanz (Emplektit). Das Vorkommen dieses Minerals in dünnen stark gefurchten Säulchen auf dem östlichsten Gange bei Freudenstadt hatte ich bereits 1864 bemerkt, aber nicht genügendes Material für quantitative Analysen gewinnen können. Erst später erhielt ich von Herrn Hüttenverwalter Eisenlohr ein Stückchen Quarz mit derbem Erze aus dem Christophsstollen, welches dazu ausreichte. Herr Dr. Petersen[1]) fand darin

Schwefel	19,06
Wismuth	59,09
Kupfer	20,32
Eisen	0,40
Antimon und Arsen .	Spur
	98,87

Die Uebereinstimmung mit der Formel $Cu^2 S \cdot Bi^2 S^3$ ist nahezu vollständig. Das Erz verwittert und zeigt dann zunächst einen grünen aus Kupfer- und Wismuth-Verbindungen bestehenden Ueberzug. Auch in Neu-Bulach kommt dieses Erz vor, aber bisher nur in mit Erhaltung der Form bereits völlig umgewandelten Nadeln, welche ganz aus Malachit bestehen und mit Arseniosiderit überzogen sind. Die Menge dieses Erzes ist zu gering, um eine technische Verwerthung zu gestatten.

3. Kupferkies. Die Seltenheit dieses sonst häufigen Erzes auf den hier besprochenen Erzgängen ist für dieselben bezeichnend. Erbsengrosse Körner finden sich, stets von überwiegendem Fahlerz begleitet, nur an wenigen Freudenstadter und noch seltener an Neu-Bulacher Gangstücken.

4. Eisenspath. Das Mineral ist zwar recht häufig, mir aber in ganz frischem Zustande niemals zu Gesicht gekommen. Sattelförmige, in manganhaltigen Brauneisenstein umgewandelte Rhomboeder bis zu Haselnussgrösse finden sich häufig

1) Jahrb. f. Min. 1869 S. 847.

in den Schwerspath-Gängen von Wittlensweiler, Aach und Glatten, aber auch bei Freudenstadt und Neu-Bulach, oft füllt auch das Mineral, ganz zu braunem Pulver zerfallen, Hohlräume aus, welche noch deutlich rhomboedrische Umgrenzungen zeigen. Nicht gar zu stark zersetzte Parthien enthalten neben Eisen und Manganoxyden noch kohlensauren Kalk in nicht unbeträchtlicher Menge.

5. Schwerspath ist das häufigste Mineral auf den Gängen. Nicht selten ist dasselbe schon etwas angewittert und von matt weisser Farbe oder mit zahllosen Quarzkryställchen erfüllt und dann sehr hart. Indessen gelingt es doch, gelegentlich ganz reine frische Spaltungsstücke zu finden, wie z. B. 1891 auf der südöstlichen Halde von Neu-Bulach. Diese zeigen das specifische Gewicht 4,43 und enthalten ausser Baryt nur sehr wenig Strontian, aber etwas mehr Kalk, welcher die Ursache der Verwitterbarkeit sein mag.[1] Der grossblätterige Schwerspath wird überall zum Bestreuen der Fusswege benutzt und diente früher bei rein weisser Färbung und geringem Quarzgehalte auch als Zusatz zum Bleiweiss in der Heilbronner Fabrik. Selten enthält der ältere Schwerspath Drusen, in welchen dann Krystalle $\infty \breve{P} \infty \cdot \infty \breve{P} 2 \cdot \bar{P} \infty \cdot \breve{P} \infty$ aufgewachsen erscheinen. Absolut chemisch rein, d. h. frei von Kalk und Strontian ist die über den jüngsten Oxydations-Producten der Erze in farblosen Krystallen $\infty \breve{P} \infty \cdot \bar{P} \infty \cdot \breve{P} \infty \cdot \infty \breve{P} 2$ auftretende zweite Generation des Schwerspaths, wie das von mir bereits vor längerer Zeit auch auf anderen Lagerstätten nachgewiesen worden ist.[2])

6. Quarz. Ist eines der gemeinsten Mineralien und erscheint in zwei Generationen, von welchen die ältere meist derb und wie es scheint, hauptsächlich in grösseren Teufen auftritt. Die jüngere verdrängt den älteren Schwerspath und

1) Sandberger, Unters. über Erzgänge I S. 114.
2) Unters. über Erzgänge I S. 115. II S. 313, 396 f.

kommt zuweilen in deutlichen Pseudomorphosen nach aufgewachsenen Krystallen desselben vor. Sie dringt in alle Klüftchen des Schwerspaths ein und erscheint hier ebenso wie in den Drusen stets in Krystallen der Form $\infty R \cdot + R$, die von Senfkorngrösse bis zu mehreren Centimetern vorkommen. In der Regel ist dieser Quarz, der besonders reichlich und schön im nordwestlichen Theile des Neu-Bulacher Ganges auftritt, völlig farblos, nur selten einmal durch Brauneisenstein dunkel gefärbt.[1]) Juxtapositions-Zwillinge kommen nicht selten vor. Die Erze sind älter als der zweite Quarz, die secundären Substanzen aber jünger, da sie erst über ihm auftreten.

7. Chalcedon in milchblauen ebenen oder kleintraubigen Ueberzügen ist bisher nur in geringer Menge über Kupfermanganerz und Schwerspath I im Friedrichsthale beobachtet worden.

---

a. Zersetzungsproducte des Fahlerzes.

8. Erinit. Dieses äusserst seltene Mineral ist von mir erst im letzten Sommer in hoch-spangrünen kleintraubigen Ueberzügen mit schaliger Structur auf Quarz II aufsitzend und z. Th. von Olivenit bedeckt bei Freudenstadt aufgefunden worden. Es gleicht zunächst täuschend gleichgestalteten Aggregaten von Malachit, braust aber natürlich nicht mit Salzsäure und entwickelt auf Kohle reichlich Arsendampf. Mit Haidingers Beschreibung[2]) stimmt die Substanz vollkommen überein. Die von den genauesten Kennern[3]) brittischer Mineralien geäusserte Ansicht, dass der ursprüngliche Fundort nicht in

1) Also selbstverständlich kein Rauchtopas, dessen Färbung bekanntlich durch organische Substanz bedingt ist.

2) Annals of Philosophy 1828. IV. p. 154.

3) Greg and Lettsom Manual of the Mineralogy of Great Britain and Ireland p. 320.

Irland, sondern in Cornwall gelegen sei, ist auch mir durchaus wahrscheinlich. Der Name Erinit passt dann freilich eigentlich nicht mehr.

9. Olivenit. Ist ebenfalls sehr selten in dünnen, fast schwarzgrünen Ueberzügen, welche sich bei entsprechender Vergrösserung als ganz aus Krystallen der bekannten Combination $\infty P \cdot \breve{P}\infty \cdot \infty\bar{P}\infty$ bestehend erweisen. Man kann annehmen, dass er aus Erinit $5\,Cu\,O \cdot As^2\,O^5 + 2\,H^2\,O$ mittelst Abspaltung von 1 Aeq. $Cu\,O \cdot H^2\,O$ entstehe.

10. Mixit. Häufig zu Freudenstadt, Hallwangen und Neu-Bulach, aber nie in grösseren Massen, sondern immer nur in kleinen strahligen Parthien von lichtgrüner Farbe und schönem Seidenglanze. Die Formel

$$(Bi\,As\,O^4 + 6\,\text{aq}) + 2\begin{cases}Cu^3\,As^2\,O^8\\3\,Cu\,H^2\,O^2\end{cases} \quad \text{(Rammelsberg)}$$

zeigt beträchtliche Mengen von basisch arsensaurem Kupferoxyd neben weniger arsensaurem Wismuthoxyd. Das zuerst bekannt gewordene Joachimsthaler-Vorkommen[1]) ist Oxydations-Product von Falkenhaynit, der ja sehr ähnlich wie das Fahlerz zusammengesetzt ist (s. oben), die später von mir[2]) erwähnten von Wittichen und Schneeberg verdanken dagegen vermuthlich kupferhaltigem, mit Wismuth gemengtem Speiskobalt ihren Ursprung und werden von Kobaltblüthe begleitet.

11. Würfelerz. Ist schon lange von den Gängen bekannt, aber nicht gerade häufig. Bei Freudenstadt ist es auf dem östlichsten Gange sowohl an der Christophsaue, als in Drusen des Brauneisensteins am Rödter Weg, hier olivengrün gefärbt, zu Neu-Bulach aber häufig in besonders schönen Gruppen honiggelber Krystalle $\infty O \infty \cdot \frac{O}{2}$ gefunden worden. Gegenwärtig ist es an letzterem Orte jedenfalls äusserst selten, ich

1) Schrauf, Zeitschr. f. Krystallogr. u. Min. IV S. 278 ff.

2) Unters. über Erzgänge II S. 411.

habe kein Stück mehr auf den Halden finden können. Es wird hier unmittelbar von Kupferlasur bedeckt. Das Würfelerz ist an vielen Orten als Zersetzungsproduct arsenhaltiger Fahlerze bekannt, besonders schön und reichlich aus Cornwall und von Langenborn bei Schöllkrippen im Spessart.

12. Kobaltblüthe. Ist früher in erdigen Parthien (sog. Kobaltbeschlag) auf dem östlichsten Gange der Christophsaue vorgekommen, in neuerer Zeit habe ich sie nicht mehr beobachtet. In ausgezeichneter Weise findet sie sich auf dem Fahlerz von Kaulsdorf bei Saalfeld, wie ich bereits früher bemerkt habe.[1])

13. Rotheisenocker. Erdiger hochgefärbter Rotheisenstein tritt zu Freudenstadt nicht selten im Gemenge mit den letzten Zersetzungsproducten des Fahlerzes, d. h. Wismuthoxyd und antimoniger Säure, seltener in selbständigen Nestern und in der Regel neben reichlichen Ausscheidungen von Mixit auf. Würfelerz fehlt dann völlig. Ich vermuthe, dass an solchen Stellen die Arsensäure vollständig zur Bildung des Kupfer-Wismuth-Arseniats verbraucht worden ist und daher keine mehr zur Bildung von Eisen-Arseniat verfügbar war. Auch an anderen Orten kommen diese Ausscheidungen von Eisenoxyd aus zersetzten Fahlerzen öfter vor; die rothen, so leicht auf chemischem Wege bestimmbaren Massen sind, weil auch in Salpetersäure unlöslich, zuweilen für Zinnober gehalten worden.

14. Kupferlasur. Gehört zu den Zierden des Neu-Bulacher Ganges und ist noch jetzt, wenngleich nicht in guten Stücken auf den Halden häufig, bei Freudenstadt aber niemals vorgekommen. Die Kupferlasur tritt bei Neu-Bulach zuweilen in strahlig-blätterigen Kugeln von Wallnussgrösse, meist aber in dicken krystallinischen Ueberzügen auf, aus

1) Jahrb. f. Min. 1865 S. 591.

welchen öfter schön ausgebildete Krystalle $\infty P \infty \cdot \infty P \cdot 0P \cdot {}^1/_3 P \infty$ herausragen.

15. Malachit. Ist bei Freudenstadt und Hallwangen, meist über einer sehr dünnen Lage von Wad zwar nicht selten, aber niemals schön ausgebildet. Bei Neu-Bulach kommen grössere strahlige Aggregate über Kupferlasur vor. Grössere Krystall-Gruppen der letzteren sind sogar mitunter bis zu beträchtlicher Tiefe oder gänzlich in derselben Weise in strahligen Malachit umgewandelt, wie das von Chessy und einigen Orten im Ural schon so lange bekannt und von Blum[1]) und G. Rose sorgfältig beschrieben worden ist. Kupferlasur über Malachit, welche ja anderswo, wenngleich selten, auch gefunden wird, ist mir von Neu-Bulach nicht zu Gesicht gekommen.

Kupferlasur und Malachit sind sicher durch Zersetzung des zuerst aus dem Fahlerze ausgetretenen und als sehr leicht löslich längere Zeit im Gangraume circulirenden Kupfervitriols durch den kohlensauren Kalk des reichlich vorhandenen Eisenspaths gebildet worden, welcher nur in seltenen, später zu erwähnenden Fällen auch für andere ältere secundäre Producte beansprucht worden ist. Dass der bei der Umsetzung des schwefelsauren Kupferoxyds in kohlensaures durch kohlensauren Kalk entstandene Gyps auch hier in Folge seiner wenngleich nicht sehr leichten Löslichkeit nicht mehr gefunden wird, möchte im europäischen Klima kaum auffallen, im tropischen fehlt er selten.

b. Zersetzungsproducte des Eisenspaths.

16. Brauneisenstein gehört in der oberen Region der Freudenstadter Gänge zu den gewöhnlichsten Mineralien und ist eine Zeitlang, wo er in grösseren Massen vorkam, sogar abgebaut worden, wie bereits früher erwähnt wurde. Gegen-

1) Pseudomorphosen S. 215 f.

wärtig trifft man ihn noch theils in dicken Ueberzügen mit faseriger Structur und glatter glänzender Oberfläche (Glaskopf) oder in dünnen erdigen von licht brauner Farbe, nicht selten auch in rhomboedrischen Pseudomorphosen. In manchen derben Massen ist ebenso wie in den Pseudomorphosen noch Manganhyperoxyd beigemengt, falls es nicht theilweise schon früher, also unter demselben als Wad ausgeschieden worden ist, die Hauptmasse des Mangans tritt aber erst in dem den Brauneisenstein überdeckenden Kupfermanganerz concentrirt auf.

17. Hydrohämatit.[1]) Ist genau in ebensolchen Ueberzügen und Trümern wie der Brauneisenstein nicht selten, aber von diesem durch dunkel kirschrothen Strich und weit geringeren Wassergehalt leicht zu unterscheiden. Bekanntlich verliert merkwürdiger Weise Eisenoxydhydrat, welches längere Zeit unter Wasser verweilt, das vorher in chemischer Verbindung aufgenommene Wasser und wird wasserfrei. Dieser Process, in welchem der Hydrohämatit ein mittleres Stadium repräsentirt, muss in der Natur oft in sehr grossem Massstabe vor sich gegangen sein, wie z. B. auf den Gängen von Irrgang bei Platten in Böhmen, Ilefeld am Harze u. a. O., denn jeder sog. rothe Glaskopf ist ja nur Pseudomorphose nach braunem.

18. Wad. Dünne schwärzliche Ueberzüge auf Sandstein zeigen bräunlichen Strich und entwickeln mit Salzsäure viel Chlorgas. Die Lösung enthält kein Kupfer. Das Mineral kommt zu Freudenstadt, Hallwangen und Neu-Bulach, aber nirgends in grösserer Menge vor und erscheint ebenso wie auf den Klüftchen des Wellendolomits häufig von Malachit oder Kupferlasur bedeckt.

---

1) Breithaupt, Vollständ. Handbuch d. Mineralogie 1847 S. 846.

c. Producte gemeinsamer Zersetzung von Eisenspath und Fahlerz.

19. Arseniosiderit. Findet sich nur in dünnen Ueberzügen auf Quarz und in reizenden hohlen Pseudomorphosen nach Eisenspath-Rhomboedern. Dieselben zeigen bei chocoladebrauner Färbung meist eine glatte, seltener warzige Oberfläche und bestehen nur aus kleinblätterigem Arseniosiderit, wie ich bereits früher[1]) angegeben habe. Den Kalk und das Eisenoxyd zu dieser Verbindung ($3\,CaO \cdot As^2O^5 + Fe^2O^3 \cdot As^2O^5$) + 6 aq. liefert der Eisenspath, die Arsensäure das Fahlerz. Bisher ist der Arseniosiderit nur zu Neu-Bulach gefunden worden, ist aber hier nicht häufig.

20. Kupfermanganerz.[2]) Dieses tiefschwarze Erz, welches in kleintraubigen Ueberzügen und manchfaltig gestalteten Dendriten auf den Freudenstadter Gängen sehr häufig, zu Bulach aber weit seltener vorkommt, ist stets, so auch z. B. von v. Quenstedt[3]) mit Psilomelan verwechselt worden, dem es äusserlich sehr ähnlich sieht. Allein sowohl die Härte, welche nur 3,5 beträgt, als der braune Strich lassen es leicht unterscheiden. Mit Salzsäure entwickelt das Erz reichlich Chlor, die grüne Lösung färbt sich dann mit Ammoniak sofort intensiv blau, während etwas Eisenoxyd herausfällt. Schwefelsäure fällt aus dem Freudenstadter Erze schwefelsauren Baryt und schwefelsauren Kalk, welcher sich in der Salzsäure leicht wieder auflöst. Das Neu-Bulacher Erz enthält nur Kalk, wie jenes von der Grube Sagra Familia in Costarica. Die übrigen Bestandtheile ausser dem sehr reichlichen Manganhyperoxyd sind noch Kali nebst wenig Lithion und fast 17 proc. Wasser. Kobalt ist in der Freudenstadter

---

1) Jahrb. f. Min. 1886. I. S. 251.

2) R. Böttger und Rammelsberg, Poggendorffs Annalen LIV. S. 545.

3) Geologische Ausflüge S. 134.

Varietät stets enthalten, fehlt aber in jener von Neu-Bulach, was sich aus den oben mitgetheilten Analysen der Fahlerze von beiden Fundorten leicht erklärt. Schon bei anderen Gelegenheiten[1]) habe ich darauf hingewiesen, dass dieser Körper aus der Zersetzung von Malachit durch Manganlösungen hervorgeht. Auch an Stücken von Freudenstadt und Neu-Bulach ist das sehr deutlich nachweisbar. Noch jünger sind auf den Gängen nur die wasserhelle zweite Schwerspath-Generation und der ebenso spärlich vorkommende Chalcedon.

Soviel über die Mineralien der Erzgänge.

Bildungsweise der Erzgänge.

Wie schon früher entwickelt wurde, sind alle Erz- und Schwerspath-Gänge der hier besprochenen Gegend Ausfüllungen von Verwerfungs-Spalten, welche von dem unteren Wellendolomit bis in den untersten Buntsandstein hinabreichen, ob auch noch in das Grundgebirge ist noch nicht entschieden, da man meines Wissens nicht unter den tiefen Christophsstollen hinabgegangen ist, wäre aber möglich. Es fragt sich nun, woher rührt das Material der Gänge und da stellt sich zunächst heraus, dass es nur aus dem Wellendolomit und zwar aus den untersten Bänken desselben entnommen sein kann. Die Buntsandstein-Schichten enthalten die Elemente der Gangmineralien nicht, wie zahlreiche Versuche mit aller Bestimmtheit nachgewiesen haben. Es handelt sich also, wie ich schon früher[2]) gezeigt habe, um Ausfüllung der Gangspalten von oben, um „Descensions-Gänge". Früher wurde bereits nachgewiesen, dass der Wellendolomit nicht nur die Elemente eines kalk- und manganhaltigen Eisenspathes, sondern auch fertiggebildetes, aber sehr feinvertheiltes Fahl-

1) Unters. über Erzgänge I S. 123. Diese Sitzungsber. 1891. S. 203.

2) Unters. über Erzgänge II. S. 244.

erz und Schwerspath enthält. Man kann sogar aus dem durch die hüttenmännische Probe nachgewiesenen Silbergehalte desselben berechnen, wie viel Fahlerz in der untersten Bank von Aach enthalten ist, wenn man annimmt, dass dasselbe, was ja überaus wahrscheinlich ist, einen ebenso hohen Silbergehalt, 1,37%, besitze, wie jenes der Freudenstadter Gänge. Es würden hiernach 91 Kilogramm Gestein 1 Gramm Fahlerz enthalten. Man sieht aus diesen Zahlen, wie grosse Massen von Wellendolomit ausgelaugt werden mussten, um das Haupterz der Gänge in einiger Menge zu liefern. Wie sich das Fahlerz ursprünglich gebildet hat, ist natürlich einstweilen nicht zu sagen, da es zwar experimentell dargestellt worden ist, aber nicht unter Umständen, welche seinem Vorkommen in der Natur entsprechen.[1]) Doch darf man vermuthen, dass die Schwermetalle, welche es zusammensetzen, aus dem Schutte der Glimmer des Urgebirges als Chloride ausgelaugt worden sind und sich in dem Trias-Meere mit schwefelsauren Alkalien bezw. alkalischen Erden in schwefelsaure Salze umgesetzt haben. Diese sind schliesslich durch die reichlich vorhandene organische Substanz reducirt und in Form von Fahlerz ausgefällt worden.

Dass der in den Feldspathen des Urgebirgs-Schuttes enthaltene Baryt durch die schwefelsauren Salze des Meerwassers in schwefelsauren Baryt umgewandelt wurde, welcher das Fahlerz begleitet, ist leicht begreiflich.

Unzweifelhaft ist die Bildung der Gangspalten erst **nach** der Ablagerung des untersten Wellendolomits erfolgt und beide Körper fanden nun auf diesen Raum, um sich in grösserer Menge zu concentriren und abzulagern. Selbstverständlich herrscht auf den Gängen der viel reichlicher als die Schwermetalle im Ursprungsgestein vorhandene Baryt vor. Das Fahl-

---

1) Wenigstens ist dies bei den gelungenen Versuchen von Durocher Compt. rend. Tome XXXII. p. 823 sicher nicht der Fall.

erz ist vermuthlich durch verdünnte Lösungen von Schwefelcalcium oder Schwefelnatrium ausgelaugt und in gleicher Form wieder abgesetzt worden. Was den Schwerspath betrifft, so ist seine Löslichkeit in verschiedenen Flüssigkeiten, z. B. salpetersaurem Ammoniak bei gewöhnlicher Temperatur längst bekannt. In neuester Zeit hat Lattermann[1]) nachgewiesen, dass er auch in Soolwassern gelöst auftritt und aus diesen erst bei starker Verdünnung und zwar nicht vollständig ausfällt.[2]) Dass der Wellendolomit nach seinem Absatze aus dem Meere noch längere Zeit Salzlösungen in sich zurückgehalten habe, wie sie in der Lautenthaler Soole vorliegen, darf wohl um so weniger als gewagte Annahme bezeichnet werden, als derselbe noch jetzt an destillirtes Wasser sowohl durch Wasser auslaugbare Chlorverbindungen als schwefelsaure Salze in nicht ganz unbedeutender Menge abgibt und bei Sulz am Neckar sogar Soole aus ihm austritt.[3]) Kohlensaures Eisen- und Manganoxydul ist zwar nicht in der Lautenthaler, wohl aber in einer Soole aus einem Bohrloche im Zwickauer Kohlenbecken[4]) neben kohlensaurem Kalke, Chlorbaryum und Chlorstrontium nachgewiesen worden, das Auftreten von manganhaltigem Eisenspath neben Schwerspath auf den Gängen hat also nichts Befremdendes. Auch in den Kissinger u. a. Sool-Quellen ist Baryt neben Carbonaten in sehr geringer Menge enthalten.

Soweit die Gänge im Wellendolomit auftreten, erscheinen

1) Jahrb. d. k. preuss. geol. Landesanstalt 1888. S. 271 ff.

2) Ders. das. S. 278. Proben der prächtigen Röhrenstalaktiten von Schwerspath, welche sich aus dieser Soole in der Grube zu Lautenthal in gleicher Art wie sonst Kalksinter noch absetzen, habe ich durch die Güte des Herrn Bergraths Banizza erhalten und selbst untersuchen können.

3) v. Alberti, Ueberblick über die Trias S. 6. Eine Analyse dieser Soole habe ich leider nicht finden können.

4) Karsten, Journ. f. prakt. Chemie Bd. XXXV. S. 257.

sie frei von Quarz und lassen auch keine Veränderung an dem Nebengestein wahrnehmen, vor allem keine Verkieselung. Diese zeigt sich aber sofort überall, wo sie in den Buntsandstein hereinsetzen. Hiernach unterliegt es keinem Zweifel, dass das Eindringen von Quarz und die allmählige Verdrängung des Schwerspaths auf den Gängen durch ihn, welche in jedem Stadium zu beobachten ist, in eine spätere Periode fällt, als die Ausfüllung derselben mit Schwerspath, Fahlerz und Eisenspath, was ja auch die oben angeführten paragenetischen Beispiele klar genug darthun. Gleichzeitig ist auch Quarzsubstanz in das Nebengestein eingedrungen und hat dieses vollkommen verkieselt. Wer sich erinnert, dass die Quellen des Buntsandsteins noch heut zu Tage einen relativ hohen Gehalt an Kieselsäure besitzen[1]), so z. B. die Stadtquelle zu Lohr am Main, welche 29,21, jene von Brückenau, welche 14 in 100 Theilen Abdampf-Rückstand[2]) enthalten, die Teinacher Dächleinsquelle nach Fehling aber noch weit mehr, der wird leicht begreifen, dass Lösungen von Kieselsäure in und neben den Freudenstadter und Bulacher Gangspalten während ungemessener Zeiträume in die Tiefe sinken und einen guten Theil ihrer festen Bestandtheile, vor Allem ihre Kieselsäure, in denselben absetzen mussten. Das ist die einfache und wie ich glaube durchaus naturgemässe Erklärung für diese Thatsache. Dass gewisse, namentlich die nordwestlichen Parthien der Neu-Bulacher und Freudenstadter Gänge, die Verdrängung des Schwerspaths durch Quarz stärker entwickelt wahrnehmen lassen, als die südöstlichen, glaube ich so erklären zu müssen, dass die Wellendolomitbedeckung bei ersteren früher als bei letzteren durch Erosion entfernt worden ist. Das Nebengestein

---

1) Ganz so wie die anderer Quarzsandsteine, z. B. die unterdevonischen des Taunus, gewisse Lettenkohlen- und Keupersandsteine, untere Liassandsteine u. s. w.

2) Pecher, Beiträge zur Kenntniss der Wasser aus den geschichteten Gesteinen Unterfrankens. Inaug.-Dissert. Würzburg 1887. S. 26 ff.

hat Nichts an die Gänge abgegeben, wiederholte Untersuchungen haben in demselben kein Kupfer, sondern nur minimale Quantitäten von Arsen und Kalk nachgewiesen. Selbstverständlich wurde nur solches untersucht, in welches keine von den Gängen auslaufenden Trümer hereinsetzen. Mit der massenhaften Infiltration von Kieselsäure erscheint die Ausfüllung der Gänge beendigt.

Natürlich waren diese nach der allgemeinen Erosion des Buntsandsteingebietes schliesslich der Einwirkung lufthaltiger Wasser preisgegeben. Alsdann begann der Process der Zersetzung des Fahlerzes sowie des Eisenspaths, welcher im Inneren des Gebirges wohl bis auf den heutigen Tag noch fortdauert und aller Wahrscheinlichkeit nach sehr langsam verläuft. Die obere Teufe der Gänge, welche nur Zersetzungsproducte, namentlich oft prächtig gefärbte Kupfersalze aufweist, ist natürlich ganz anders beschaffen, als die tieferen Regionen, in welchen noch frische Schwefelmetalle und kohlensaure Salze erhalten geblieben sind. Sehr interessant ist das Auftreten des jüngeren Schwerspaths über den Oxydations-Producten in der oberen Teufe, ich möchte in ihm eine Bestätigung der Beobachtung von Lattermann erblicken, nach welcher sich schwefelsaurer Baryt in verdünnten Flüssigkeiten lange gelöst erhält, was ja auch durch Versuche im Laboratorium vollkommen bestätigt wird.

Soviel über meine Untersuchungen an den merkwürdigen Descensions-Gängen des württembergischen Schwarzwaldes, welche meine früher[1]) ausgesprochene Ansicht von der Natur derselben bis in die kleinsten Einzelheiten bestätigen.

1) Unters. über Erzgänge II. S. 244 f.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1891.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philos.-philol. u. histor. Classe bestimmten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1891 Heft V verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South Australia in Adelaïde:

Transactions, Vol. XIV. part 1. 1891. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandlingen. Natuurkunde. Bd. 28. 1890. 4⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

24th annual Report June 4. 1891. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

American Journal of Mathematics. Vol. XIII. 3. 4. 1891. 4⁰.
American Chemical Journal. Vol. XIII. 2–6. 1891. 8⁰.

K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië in Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 50. 1891. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke. Bd. VII. 1891. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 24. Jahrg. Nr. 12—18. 1891. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 43. Heft 1. 2. 1891. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. 1891. Bd. 5 Nr. 6—17. 8°.
Verhandlungen. 1891. Nr. 15. 16.

K. Geodätisches Institut in Berlin:

Jahresbericht für 1890/91. 8°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XX. Heft 3. 1891. 8°.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungs-Ergebnisse. Heft 5. 1891. 4°.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in Berlin:

Verzeichniss der Mitglieder. 1891. 8°.
Gartenflora. 40. Jahrgang. 1891. 8°.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1891. Nr. 27—31. 33—52. — 1892 Nr. 1. 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 11. Jahrg. Heft 7—12. 1891. gr. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus dem Jahre 1890. Nr. 1244—1264. 1891. 8°.

Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. XXX, 2. Bd. XXXI. Basel. 1890. 4°.
Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft zu Davos 1890, nebst französ. Uebersetzung. Davos 1891. 8°.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:

Exposé des raisons appuyant la transaction proposée par l'Academie des sciences de Bologne au sujet du méridien initial. Rome 1890. 8°.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 48. Jahrg. 1. Hälfte. 1891. 8°.

Société de Géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin 1891. Nr. 13—22. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Mémoires. 3e Sér. tome 5. cahier 2. et Appendice au tome V. 1890. 8⁰.

Boston Society of natural history in Boston:

Proceedings. Vol. XXV part I. 1891. 8⁰.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:

6. Jahresbericht für die Jahre 1887/88 u. 1888/89. 1891. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Collection in 8⁰. Tom. X. Fasc. 4. 1891. 8⁰.
Bulletin. IV. Sér. tom. V. Nr. 6—10. 1891. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Èvkönyve. Bd. IX, 6. 1891. gr. 8⁰.
Földtani Közlöny. Bd. XX, 5—7. 1890. Bd. XXI, 4—9. 1891. 8⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Entrega 17. (= tom. III. entr. 5). 1891. Fol.

Oficina meteorológica Argentina in Buenos Aires:

Anales. Tom. VIII. 1890. 4⁰.

Revista Argentina de historia natural in Buenos Aires:

Revista. Vol. I. Nr. 4. 5. 1891. 8⁰.

Institut météorologique de Roumanie in Bukarest:

Analele. Tom. IV. 1888. 1891. 4⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Anales. Seccion II. año 1890. 1891. Fol.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. Année 1890. 4 Ser. Vol. 5. Fasc. 2. 3. 4. 1891. 8⁰.
Bulletin météorologique, Mai—Decembre. 1890. 8⁰.

Government of India in Calcutta:

Scientific Results of the second Yarkand Mission. Aves, by R. Bowdler Sharpe, with Instroductory Note and Map 1878—1891. London 1891. Fol.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Indian Meteorological Memoirs. Vol. IV, part 7. 1891. Fol.
Report on the Administration in 1890/91. 1891. Fol.
Monthly Weather Review. 1891 Jan.—April. Fol.
Registers of original Observations. 1891 Jan.—April. Fol.
Cyclone Memoirs. Vol. IV. 1891. gr. 8°.

Agricultural Department of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall in the mountain districts. 1891. Fol.

Indian Museum in Calcutta:

Catalogue of Mammalia in the Indian Museum by W. L. Sclater. Part II 1891. 8°.

Geological Survey Office in Calcutta:

Records of the geological Survey of India. Vol. XXIV. Nr. 1—3 und Register zu I—XX. 1891. 4°.
Memoirs. Vol. XXIV. Nr. 3. 1890. 4°.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VII, part IV. V. 1891. 8°.

Museum of comparative Zoölogy at Harward College in Cambridge U. S.:

Bulletin. Vol. XXI. Nr. 2—5. Bulletin Vol. XVI. Nr. 10. 1891. 8°.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bulletino mensile. 1891 Fasc. 20—22. 8°.

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch. VII. Jahrg. 1889. II. Hälfte. VIII. Jahrg. 1890. I. u. II. Hälfte. 1891. 4°.

Universität in Christiania:

Ethnografisk Kart over Tromsö Amt. 6. Bl. 1890.

K. Universität in Christiania:

Archiv for Mathematik. Bd. XIV. 3. 4. 1890. 8°.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32, 1. 2. 1890. 8°.
Schubeler, Tillaeg til Viridarium I. 1891. 8°.

K. Universitäts-Sternwarte in Christiania:

Magnetische Beobachtungen 1882—1883 von H. Geelmuyden. 1891. 4°.
Supplement zu den Zonenbeobachtungen in Christiania v. H. Geelmuyden. 1891. 4°.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. 34. Jahrg. 1889/90. 1891. 8⁰.

The Journal of comparative Neurology in Cincinnati:

Journal. Vol. I. pag. 107—286. 1891. 8⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung. 1891 Nr. 47—100. Fol.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. VII. Heft 4. 1891. 8⁰.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tom. VI. Livr. 3. 4. Tom. VII. Livr. 1. Leiden 1891. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Dorpat:

Meteorologische Beobachtungen in d. Jahren 1884 u. 1885 v. Karl Weihrauch. 1891. 8⁰.
Sitzungsberichte. Bd. IX, 2. 1891. 8⁰.
Schriften. Nr. VI. 1890. 4⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XI. Juillet—Déc. 1890. 8⁰.

Royal Dublin Society in Dublin:

The scientific Proceedings. Vol. 6. part 10. Vol. 7. part 1. 2. 1890/91. 8⁰.
The scientific Transactions Vol. IV. part 6—8. 1890/91. 4⁰.

Royal Observatory in Edinburg:

Catalogue of the Crawford Library. 1890. 4⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Ser. Vol. XIV. disp. 2. 3. 1891. 8⁰.

Monitore Zoologico Italiano in Florenz:

Monitore. 2⁰ anno 1891. Nr. 2. 4—10. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:

Abhandlungen. Bd. XVI. Heft 3. 4. 1891. 4⁰.
Bericht. 1891. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a. M.:

Jahresbericht für 1889—90. 1891. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:

Helios. Monatliche Mittheilungen. 8. Jahrg. 1890 Nr. 8--12. 9. Jahrg. 1891 Nr. 1—6. 8⁰.
Societatum Litterae 4. Jahrg. 1890. Nr. 9—12. 5. Jahrg. 1891. Nr. 1—8. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. B.:

Berichte. Bd. V. Heft 1. 2. 1890—91. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Tom. XXXI. part. 1. 1890 - 91. 4⁰.

Sternwarte in Genf:

Résumé météorologique de l'année 1890. 1891. 8⁰.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz.

Mittheilungen. XXVII. Vereinsjahr 1890. 1891. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1890. Heft 27. 1891. 8⁰.

Niederl. Regierung im Haag:

Nederlandsch Kruidkundig Archief. II. Ser. Vol. V. Stuk 4. Nijmegen 1891. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

Proceedings and Transactions. Vol. VII. part. IV. 1890. 8⁰.

Kaiserlich Leopoldino-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft XXVII. Nr. 9—22. 1891. 4⁰.
Nova Acta. Tom. 54. 1890. 4⁰.
C. F. Zincken, Das Vorkommen der natürlichen Kohlenwasserstoff- und der andern Erdgase. 1890. 4⁰.
Geschichte der kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher von Willi Ule. 1889. 4⁰.

Naturw. Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 63. Heft 6. Bd. 64, Heft 1—3. 1890/91. 8⁰.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen. Bd. VII. 1891. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Bd. XI. 2. 3. 1891. 4⁰.

Musée Teyler in Harlem:

Archives. Sér. II. Vol. III. Fasc. 6. 1891. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:

Archives Néerlandaises. Vol. XXV. livr. 2. 3. 4. 1891. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

No. 16 et 17 de la Carte géologique de la Finlande accompagnés de renseignements. 1891.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 49. 50. 1890—91. 8⁰.

Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:

Meddelanden. Heft 16. 1888—91. 8⁰.
Acta. Vol. VII. 1890. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Bd. XXIII. Heft 3. 1891. 8⁰.

Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 18. Jahrg. 1891. 8⁰.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 19. Jahrg. 1889/90 u. 1890/91. 1891. 8⁰.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 22. Heft 3. 4. Bd. 26. Heft 1. 2. 1891. 8⁰.

Central-Bureau für Meteorologie in Karlsruhe:

Jahresbericht für 1890. 1891. 4⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:

36. u. 37. Bericht über die Vereinsjahre 1889 und 1890. 1891. 8⁰.

Ministerial-Kommission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Ergebnisse der Beobachtungs-Stationen. Jahrg. 1890 Nr. 1—12. Berlin 1891. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Kiel:

Schriften. Bd. IX, 1. 1891. 8⁰.

Aerztlicher naturwissenschaftlicher Verein Klausenburg:

5 Hefte der Zeitschrift Értesitö. 1891. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 31. Jahrg. Jubiläumsband 1890. 1891. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Skrifter. 6. Raekke. Naturvid. Afd. Bd. VI. Nr. 2. 1890—91. 4⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. Vol. 27. Nr. 104. 1891. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Teil X. Heft 3. 4. 1891. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. 26. Jahrg. Heft 2. 3. 1891. 8⁰.

K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte. Mathem.-phys. Classe. 1891, II. 8⁰.
Abhandlungen. Mathem.-phys. Classe. Bd. XVII, 5. 6. XVIII, 1. 1891. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal N. F. Bd. 44. Heft 13—24. 1891. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd. I. 1891. 8⁰.

K. K. Bergakademie Leoben:

Programm f. d. Studienjahr 1891/92. 1891. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin of the agricultural experiment station of Nebraska. Nr. 17. 1891. 8⁰.

Museum Francisco-Carolineum in Linz:

Beiträge zur Rosenflora v. J. B. Wiesbaur und Michael Haselberger. 1891. 8⁰.
Materialien zur landeskundlichen Bibliographie Oberösterreichs von Hans Commenda. 1891. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tom. VII. Fasc. 1. 1891. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 44. Nr. 1127—48. Vol. 45. Nr. 1149—1155. 1891. gr. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 49. Nr. 300—302. 1891. 8⁰.
Philosophical Transactions. Vol. 181. part. I. II. 1891. 4⁰.
List of Members 1890. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 51. Nr. 8. 9. Vol. 52. Nr. 1. 1891. 8⁰.

Chemical Society in London:

Proceedings. Session 1891—92. Nr. 96 - 103. 8⁰.
Journal. Nr. 344—349. July—December 1891. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 47, part 1—4. 1891. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal. a. Zoology. Nr. 124. 125. 145—147.
b. Botany Nr. 175. 183—193. 1890/91. 8⁰.
The Transactions. a. Zoology. Vol. 5. part 5—7.
b. Botany. Vol. 3. part 2. 3. 1891. 4⁰.
List of the Members. 1890—1891. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1891. Part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1891. Part II. III. 8⁰.
Transactions. Vol. XIII. part 3. 1891. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. XVIII. Livr. 1. 1891. 8⁰.

The Governor in Council in Madras:

Results of Observations of the fixed stars made at the Observatory Madras in the years 1868—1870, by N. R. Pogson. 1890. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht u. Abhandlungen 1890. 1891. 8⁰.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere in Mailand:

Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. 10. 1891. 8⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletin mensual. Tom. III. Nr. 1. 2. 1891. 4⁰.

Sociedad Mexicana de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Sér. Tom. 1. Nr. 10. 1891. Fol.

Sociedat cientifica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y revista tom. IV. Nr. 9. 10. 1891. 8⁰.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Serie III. Vol. X. Fasc. 1. 1891. 8⁰.

Royal Society of Canada in Montreal:

Proceedings and Transactions. Vol. VIII. 1890. 1891. 4.

Geological Survey of Canada in Montreal:

Contributions to Canadian Palaeontolgy. Vol. I, part III. Nr. 5. 1891. 8⁰.

Société impériale des naturalistes in Moskau:

Bulletin. 1891. Nr. 1. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 1891. Nr. 2—9. München. 4⁰.

Technische Hochschule in München:

Personalstand. Som.-Sem. 1891.
Programm f. d. J. 1881—92. 8⁰.
Bericht f. d. Studienjahr 1890—91. 4⁰.

K. bayer. Staatsministerium des Innern in München:

Geognost. Jahreshefte. 3. Jahrg. 1890. Cassel. gr. 8⁰.
Geognost. Karte des Königr. Bayern. Blatt Ansbach mit Erläuterungen. Cassel 1891. Fol.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. II. Tom. X. Fasc. 24. Paris 1891. 8⁰.
Bulletin. 1891. Nr. 4—7. Nancy 1891. 8⁰.

Reale Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Atti. Serie II. Vol. 4. 1891. 4⁰.

Museo di Geologia della R. Università in Neapel:

Cinquantesimo anniversario dell' Insegnamento di Arcangelo Scacchi. 1891. gr. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. X. Heft 1. Berlin 1891. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. XXXVIII. part 6. Vol. XL. part 2. 3. 1891. 8⁰.
Annual Report of the Council. 1891. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. III. Ser. Vol. 41. Nr. 245. 246. Vol. 42., May—September 1891. gr. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VI. Nr. 1. 1891. 8⁰.

Journal of comparative medicine and veterinary archives in New-York:

Journal. Vol. XII. Nr. 6. 8—12. 1891. 8⁰.

American Museum of natural history in New-York:

Annual Report for 1890—1891. 1891. 8⁰.

American chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XIII. Nr. 5—8. 1891. 8⁰.

American Geographical Society in New-York.

Bulletin. Vol. XXIII. Nr. 2. 3. 1891. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Jahresbericht 1890. 1891. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Bd. XVI. Heft 1 und Mathem. Abtheilung. Tom. XIII. 1891. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Bulletino. Tom. V. Nr. 1. 1891. 8⁰.
Atti. Vol. XII. Fasc. 2. 1892. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Annata XIV. 1891 Nr. I. 1891. 4⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tomo. 5. Fasc. 4. 5. 6. 1891. gr. 8⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1891. Nr. 26—51. 8⁰.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 112. Nr. 26. Tom. 113. Nr. 1—26. 1891. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès verbaux. 1890. 1891. 8⁰.

École polytechnique in Paris:

Journal. Cahier 60. 1890. 4⁰.

Zeitschrift „L'Électricien" in Paris:

L'Électricien. 2ᵉ Sér. Tom. II. Nr. 27—52. 1891. gr. 8⁰.

Zeitschrift „Le Moniteur scientifique" in Paris:

Moniteur scientifique. Livr. 596—600. Août—Déc. 1891. gr. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. III. Sér. Tom. II. Fasc. 2. 1890. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tom. 1. Fasc. 3. 1890. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Bulletin. VII. Sér. Tom. XI. Trimestre II. 1891. 8⁰.
Compte rendu. 1891. Nr. 14—18. 8⁰.

Société d'Horticulture in Paris:

Journal. Tom XIII. Octobre 1891. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XIX. Nr. 6. 1891. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVI. Nr. 6. 7. 8. 1891. 8⁰.
Mémoires. Tom. IV. Parties 3 et 4. 1891. 8⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

G. D. Romanowski. Materialy dlä geologii Turkestanskago Kraja. Bd. III. 1890. 4⁰.

Chemisch-physikalische Gesellschaft an der Kais. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Bd. XXIII. Nr. 5—8. 1891. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1890. Theil I. 1891. 4⁰.

Société Impériale Russe de géographie in St. Petersburg:

Beobachtungen der Russischen Polarstation auf Nowaja Semlja. I. Theil. 1891. 4⁰.

Academy of natural sciences in Philadelphia:

Bacteriological Laboratory. Reprints of three Editorials regarding the Priority in demonstrating the Toxic Effect of Matter accompanying the Tubercle Bacillus. 1890. 8⁰.
Proceedings. 1891. Part 1. 8⁰.

Alumni Association of Pharmacy in Philadelphia:

27. annual Report for the year 1890—91. 1891. 8⁰.

R. Scuola normale superiore in Pisa:

Annali. Vol. XIII. 1890. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Vol. VII. p. 235—346. 1891. 4⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Bd. XX. Nr. 5. 6. 1891. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1890. 51. Jahrg. 1891. 4⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. XXXIV. 1891. 8⁰.
Arbeiten. N. F. Heft 7. 1891. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Revista. 1891. Nr. 5—10. 8⁰.
Esboço de uma climato logia do Brazil por H. Morize. 1891. 8⁰.

Accademia Ponteficia de'Nuovi Lincei in Rom:

Memorie. Vol. IV. V. VI. 1888—90. 4⁰.
Atti. Anno XLIII. Sessione VII. Anno XLIV. Sessione I—V. 1890—91. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bolletino 1891. Nr. 1. 2. 3. 8⁰.
Memorie per servire alla descrizione della carta geologica d'Italia. Vol. IV. Parte 1. 1891. 8⁰.

Ministero della istruzione publica in Rom:

Le Opere di Galileo Galilei. Vol. II. Firenze. 1891. 4⁰.

Academy of Science in Saint-Louis:

The total Eclipse of the Sun, Jan. 1. 1889. Cambridge 1891. 4⁰.

Commissão geographica e geologica do Estado de S. Paulo in S. Paulo:

Boletin. Nr. 4—7. 1890. 8⁰.

Department of Mines in Sidney:

Records of the Geol. Survey of New-South-Wales. 1890. Vol. II. Part 1—3. 1890. 4⁰.
Memoirs. Palaeontology. Nr. 5. 1891. Fol.
Annual Report 1890. 1891. Fol.

Royal Society of New-South-Wales in Sidney:

Journal and Proceedings. Vol. XXIV. Part 2. 1890. 8⁰.

R. Accademia dei Fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV. Vol. III. Fasc. 5—9. 1891. 8⁰.

Museum in Stavanger:

Aarsberetning for 1890. 1891. 8⁰.

Société des Sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. 25. Fasc. 6—10. 1891. 8⁰.

West-Hendon-House Observatory in Sunderland:

Publications. Nr. 1. 1891. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):

Boletin. Tom. I. Nr. 3—6. 1891. 4⁰.
Anuario. Anno de 1892. 1891. 8⁰.

Royal Society in Tasmania:

Papers and Proceedings for 1890. 1891. 8⁰.

College of Science, Imperial University in Tokyo (Japan):

Journal. Vol. IV, part 2. 1891. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. II, part 1. 1891. gr. 8⁰.

Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten and Wetenschappen in Utrecht:

Die Functionen der Ganglienzellen des Halsmarkes von Otto Kaiser. Haag. 1891.

Institut Royal météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1890. 1891. 4⁰.

Société provinciale des arts et sciences in Utrecht:

Frank W. Very, Distributions of the Moon's Heat. The Hague 1891. gr. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. IV. Reeks. I, 2. 1891. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Experiments in Aërodynamics. By S. B. Langley. 1891. 4⁰.
Miscellaneons Collections. Nr. 708. 741. 764. 594. 663. 785. 1885—1891. 8⁰.
Annual Report 1889. 1890. 8⁰.
Plates prepared to accompany a Report on the forest trees of North America by Asa Gray 1891. Fol.

Chief Signal Officer of the U. S. Army in Washington:

Annual Report for the year 1890. 1890. 8⁰.

Surgeon General's Office, U. S. Army in Washington:

Index Catalogue. Vol. 12. 1891. 4⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey Office in Washington:

Bulletin. Nr. 22. 23. 24. 1891. 4⁰.
Report for the year 1889. 1890. 4⁰.

Landwirthschaftliche Zentralschule in Weihenstephan:

Jahresbericht für das 39. Schuljahr 1990/91. Freising 1891. 8⁰.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Denkschriften. Mathem.-naturw. Klasse. Bd. 57. 1890—91. 4⁰.

Sitzungsber. Math.-naturw. Kl. Abth.	I.	1890	Nr. 4—10	8⁰.
„	IIa.	1890	„ 4—10	
„	IIb.	1890	„ 4—10	
„	III.	1890	„ 4—10	

K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1889. Bd. 34. 1890. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. IV. Jahrg. 1891. Nr. 28—40. 42. 44. 47—51. 53. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXI. Heft 2. 3. 1891. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 41. Quartal 1. 2. 1891. 8⁰.

K. K. österr. Gradmessungs-Commission in Wien:

Astronomische Arbeiten. Bd. II. 1890. 4⁰.
Verhandlungen. Protokoll über die Sitzungen vom 1. April 1890 und vom 4. April 1891. 1890/91. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. VI. Nr. 2. 1891. gr. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1890. Bd. 40. Heft 3. 4. Jahrg. 1891. Bd. 41. Heft 1. 4⁰.
Verhandlungen 1891. Nr. 8—14. 4⁰.

K. K. Universitäts-Bibliothek in Wien:

Pfaff, Rede auf Zeiller. 1891. 8⁰.
Lustkandl, Sonnenfels und Kudler. 1891. 8⁰.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. Bd. VII. 1891. gr. 4⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 44. 1891. 8⁰.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. XXV. Nr. 3. 4. 5. 1891. 8⁰.
Sitzungsberichte. 1891. Nr. 2. 3. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrschrift. 35. Jahrg. Heft 3. 4. 36. Jahrg. Heft 1. 1890/91. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

4. Jahresbericht f. d. J. 1890. 1891. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Antonio Aloi in Catania:

Dell' influenza dell' electricità atmosferica sulla vegetazione delle piante. 1891. 8⁰.
Sulla traspirazione cuticolare e stomatica delle piante terrestri. Catania 1891. 8⁰.

Florentino Ameghino in Buenos Aires:

Revista Argentinia de historia natural. Tom. I. entr. 3. 1891. 8⁰.

Rudolf Blasius in Braunschweig:

Systematische Uebersicht der Vögel Bayerns, von A. J. Jäckel, herausgegeben v. Rud. Blasius. München 1891. 8⁰.

Le Dr. Bonnejoy (du Vexin) in Paris:

Le Végétarisme. Paris 1891. 8⁰.

Giovanni Canestrini in Venedig:

Abbozzo del sistema acarologico. 1891. 8⁰.

R. Fresenius in Wiesbaden:

Chemische Untersuchung der Trink- oder Bergquelle des Bades Bertrich. 1891. 8⁰.
Analyse des Julianenbrunnens u. d. Georgenbrunnens im fürstl. Bade Eilsen. 1891. 8⁰.

Konrad Ganzenmüller in Dresden:

Kura Kawar. Ukerewe Njansa. Weimar 1891. 8⁰.

S. P. Langley in Paris:

Recherches expérimentales aërodynamiques. 1891. 4⁰.

Émilie Lemoine in Paris:

Contributions á la géométrie du triangle. 1889. 8⁰.
Sur les triangles orthologiques. 1890. 8⁰.

Max Kolb in München:

Die europäischen und überseeischen Alpenpflanzen. Lief. 1—8. Stuttgart. 1889. 8⁰.

A. Kurz in Augsburg:

5 Abhandlungen. Sep.-Abdr. aus d. Repert. d. Physik:
1. Zwei Apparate zum Rollen und Gleiten auf der schiefen Ebene. II. Mittheilung. 2. Elementare Darstellung des Regenbogens.

3. Die gewöhnliche Linse und der Achromatismus. III. Mittheilung. 4. Die Elasticität der Coconfäden. 5. Stroboskopische Demonstrationen.

Der Arbeitsbegriff in der Elektrik. S.-A. aus den Blättern für das bayer. Realschulwesen.

Das Augsburger Wetterhäuschen. S.-A. aus d. Augsburger Sonntagsblatt 1891 Nr. 11 u. 21.

Die thermische u. mechanische Ausdehnung des Kautschuks. II. Mittheilung. 1891. 8°.

Ferdinand v. Müller in Melbourne:

Iconography of Australian Salsolaceous Plants. Decade I—VII. 1889/90. 4°.

O. A. L. Pihl in Christiania:

The Stellar Cluster χ Persei. 1891. 4°.

Michele Rajna in Venedig:

Sulle eclissi solari del 6 Giugno 1891 e del 16 Aprile 1893. 1891. 8°.

Karl von Scherzer in Genua:

Der wirthschaftliche Verkehr der Gegenwart. Wien. 1891. 8°.

Fürst Grigori Stourdza in Paris:

Les lois fondamentales de l'univers. 1891. gr. 8°.

Agostino Todaro in Palermo:

Hortus botanicus Panormitanus. Tom. II. Fasc. 8. 1891. Fol.

Henry Wilde in London:

On the causes of de Phenomena of terrestrial Magneism. 1891. 4°.

Robert Winkler in Nürnberg:

Ein neues Weltsystem. 1891. 8°.

—

Namen-Register.

van **Beneden** Eduard (Wahl) 273.
Boltzmann Ludwig (Wahl) 273.
Brill Alexander 207.

Capellini Giovanni (Wahl) 273.

Dyck Walther 23.

Finsterwalder Sebastian 180.

v. **Gümbel** Wilhelm 79. 274.

Haeckel Ernst (Wahl) 273.
v. Haerdtl Eduard 189.
Hébert Eduard (Nekrolog) 146.
Henneberg Wilhelm (Nekrolog) 161.
Hessler Franz (Nekrolog) 139.

Königsberger Leo 275.

Lommel Eugen 181.

Recknagel Georg 5.
Rüdinger Nikolaus 121.

v. **Sandberger** Friedrich 191. 281.
Seeliger Hugo 239. 247.
Steinheil Adolf 1.

v. **Tschichatscheff** Peter (Nekrolog) 175.

v. **Voit** Carl 139. 189.
Voss Aurel 59.

Weber C. Ludwig 59.
Will Heinrich (Nekrolog) 154.

Sach-Register.

Bilder, erzeugt von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes, auf Grund der Seidel'schen Formeln untersucht 180.

Curvensysteme, über die gestaltlichen Verhältnisse derselben, definirt durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln 23.

Differentialvarianten, speziell in der Flächentheorie 59.
Druckschriften, eingelaufene 221. 319.

Erzgang der Grube Sagra Familia in Costarica 191.
Erzgänge der Gegend von Freudenstadt und Bulach im württembergischen Schwarzwald. 281.
Extinction des Lichtes in der Atmosphäre 247.
Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle 207.
Geognostische Beschreibung von Bayern 274.
Glykogenbildung, nach Aufnahme verschiedener Zuckerarten 189.

Inklination, Messung der magnetischen 59.
Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme 275.
Lieberkühn'sche Drüsen, Umbildung derselben durch die Solitärfollikel im Wurmfortsatz des Menschen 121.

Nekrologe 139. 146. 154. 161. 175.

Optik, Handbuch der angewandten 1.

Problem der drei Körper, Skizzen zu einem speziellen Fall desselben 189.

Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes 181.
Strahlenbrechung in der Atmosphäre 239.

Thermen von Bormio, geologische Bemerkungen über dieselben 79.

Wahlen 273.
Wohnung, zur Hygiene derselben 5.

Fig. I.'

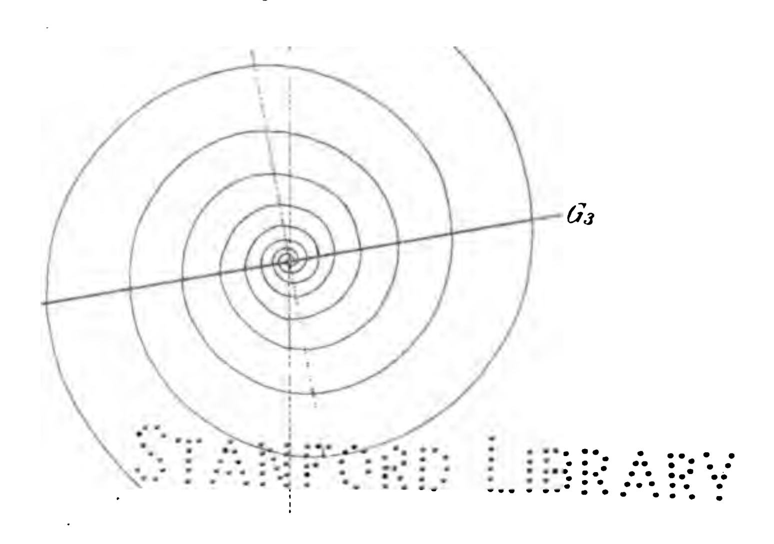
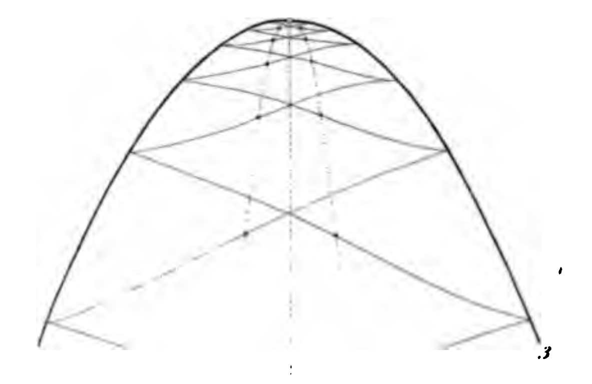
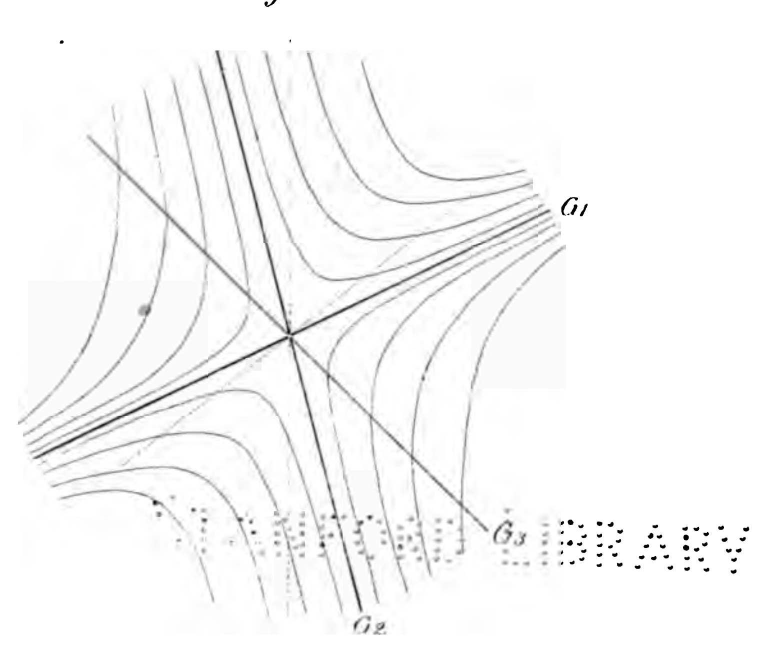


Fig. I.



Zur Abhandlung von W. Dyck.

Fig. II.'



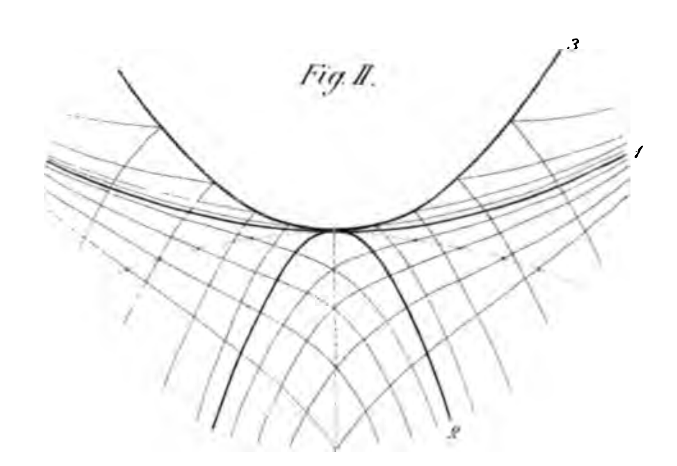


Fig. II.'

G1

G3

G2

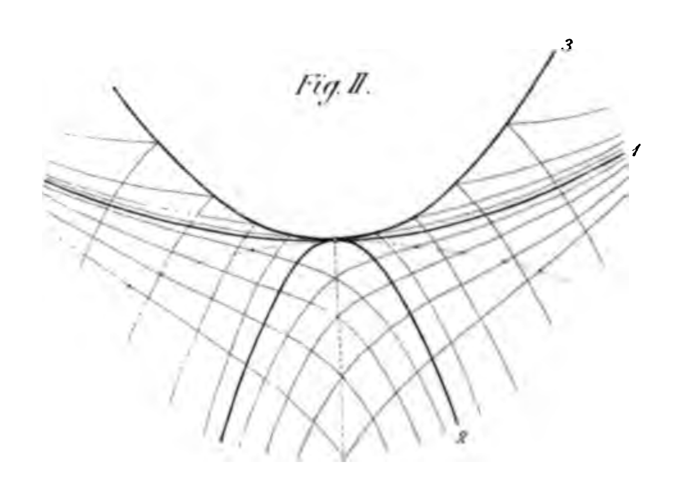


Fig. II.

Zur Abhandlung von W. Dyck.

Fig. III.'

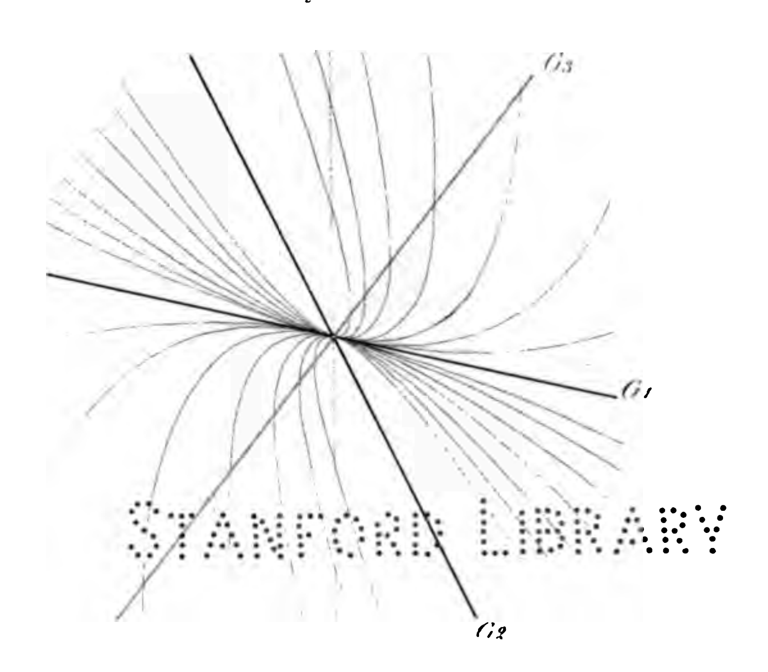
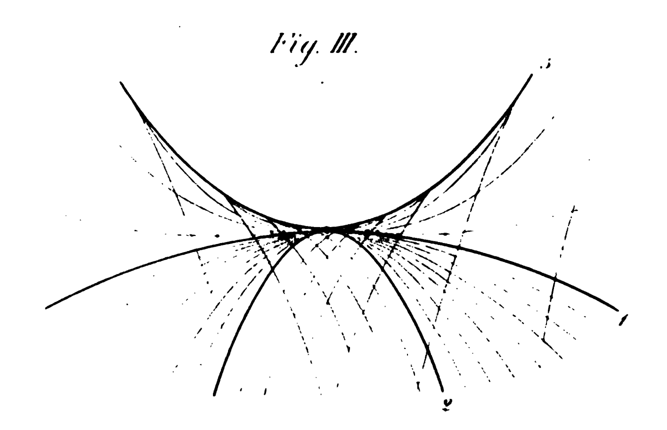


Fig. III.



Zur Abhandlung von W. Dyck.

Fig. IV.

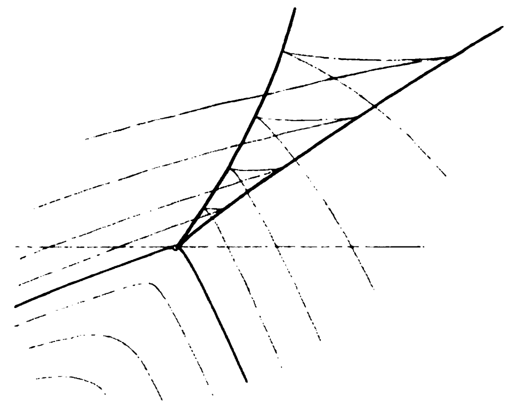
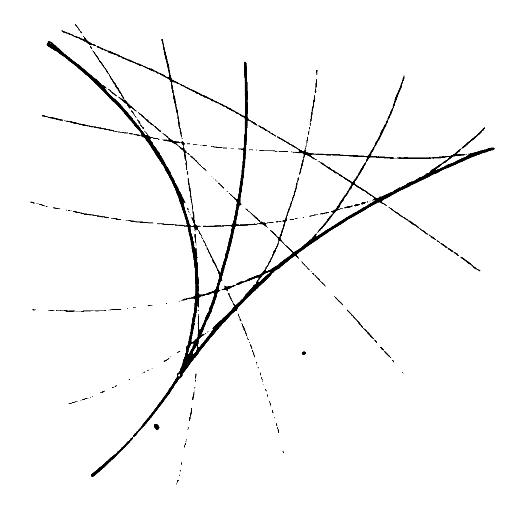


Fig. V.



Zu Abhandlung von W. Dyck.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.

Uebersicht
des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXII
Jahrgang 1892.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 133. Stiftungstages am 28. März 1892.

v. Pettenkofer: Einleitender Vortrag 189
v. Voit: Nekrologe 196

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1892.

M. v. Pettenkofer: Einleitender Vortrag 365
Wahlen 367

Sitzung vom 9. Januar 1892.

*H. Rauff: Untersuchungen über die Organisation und die systematische Stellung der Receptaculitiden 1
G. Bauer: Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen 3

Sitzung vom 6. Februar 1892.

*A. v. Baeyer: Ueber die Reduktion der Benzolcarbonsäure 21
C. v. Voit: Ueber den Einfluss verschiedener Nahrungsmittel auf den Wassergehalt der Organe und den Hämaglobingehalt des Blutes 21

Sitzung vom 5. März 1892.

Seite

Jac. Lüroth: Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen 27

L. Boltzmann: Ueber das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten . 53

R. Emden: Ueber den Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen (Mit Tafel I) . . . 71

H. Brunn: Ueber Verkettung (Mit Tafel II—IV) 77

Walter Dyck: Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme (zweite Mittheilung) (Mit Tafel V—VII) 101

W. v. Gümbel: Geologische Bemerkungen über die warme Quelle des Brennerbades und ihre Umgebung 137

Sitzung vom 7. Mai 1892.

A. Pringsheim: Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich 211

A. Voss: Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie 247

*N. Rüdinger: Uebergabe eines von demselben zusammengestellten Kataloges der anthropologischen Sammlung der hiesigen anatomischen Anstalt 210

Sitzung vom 11. Juni 1892.

L. Boltzmann: Ueber ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen. Theil I 279

A. C. Gill: Ueber Auflösung und Wachsthum der Krystalle . 303

*A. v. Baeyer: Ueber die Synthese des Dihydrobenzols . . 279

Sitzung vom 2. Juli 1892.

*C. v. Kupffer: Mittheilungen über die Entwicklung des Störs 307

*A. v. Baeyer: Weitere Versuche über die Synthese des Dihydroparaxylols 307

Sitzung vom 5. November 1892.

Seite

L. Boltzmann: Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft. III. Theil 329

*E. Lommel: Vorlage der gesammelten Abhandlungen G. L. Ohm's 327

L. Sohncke: Ueber wissenschaftliche Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschifffahrt 359

*L. Radlkofer: Verlauf und Ergebnisse des internationalen botanischen Congresses zu Genua 328

M. v. Pettenkofer: Vorlage von Photographien eines in den Pampas ausgegrabenen grossen diluvialen Säugethieres 328

Sitzung vom 3. Dezember 1892.

E. Lommel: Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens 371

*W. Dyck: Vorlage des Kataloges mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente 370

Einsendung von Druckschriften 309, 377

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 9. Januar 1892.

1. Herr K. A. v. ZITTEL berichtete über den Fortgang seiner Monographie über fossile Spongien und legte zugleich eine Abhandlung seines Mitarbeiters, des Herrn Dr. HERMANN RAUFF in Bonn: „Untersuchungen über die Organisation und die systematische Stellung der Receptaculitiden“ vor. Dieselbe soll in die Denkschriften aufgenommen werden.

2. Herr GUSTAV BAUER hielt einen Vortrag: „über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen.“



Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen.

Von Gustav Bauer.

(Eingelaufen 15. Januar.)

1. Ist f eine binäre Form n^{ten} Grads, ψ eine solche i^{ten} Grads

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n \tag{1}$$

$$\psi = b_0 x_1^i + \binom{i}{1} b_1 x_1^{i-1} x_2 + \cdots + b_i x_2^i \quad (i < n) \tag{2}$$

und man bildet aus $\psi(x_1, x_2)$ das Operationssymbol

$$\psi\left(\frac{\partial.}{\partial x_2}, -\frac{\partial.}{\partial x_1}\right)$$

und operirt hiemit auf f, so erhält man, wie bekannt, eine Covariante von f und ψ (Intermutante) vom Grade $n-i$

$$V = c_0 x_1^{n-i} + \binom{n-i}{1} c_1 x_1^{n-i-1} x_2 + \cdots, \tag{3}$$

deren Coefficienten c durch die Formel

$$c_k = a_k b_i - \binom{i}{1} a_{k+1} b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2} b_{i-2} + \cdots \tag{4}$$

bestimmt sind. Ist speziell $i = n$, so reducirt sich V auf eine Invariante

$$V_0 = a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n b_0.$$

Denkt man sich durch die Formen f und ψ n, resp. i, Punkte einer Geraden dargestellt, so ist die Covariante V geometrisch definirt als die gemischte Polare der i Punkte ψ in Bezug auf die n Punkte f. Sind nun die Coefficienten b von ψ so bestimmt, dass die sämmtlichen Coefficienten $c_0 \cdots c_1 \cdots c_{n-i}$ von V verschwinden, so kann man[1]), analog zu der Bezeichnung von Herrn Reye im ternären und quaternären Gebiet, die Form ψ als apolar zu f bezeichnen, und es gilt dann allgemein der Satz: Soll die Funktion f in eine Summe von i Potenzen zerlegt werden, in der Weise (5)

$$f = \mu_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^n + \mu_2 (x_1 - \alpha_2 x_2)^n + \cdots + \mu_i (x_1 - \alpha_i x_2)^n$$

so müssen $x_1 - \alpha_1 x_2, x_1 - \alpha_2 x_2 \cdots$ Linearfaktoren einer zu f apolaren Form ψ sein.

Ist $i = \frac{n+1}{2}$ (n ungerade), so ist ν vom Grade $\frac{n-1}{2}$ mit $\frac{n+1}{2}$ Coefficienten, und man hat mithin $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten b. Die apolare Function ψ ist dann vollkommen bestimmt und es gibt dann auch nur eine Zerlegung von f in $\frac{n+1}{2}$ Potenzen. Es ist die bekannte von Sylvester gegebene Zerlegung einer Form vom Grade $2m - 1$ in die canonische Form einer Summe von m Potenzen.[2])

Ist $i = n$, so hat man nur eine Bedingungsgleichung für die b, nämlich $V_0 = 0$; man kann dann die b so bestimmen, dass ψ apolar wird zugleich zu n Formen $f_1 \cdots f_n$ n^{ten} Grads, welche sämmtlich mittelst der Linearfaktoren von ψ in Summen

1) Sturm. „Darstellung bin. Formen auf der cubischen Raumcurve. Crelle's Journ. Bd. 86. S. 117.

2) Philos. Mag. 4. Ser. Vol. II. 1851. S. 391.

von n Potenzen zerlegt werden können, wie dies zuerst von Herrn Rosanes gezeigt worden.[1])

Liegt i zwischen diesen Grenzen, so hat man überhaupt nicht die genügende Anzahl von Bedingungsgleichungen, um die Coefficienten f zu bestimmen; es gehen dann willkürliche Grössen in die Coefficienten von ψ ein; und folglich auch in die Entwicklung von f in ein Aggregat von Potenzen. Ist hingegen $i < \frac{n+1}{2}$, so hat man mehr Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten von ψ als zu deren Bestimmung nöthig ist, und es müssen sodann $n - 2i + 1$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten a von f bestehen, wenn eine Entwicklung von f in eine Summe von i Potenzen möglich sein soll.

In der oben angeführten Abhandlung „Ueber ein Princip etc." ist von Herrn Rosanes zuerst die Beziehung dargelegt worden, welche zwischen der Entwicklung binärer Formen in Potenzsummen und den apolaren Formen besteht und aus dieser Darlegung, sowie auch denen von Herrn Sturm lässt sich der obige allgemeine Satz über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen unschwer erschliessen. Auch die Analyse Sylvesters lässt sich mit leichter Modification dem allgemeinen Falle anpassen. Ich werde hier der letzteren zunächst folgend die Zerlegung einer binären Form n^{ten} Grads in i Potenzen betrachten, zu dem Zwecke, die erhaltenen Resultate anzuwenden auf die Entwicklung einer geraden Form $2n^{\text{ten}}$ Grads in eine Summe von $n+1$ Potenzen. Diese Zerlegung ergibt sich, nur von invarianten Formen

---

1) Crelle's Journ. Bd. 75. „Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen" u. besonders Bd. 76 „Ueber e. Princip der Zuordnung algebr. Formen". Herr Rosanes betrachtet nur den Fall $i = n$ und nennt in diesem Falle die Formen für f und ψ „conjugirt". — S. auch Sturm, a. a. O.

abhängig, in einer so einfachen und eleganten Gestalt, dass sie wohl mitgetheilt zu werden verdient.

2. Aus der Vergleichung der Coefficienten der Form

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots \qquad (1)$$

mit den Coefficienten der Entwicklung

$$f = \mu_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^n + \cdots + \mu_i (x_1 - \alpha_i x_2)^n \qquad (2)$$

ergeben sich sofort die $n+1$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \mu_1 \alpha_1^k + \mu_2 \alpha_2^k + \cdots + \mu_i \alpha_i^k = (-1)^k a_k \\ (k = 0, 1, \cdots n) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Aus irgend i dieser Gleichung erhält man die Werthe der μ. Nehmen wir zuerst die i ersten dieser Gleichung um μ_1 zu berechnen, sodann die i Gleichungen von der 2ten an u. s. f., schliesslich die i letzten Gleichungen des Systems, so haben wir $n+2-i$ Systeme von je i Gleichungen, aus welchen wir ebensoviele Werthe für μ_1 finden. Die Vergleichung dieser Werthe liefert $n+1-i$ Relationen zwischen den Grössen $\alpha_1 \cdots \alpha_i$ und den Coefficienten a. Um diese zu berechnen, nehmen wir die i Gleichungen.

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 \alpha_1^k + \cdots + \mu_i \alpha_i^k + (-1)^{k+1} a_k = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_1 \alpha_1^{k+i-1} + \cdots + \mu_i \alpha_i^{k+i-1} + (-1)^{k+i} a_{k+i-1} = 0 \end{array}\right\},$$

woraus sich ergibt

$$\Delta \mu_1 = \frac{(-1)^{k+i}}{\alpha_1^k} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -a_k \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_i & +a_{k+1} \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_i^2 & -a_{k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_2^{i-1} & \alpha_3^{i-1} & \cdots & \alpha_i^{i-1} & (-1)^i a_{k+i-1} \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdot & \cdot & \alpha_i \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdot & \cdot & \alpha_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} & \cdot & \cdot & \alpha_i^{i-1} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Setzen wir in (5) $k+1$ statt k, setzen sodann die beiden Werthe von μ_1 einander gleich und entwickeln die beiden Determinanten nach den Coefficienten a, so erhalten wir

$$\alpha_1 (a_k \delta_{0,1} + a_{k+1} \delta_{1,1} + \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-1,1}) \tag{6}$$
$$+ a_{k+1} \delta_{0,1} + a_{k+2} \delta_{1,1} \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-2,1} + a_{k+i} \delta_{i-1,1} \quad 0$$

wenn man mit $\delta_{r,s}$ die Unterdeterminante von Δ bezeichnet, welche man erhält, wenn man in Δ die Reihe der r^{ten} Potenzen und die Vertikalreihe mit der Wurzel α_s streicht. Nun ergibt sich unschwer die Formel

$$\delta_{r,s} = \delta_{i-1,s} \cdot \pi^{(s)}_{i-1-r}, \tag{7}$$

wo $\pi^{(s)}_{i-1-r}$ die Summe der Combinationen aller Wurzeln α mit Auschluss von a_s zu je $i-r-1$ bezeichnet. Die Grösse $\delta_{i-1,s}$ aber ist, wie man aus ihrer Determinantenform sofort ersieht, das Product sämmtlicher Differenzen der Wurzeln α mit Ausschluss von α_s mit einem gewissen Zeichen behaftet, nämlich

$$(-1)^{i+s} \cdot \delta_{i-1,s} = \frac{\Delta}{(\alpha_s - \alpha_1)(\alpha_s - \alpha_2) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)}. \tag{8}$$

Ersetzt man nun in (6) die Grössen $\delta_{r,1}$ durch ihre Werthe aus (7), so verwandelt sie sich in folgende Gleichung

$$a_k \cdot \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_i + a_{k+1} \Sigma \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} + \cdots$$
$$+ a_{k+i-1} \Sigma \alpha_1 + a_{k+1} = 0 \tag{9}$$

wo die Σ symmetrische Funktionen sämmtlicher Wurzeln α (α_1 einbegriffen) sind. Die Symmetrie der Gleichung in Be-

zug auf sämmtliche Grössen α zeigt, dass wir immer dieselbe Gleichung erhalten würden, wenn wir zur Berechnung statt μ_1 irgend ein anderes μ benützen würden. Wir haben also nur diese Relation zwischen den a und den α; dieselbe zählt aber für $n+1-i$ Relationen, da sie für jedes k von $k=0$ bis $k=n-i$ gilt.

Ist

$$\psi = b_0 x_1^i + \binom{i}{1} b_1 x_1^{i-1} x_2 + \cdots = 0 \qquad (10)$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Grössen $\alpha_1 \cdots \alpha_i$ sind, so geht die Relation (9) über in

$$a_k b_i - \binom{i}{1} a_{k+1} b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2} b_{i-2} - \cdots \pm a_{k+i} b_0 = 0 \qquad (11)$$
$$(k = 0, 1, \cdots n-i.)$$

Damit ist aber der Beweis geliefert, dass die Covariante V verschwinden, d. h. ψ zu f apolar sein muss.

Was nun aber die Coefficienten μ in der Entwicklung (2) betrifft, so ist μ_s durch die Gleichung (4) gegeben, wenn wir statt der Reihe der Potenzen von α_1 die Reihe der Potenzen von α_s weglassen und den Faktor $(-1)^{s-1}$ beifügen. Die Die Entwicklung der Determinanten liefert sodann

$$\Delta \mu_s = \frac{(-1)^{k+s-1}}{\alpha_s^k} (a_k \delta_{0,s} + a_{k+1} \delta_{1,s} + \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-1,s})$$

oder wenn wir die $\delta_{r,s}$ durch ihre Werthe aus (7) und (8) ersetzen,

$$\mu_s = \frac{(-1)^{k+i-1}}{\alpha_s^k} \cdot \frac{a_{k+i-1} + \pi_1^{(s)} a_{k+i-2} + \cdots + \pi_{i-1}^{(s)} a_k}{(\alpha_s - \alpha_1)(\alpha_s - \alpha_2) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)} \qquad (12)$$

Aus diesem Ausdruck für μ_s können wir aber alle α ausser α_s mit Hilfe der Funktion ψ entfernen. Denn es ist, wenn ψ' die Abgeleitete von $\psi(x)$ bezeichnet

$$\psi'(\alpha_s) = b_0 (\alpha_s - \alpha_1) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)$$

Setzen wir ferner (13)

$$\frac{\psi}{x_1 - \alpha_s x_2} = b_0 x_1^{i-1} + \binom{i-1}{1} b_1^{(s)} x_1^{i-2} x_2 + \cdots + b_{i-1}^{(s)} x_2^{i-1},$$

so ist $\binom{i-1}{1}\frac{b_1^{(s)}}{b_0} = -n_1^{(s)}$ u. s. f. und der Ausdruck für μ_s nimmt die Form an

$$\mu_s = \frac{(-1)^{k+i-1}}{\alpha_s^k \cdot \psi'(\alpha_s)} \cdot \left(b_0 a_{k+i-1} - \binom{i-1}{1} b_1^{(s)} a_{k+i-2} + \cdots + b_{i-1}^{(s)} a_k\right) \quad (14)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n-i+1).$$

Da die Coefficienten b nur von den a abhängen, aber die α nicht enthalten, so enthalten die $b^{(s)}$ nur die eine Wurzel $\alpha_\varkappa$ und man ersieht mithin, dass sich die Grössen μ immer so bestimmen lassen, dass der Coefficient μ_s, der in der Entwicklung nach Potenzen $(x_1 - \alpha_s x_2)^n$ multiplicirt, nur α_s enthält.[1])

3. Wenden wir nun diese allgemeinen Formeln an auf die Entwicklung einer Form vom Grade $2n$

$$f = a_0 x_1^{2n} + \binom{2n}{1} x_1^{2n-1} x_2 + \cdots + a_{2n} x_2^{2n} \quad (1)$$

in eine Summe von $n+1$ Potenzen.

Die apolare Form

$$\psi = b_0 x_1^{n+1} + \binom{n+1}{1} b_1 x_1^n x_2 + \cdots \quad (2)$$

ist in diesem Falle nicht vollständig bestimmt, da das Gleichungsystem (11) $n^0 2$ nur $2n-(n+1)=n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+1$ Coefficienten b liefert. Wir könnten aus diesem System die b in der Form $p\lambda + q\lambda'$, $p_1\lambda + q_1\lambda'$,

1) Man ersieht übrigens auch, dass $\psi = 0$ keine gleichen Wurzeln enthalten darf, wenn die Entwicklung möglich sein soll.

u. s. f. berechnen, wo λ, λ' unbestimmte Grössen, und es bliebe sodann die willkürliche Grösse $\frac{\lambda}{\lambda'}$ in den Werthen der Wurzeln α und der Grössen μ. Oder auch, wir könnten zu dem System (11) noch eine beliebige lineäre Gleichung

$$a'_0 b_{n+1} + a'_1 b_n + \cdots + a'_{n+1} b_0 = 0$$

hinzufügen. Sind hier die a' gegebene Zahlen, so bliebe nichts Unbestimmtes mehr in den b und wir würden eine spezielle Entwicklung erhalten. Lassen wir aber die a' unbestimmt, so würden diese in die b eingehen, ohne dass jedoch eine grössere Allgemeinheit in der Entwicklung dadurch erzielt würde, als im ersten Falle, wenn wir keine weitere Gleichung zu Hülfe nehmen. Zweckmässiger wird es jedoch bei dieser Unbestimmtheit der Coefficienten b sein, eine Wurzel α der Gleichung $\psi = 0$ als willkürlich gegeben anzusehen. Dann muss sich eine Gleichung aufstellen lassen, welche mittelst dieser Wurzel die n übrigen Wurzeln α bestimmt und mithin nur noch vom n^{ten} Grade ist. Diese Gleichung ergiebt sich auf folgende Weise.

Nach Gleichung (14) oder (12) haben wir für μ_s das System von Gleichungen

$$(-1)^{k+n} \cdot \alpha_s^k \psi'(\alpha_s) \mu_s = a_{k+n} + x_1^{(s)} a_{k+n-1} + \cdots + x_n^{(s)} a_k \qquad (3)$$
$$(k = 0, 1, \cdots n)$$

wo der Kürze wegen ψ statt $\frac{1}{b_0}\psi$ gesetzt ist, also

$$\psi'(\alpha_s) = (\alpha_s - \alpha_1) \cdots (\alpha_s - \alpha_{s+1})(\alpha_s - \alpha_{s+1}) \cdots (\alpha_s - \alpha_n). \qquad (4)$$

Die Elimination der n Grössen x aus diesem System liefert

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} & \alpha_s^n \end{vmatrix} \cdot (-1)^n \psi'(\alpha_s) \mu_s = 0$$

Setzen wir

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} = J, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & \cdots & & a_{2n-1} & \pm\alpha_s^n \end{vmatrix} = A_s \qquad (5)$$

so ist mithin

$$(-1)^n \mu_s = \frac{J}{A_s \psi'(\alpha_s)}. \qquad (6)$$

Nun ist ferner $\psi' x = 0$ die Gleichung, welche die sämmtlichen α mit Ausnahme von α_s zu Wurzeln hat. Also ist

$$\psi'(x) = x^n - \pi_1^{(s)} x^{n-1} + \pi_2^{(s)} x^{n-2} \ldots \cdots \pm \pi_n^{(s)} = 0 \qquad (7)$$

die Gleichung dieser Wurzeln. Nehmen wir diese Gleichung, zu dem System (3) hinzu und eliminiren aus den $n+2$ Gleichungen zugleich die π und ψ', so erhält man die gesuchte Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & +x^2 & \cdots & +x^n & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} & \alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} & \pm\alpha_s^n \end{vmatrix} = 0, \qquad (8)$$

welche, wenn α_s gegeben die n übrigen Wurzeln α gibt. Der Coefficient der höchsten Potenz x^n in dieser Gleichung ist A_s. Also ist diese Determinante in (8), wie aus (7) zu ersehen $= A_s \psi'(x)$. Der Nenner von μ_s in (6) ist also das, was diese Determinante wird, wenn man darin α_s statt x setzt. Also

$$(-1)^n \mu_s = \frac{J}{H(\alpha_s)}, \qquad (9)$$

wo

$$H(\alpha_s) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_s + \alpha_s^2 & \cdot\cdot \pm \alpha_s^n & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \cdot\cdot & a_n & 1 \\ a_1 & a_1 & a_3 \cdot\cdot & a_{n-1} & -\alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} \cdot\cdot & a_{2n} & \pm \alpha_s^n \end{vmatrix} \tag{10}$$

und die Entwicklung von f ist mithin

$$(-1)^n \cdot f = \tag{11}$$

$$J \left\{ \frac{(x_1 - \alpha_1 x_2)^{2n}}{H(\alpha_1)} + \frac{(x_1 - \alpha_2 x_2)^{2n}}{H(\alpha_2)} + \cdots + \frac{(x_1 - \alpha_{n+1} x_2)^{2n}}{H(\alpha_{n+1})} \right\}$$

Die Determinanten die zu dieser Entwicklung dienen, sind bekannte Covarianten, resp. Invarianten von f. J ist die bekannte Invariante $n+1^{\text{ten}}$ Grads, welche symbolisch, wenn

$$f = b_x^{2n} = c_x^{2n} = \cdots = g_x^{2n} = h_x^{2n},$$

durch die Formel dargestellt wird,

$$J = (bc)^2 (bd)^2 \cdots (gh)^2. \tag{12}$$

H ist eine Covariante $C_{2n,n}$ von der Ordnung $2n$ und vom Grade n in den Coefficienten. Sie ist die Evektante der Invariante J_{n+1} und stellt sich mithin symbolisch in der Form dar

$$H = (cd)^2 \cdots (gh)^2 c_x^2 d_x^2 \cdots h_x^2 \tag{13}$$

Diese Covariante lässt sich auch schreiben, wenn C ein Zahlenfaktor,

$$H = C. \begin{vmatrix} \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-2}} & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-3} dx_2} & \cdot\cdot & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} \\ \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-3} dx_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} & \cdot & \cdot & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_2^{2n-2}} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Ist f eine biquadratische Form, so ist H die Hesse'sche Covariante.

Die Determinante (8), welche die Wurzeln α liefert, wenn a_s gegeben, ist eine Covariante vom n^{ten} Grad in den x, und in den α und auch vom n^{ten} Grad in den a. Sie ist, wie sich aus den folgenden n^0 4 ergeben wird, die apolare Form n^{ter} Ordnung von der Polaren von α in Bezug auf f, also geradezu die Sylvester'sche Canonisante dieser ungeraden Form $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grads. Sie kann auch, wenn (α, f) die Polare von α bezeichnet, in der Form geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{2n-2}} & \dfrac{d^{2n-2}(\alpha f)}{d_1 x_1^{2n-3}\, dx_2} & \cdots & \dfrac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{n-1}\, dx_2^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d^{2n-2}\cdot(\alpha f)}{dx_1^{n-1}\, dx_2^{n-2}} & \cdot & \cdot & \dfrac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_2^{2n-2}} \end{vmatrix} \qquad (15)$$

Der symbolische Ausdruck derselben ist

$$(cd)^2 \cdot\cdot (gh)^2 c_\alpha d_\alpha \cdot\cdot h_\alpha \cdot c_x d_x \cdot\cdot h_x \cdot$$

Hier mögen ein paar Beispiele einer solchen Entwicklung folgen:

1) Sei $f = (x^2-1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{5},\ a_3 = 0,\ a_4 = +\frac{1}{5},\ a_5 = 0,\ a_6 = -1$$

Hiemit berechnet sich

$$J = \frac{4^2}{5^4}$$

Gleichung (8) wird

$$\frac{4}{5^3}\left\{(\alpha+\alpha^3)x^3 - (1+5\alpha^2)x^2 + (5\alpha+\alpha^3)x - (1+\alpha^2)\right\} = 0$$

Auf der linken Seite $x = \alpha$ gesetzt, gibt

$$H(\alpha) = \frac{4}{5^3}(\alpha^2-1)^3,$$

also H nur um einen constanten Faktor von f verschieden, analog wie bei biquadratischen Formen, wenn f ein vollständiges Quadrat. Die Zerlegung ist daher

$$-f = \frac{4}{5}\left\{\frac{(x-\alpha_1)^6}{(\alpha_1^2-1)^3}+\frac{(x-\alpha_2)^6}{(\alpha_2^2-1)^3}+\frac{(x-\alpha_3)^6}{(\alpha_3^2-1)^3}+\frac{(x-\alpha_4)^6}{(\alpha_4^2-1)^3}\right\}.$$

Die Wurzel der obigen Gleichung 3ten Grads sind

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha},\ \left.\begin{matrix}\alpha_3\\ \alpha_4\end{matrix}\right\} = \frac{2\alpha \pm (1-\alpha^2)\sqrt{-1}}{1+\alpha^2}.$$

Einfacher würde die Formel, wenn man $\alpha = \frac{1+\beta}{1-\beta}$ setzt. Dann sind die 4 Wurzeln

$$\alpha_1 = \frac{1+\beta}{1-\beta},\ \alpha_2 = \frac{1-\beta}{1+\beta},\ \alpha_3 = \frac{1+\beta\sqrt{-1}}{1-\beta\sqrt{-1}},\ \alpha_4 = \frac{1-\beta\sqrt{-1}}{1+\beta\sqrt{-1}},$$

wo nun β beliebig bleibt.

2) Sei $f = 6xy(x^4+y^4)$.

$a_1 = a_5 = 1,\ a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = 0$, also $J = 1$.

Die Gleichung (8) wird

$$\alpha + x + \alpha^3 x^2 + \alpha^2 x^3 = 0,$$

deren Wurzeln $\alpha_2 = -\alpha,\ \alpha_3 = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{-1},\ \alpha_4 = \frac{1}{\alpha}\sqrt{-1}$.

Die linke Seite der Gleichung gibt, wenn α statt x gesetzt wird.

$$H(\alpha) = 2\alpha(1+\alpha^4).$$

Hiermit ist

$$-f=\frac{(x-\alpha)^6}{2\alpha(1+\alpha^4)}-\frac{(x+\alpha)^6}{2\alpha(1+\alpha^4)}$$

$$+\frac{(\alpha x-\sqrt{-1})^6}{2\alpha(1+\alpha^4)\sqrt{-1}}-\frac{(\alpha x+\sqrt{-1})^6}{2\alpha(1+\alpha^4)\sqrt{-1}}$$

Hätten wir entsprechend der Bemerkung am Anfang von $n^0\,3$ die apolare Form ψ vom 4ten Grad berechnet, indem wir zu den drei Bedingungsgleichungen (11) $n^0\,2$, welchen die Coefficienten b genügen müssen, noch eine Gleichung $a_0' b_4+\cdots+a_4' b_0=0$ mit beliebigen Coefficienten a' hinzunehmen, so hätte man erhalten

$$\psi=-a_2'-x^2(a_4'-a_0')+a_2' x^2=0,$$

oder $\frac{a_4'-a_0'}{a_2'}=k$ gesetzt, $x^4-kx^2-1=0$, deren Wurzeln

$$x=\pm\sqrt{k\pm\sqrt{k^2+1}}\quad\text{(wo } k \text{ willkürlich)}.$$

Irgend eine dieser Wurzeln statt α in Gleichung (8) eingesetzt, liefert die drei andern. Denn für

$$\alpha=+\sqrt{k+\sqrt{k^2+1}}\ \text{ ist }\ \alpha_2=-\alpha,\ \left.\begin{matrix}\alpha_3\\ \alpha_4\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{k-\sqrt{k^2+1}}$$

$\frac{\pm 1}{\alpha}\sqrt{-1}$, übereinstimmend mit obigem.

4. Herr **Sturm** hat in der angeführten Abhandlung[1]) den Satz gegeben: „Multiplicirt man eine Form V_i mit ihrer Polaren W_{n-i} bezüglich U_n, so erhält man, sobald $n-i$ ungerade ist, eine zu U_n apolare Form n^{ten} Grads." Dieser Satz ist indessen nur ein spezieller Fall von folgendem: Ist ψ_i apolar zu f_n und φ_k stellt k Punkte der apolaren Gruppe ψ_i dar, sodass $\psi_i=\varphi_k\cdot\psi_{i-k}$, wo ψ_{i-k} eine Form $(i-k)^{\text{ten}}$ Grades ist, so muss ψ_{i-k} apolar sein zu der Polaren von φ_k bezüglich

1) Crelle's Journ. 86. p. 119.

f_n, oder, nach der früher gebrauchten Bezeichnung, zu (φ_k, f_n). Dies folgt sofort aus der Theorie der Polaren oder der harmonischen Mittelpunkte.

Ist $i = n$, also $\psi_n = \varphi_k \cdot \psi_{n-k}$, so muss demnach ψ_{n-k} apolar sein zu (φ_k, f_n) und wenn $n - k$ ungerade, so kann man für ψ_{n-k} diese Polare (φ_k, f_n) selbst nehmen, da eine ungerade Form zu sich selbst apolar ist.[1]) Dies ist der Satz von Herrn Sturm.

Aus dem allgemeinen Satze ergiebt sich nun aber sofort, was oben (n^0 3) von der Determinante (8), aus welcher die Wurzeln α sich bestimmen, gesagt wurde. Denn ist ψ_{n+1} apolar zu f_{2n} und ψ_{n+1} zerlegt sich in $\varphi_1 \cdot \psi_n$, so muss ψ_n apolar sein zu der Polare $(\varphi_1 \cdot f_{2n})$. Aber diese ungerade Form $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grads hat nur eine apolare Form n^{ten} Grads, nämlich die „Canonisante" von Sylvester, und folglich muss ψ_n eben die Canonisante von $(\varphi_1 \cdot f_{2n})$ sein; also auch die Determinante (8) nach dortiger Bezeichnung die Canonisante von (αf). Von diesen Betrachtungen ausgehend, hätte man direkt zu der Gleichung (8) gelangen können, hätte aber dabei nichts gewonnen für die Bestimmung der Coefficienten μ.

5. Es ist bekannt, dass wenn die Invariante J verschwindet, die Form f $2n^{\text{ten}}$ Grads sich in eine Summe von nur n Potenzen zerlegen lässt. In diesem Falle $J = 0$ verschwindet in der That in der Entwicklung (11) der Coefficient μ_s, welcher zu der beliebigen Wurzel α_s gehört. Die andern Coefficienten μ aber verschwinden im Allgemeinen nicht. Verschwindet nämlich μ_s, so wird das System der $(n+1)$ Gleichungen (3) n^0 3.

$$0 = a_{k+n} + \pi_1^{(s)} a_{k+n-1} + \cdots + \pi_n^{(s)} a_k,$$
$$(k = 0, 1 \cdots n)$$

1) Rosanes „Ueber ein Princip der Zuordnung etc." Crelle's Journ. 76.

deren Determinante $J = 0$ ist. Lässt man eine dieser Gleichungen, z. B. die letzte, als durch die andere bestimmt, weg und nimmt die Gleichung (7) hinzu, so erhält man für die Gleichung, welche die n übrigen α gibt

$$\begin{vmatrix} 1 - & x + & x^2 \cdots & + x^n \\ a_0 & a_1 & a_2 \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (17)$$

Die willkürliche Grösse α_n hebt sich ganz aus der Potenzdarstellung heraus. Die Determinante in (17) ist aber nichts anderes als die mit A_s bezeichnete Determinante (5), wenn man darin α_s durch x ersetzt. Für jede der n Wurzeln α_i dieser Gleichung verschwindet mithin die Grösse A_i im Nenner des Ausdrucks für μ (6) und alle Coefficienten μ ausser μ_n, welches $= 0$ wird, nehmen die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Dieselben müssen sodann aus den ursprünglichen Gleichungen direkt berechnet werden, aber die Einfachheit ihres Ausdrucks geht verloren.

6. Ist speziell f eine biquadratische Form

$$f = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 \quad (1)$$

und ψ die apolare 3[ten] Grads

$$\psi = b_0 x_1^3 + 3 b_1 x_1^2 x_2 + 3 b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3, \qquad (2)$$

so hat man die zwei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_0 b_3 - 3 a_1 b_2 + 3 a_2 b_1 - a_3 b_0 &= 0 \\ a_1 b_3 - 3 a_2 b_2 + 3 a_3 b_1 - a_4 b_0 &= 0 . \end{aligned} \qquad (3)$$

Ist nun φ eine zweite biquadratische Form

$$\varphi = a_0' x_1^4 + 4 a_1' x_1^3 x_2 + \cdots \qquad (4)$$

und soll dieselbe Form ψ auch apolar sein zu φ, so hat man die zwei weiteren Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a'_0 b_3 - 3a'_1 b_2 + 3a'_2 b_0 - a'_3 b_0 &= 0 \\ a'_1 b_3 - 3a'_2 b_2 + 3a'_3 b_0 - a'_4 b_0 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

und es ist mithin die Bedingung, dass die zwei Formen dieselbe apolare Form 3ten Grads besitzen,

$$D_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Ist diese Bedingung[1]) erfüllt, so kann man zur Bildung der apolaren Form irgend drei der vier Gleichungen (3) und (5) benützen; also

$$\psi = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & -x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

und es werden dann die beiden Formen f und φ nach den Potenzen der Linearfaktoren von ψ entwickelt werden können und ebenso überhaupt alle Formen $f + \lambda\varphi$.

Um die Coefficienten μ der Entwicklung für die ein und die andere Form zu bestimmen, wird man auf die Formeln in n^0 2 zurückgehen. Ist z. B. gegeben

$$\begin{aligned} f &= (x_1 + x_2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 \\ \varphi &= 4x_1^3 x_2 + 18 x_1^2 x_2^2 + 12 x_1 x_2^3 + 9 x_2^4. \end{aligned}$$

1) Die Combinante $D_{f,\varphi}$ lässt sich leicht in die symbolische Form überführen. Ist $f = a_x^4 = b_x^4$, $\varphi = \alpha_x^4 = \beta_x^4$, so erhält man

$$4 D_{f,\varphi} = (ab)^2 (\alpha\beta)^2 (a\alpha)(a\beta)(b\alpha)(b\beta).$$

so ist die Bedingungsgleichung (6) erfüllt, da $D_{f,\varphi} = 0$ wird. Die apolare Form (7) wird

$$\psi = -3x + x^3,$$

deren Wurzeln $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = +\sqrt{3}$, $\alpha_3 = -\sqrt{3}$.

Ferner wird für f die Gleichung (8) (n^0 3)

$$\frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{8}{3}\alpha x + \left(\alpha^2 - \frac{1}{3}\right)x^2\right\} = 0$$

Setzt man in diese Gleichung für α irgend eine der drei Wurzeln $0, \pm\sqrt{3}$ ein, so liefert sie die beiden andern. Die Covariante H (hier die Hesse'sche Form) wird

$$H(\alpha) = \frac{1}{3}(\alpha^2 + 1)^2.$$

Da ferner $J_3 = \frac{8}{27}$, so erhält man für die speziellen Werthe der α die Entwicklung

$$18f = 16x^4 + (x - \sqrt{3})^4 + (x + \sqrt{3})^4.$$

Für φ aber ist $J_3 = -18$, die Gleichung (8) (n^0 3)

$$-6\alpha^2 + 18 - 3(\alpha^2 + 3\alpha)x - (\alpha^2 + 3\alpha + 6)x^2 = 0$$

Ist α eine der drei Wurzeln $0, \pm\sqrt{3}$, so gibt die Gleichung die beiden andern. Hieraus (α statt x gesetzt)

$$H(\alpha) = -(\alpha^4 + 6\alpha^3 + 21\alpha^2 - 18);$$

also

$H(0) = 18$, $H(\sqrt{3}) = -18(3 + \sqrt{3})$, $H(-\sqrt{3}) = -18(3 - \sqrt{3})$

und die Entwicklung wird

$$\varphi = -x^4 + \frac{(x - \sqrt{3})^4}{3 + \sqrt{3}} + \frac{(x + \sqrt{3})^4}{3 - \sqrt{3}}.$$

7. Eine biquadratische Form f und ihre Hesse'sche

Form $H(f)$ können jedoch nie nach denselben drei Potenzen enwickelt werden.

Denn ist

$$\varphi = H(f) = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + 2 (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1^3 x_2 + \cdots$$

und bezeichnet man durch $a_0', a_1', \cdots$ die Coefficienten von H mit Binomialcoefficienten geschrieben, also

$$a_0' = a_0 a_2 - a_1^2, a_1' = \frac{1}{2} (a_0 a_3 - a_1 a_2), \text{ u. s. f., so wird}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \end{vmatrix} = \frac{1}{36} (I_2^3 - 27 J_3^2) = \frac{1}{36} \Delta,$$

wo I_2 die quadratische Invariante, J_3 die Invariante 3[ten] Grads, nämlich

$$I_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \quad J_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

also Δ die Discriminante von f ist. Dies lässt sich leicht mittelst der canonischen Form von f verificiren. Das Verschwinden der Invariante $D_{f,\varphi}$ bedingt mithin, dass f eine Doppelwurzel hat. Der Doppelfaktor von f ist dann auch Doppelfaktor von H[1]). Berechnet man sodann die apolare Form ψ (7) von f und H, so ergibt sich, dass ψ geradezu die dritte Potenz desselben Faktors ist. Die Nenner der Coefficienten μ der Darstellung von f als Potenzsumme verschwinden in diesem Falle und die Entwicklung wird unmöglich.

1) Clebsch, „Binäre Formen" S. 162.

Sitzung vom 6. Februar 1892.

1. Herr A. v. Baeyer hält einen längeren Vortrag über seine in den letzten Jahren angestellten Untersuchungen „über die Reduktion der Benzolcarbonsäure". Dieselben gelangen anderwärts zur Veröffentlichung.

2. Herr C. v. Voit theilt die Resultate einer in seinem Laboratorium von Herrn Prof. J. Tsuboi aus Japan ausgeführten Untersuchung „über den Einfluss verschiedener Nahrungsmittel auf den Wassergehalt der Organe und den Hämaglobingehalt des Blutes" mit.

Ueber den Einfluss verschiedener Nahrungsmittel auf den Wassergehalt der Organe und den Hämaglobingehalt des Blutes.

Von Carl Voit.

(Eingelaufen 8. Februar.)

Schon vor mehr als dreissig Jahren habe ich die Beobachtung gemacht, dass ein Hund bei ausschliesslicher Fütterung mit Brod täglich Eiweiss von seinem Körper verliert, aber nicht entsprechend an Gewicht abnimmt; er musste daher bei dieser ungenügenden Nahrung Wasser angesetzt haben. Als das Thier darnach reichlich Fleisch erhielt, setzte es Eiweiss an und gab, unter Abnahme des Körpergewichtes, das vorher aufgespeicherte Wasser im Harn wieder ab. Diese Zurückhaltung von Wasser im Körper bei Fütte-

rung mit Brod haben später Pettenkofer und ich auch durch Respirationsversuche bestätigt.

Um die wichtige Thatsache, dass der Organismus bei der unvollkommenen Ernährung mit Brod wässriger wird, direkt darzuthun, habe ich damals zwei Katzen während längerer Zeit mit Brod gefüttert, einer dritten aber das gewöhnliche aus animalischen und vegetabilischen Nahrungsmitteln gemischte Futter verabreicht; die beiden ersteren enthielten darnach in der That im Muskel 2—5 %, im Gehirn 3—5 % Wasser mehr als die letztere.

Elf Jahre darauf wendete Herr V. Subbotin in meinem Laboratorium die damals von Preyer angegebene Methode der Bestimmung des Hämaglobins im Blute an, um bei verschiedener Nahrung den Gehalt an Hämaglobin im Blute von Kaninchen und Hunden zu ermitteln. Es zeigten sich dabei je nach der Art der Nahrung beträchtliche Unterschiede. Auch nach langem Hunger fand sich die gleiche Hämaglobinmenge wie bei der reichlichsten und besten Nahrung; anders jedoch gestaltete es sich bei ungenügender Nahrung. Die Kaninchen hatten bei Fütterung mit Heu die geringste Menge von Hämaglobin, etwas mehr bei Fütterung mit Kartoffeln oder mit Rüben und Kohl, am meisten bei Fütterung mit Brod; darnach schien der Hämaglobingehalt mit dem Eiweiss der Nahrung zuzunehmen. Beim Hunde trat der Einfluss der Art der Nahrung noch deutlicher hervor; nach Aufnahme von Fleisch oder von eiweissreichem Futter war die Hämaglobinmenge wesentlich höher als bei Zufuhr von viel stickstoffarmen Substanzen, besonders von Brod. Eine eiweissarme oder an stickstofffreien Stoffen, namentlich an Stärkemehl, reiche Nahrung bewirkt eine Abnahme des Hämaglobingehaltes, also diejenigen Nahrungsmittel, welche ein Wässrigwerden des ganzen Körpers hervorrufen.

Obwohl ich diese Dinge für völlig sichergestellt halte, so hatte ich doch Veranlassung, dieselben nochmals zu prüfen.

Ich bat daher Herrn Prof. J. Tsuboi aus Japan, der in meinem Laboratorium arbeitete, die diesbezüglichen Versuche anzustellen und an dem gleichen Thiere den Wassergehalt der Organe und die Hämaglobinmenge des Blutes zu ermitteln. Die letztere Bestimmung geschah mittelst des Vierordt'schen Verfahrens auf spektroscopischem Wege.

Zunächst wurden Versuche an drei Kaninchen angestellt. Eines (Nr. a) wurde mit Milch und Semmel unter Zusatz von etwas Heu gefüttert, ein zweites (Nr. b) mit viel Heu, ein drittes (Nr. c) mit Kartoffeln. Nr. a enthielt im Muskel 25,5 %, im Blut 20,0 % feste Theile und 11,58 % Hämaglobin; Nr. b im Muskel 19,9 %, im Blut 17,0 % feste Theile und 11,27 % Hämaglobin; Nr. c im Muskel 22,5 %, im Blute 14,4 % feste Theile und 7,94 % Hämaglobin. Bei der Aufnahme von Kartoffeln ist also die prozentige Hämaglobinmenge im Blute, sowie die prozentige Menge der festen Theile im Muskel und Blut wesentlich geringer als bei Aufnahme von Milch und Semmel.

Schlagend war das Resultat der Versuche mit zwei Katzen, von denen die eine (Nr. a) Fleisch mit Speck, die andere (Nr. b) Semmel mit etwas Fleischextrakt bekam. Die Katze Nr. a enthielt im Muskel 25,6 %, im Blut 19,9 % feste Theile und 10,97 % Hämaglobin; die Katze Nr. b im Muskel 23,9 %, im Blut 14,8 % feste Theile und 6,82 % Hämaglobin.

Zuletzt wurden noch drei Kaninchen mit Kartoffeln ernährt und dem einen (Nr. a) täglich 5 mg Ferrum reductum dazu gegeben, dem anderen (Nr. b) 15 ccm Blut, dem dritten (Nr. c) 30 ccm Blutserum. Bei dem Kaninchen Nr. a fanden sich im Muskel 17,7 %, im Blut 10,2 % feste Theile und 7,51 % Hämaglobin; bei dem Kaninchen Nr. b im Muskel 21,6 %, im Blut 11,5 % feste Theile und 7,27 % Hämaglobin; bei dem Kaninchen Nr. c im Muskel 23,2 %, im Blut 14,6 % feste Theile und 9,46 % Hämaglobin.

Die näheren Angaben über die Quantitäten der verzehrten und resorbirten Nahrungsstoffe, sowie über die Gewichtsverhältnisse der Thiere sollen mit eingehenden Betrachtungen in der Zeitschrift für Biologie zur Veröffentlichung gelangen.

Aus den berichteten Versuchen geht abermals hervor, dass die Zusammensetzung der Nahrung einen wesentlichen Einfluss auf den Wassergehalt der Organe und des Blutes und in Folge davon auch auf den Hämaglobingehalt des letzteren ausübt; denn der grössere Wassergehalt des ganzen Körpers und des Blutes und der geringere Hämaglobingehalt des letzteren stehen offenbar in Zusammenhang mit einander.

Es ist selbstverständlich nicht die Menge der Nahrung für sich allein oder der Eiweissgehalt derselben für sich allein das bestimmende hiefür, denn sonst müsste beim Hunger wo gar keine Nahrung und gar kein Eiweiss aufgenommen wird, die Hämaglobinmenge am geringsten sein, während wir doch selbst zuerst dargethan haben, dass dieselbe dabei so gross ist wie bei einer vorzüglichen Nahrung. Es ist vielmehr die ungenügende Zusammensetzung der Nahrung, die zu geringe Menge von Eiweiss zugleich mit einem Ueberschuss an Stärkemehl, wie schon Subbotin andeutete, was den schädigenden Effekt hervorbringt. Wenn der Körper des Kaninchens nach Aufnahme gewisser pflanzlicher Nahrungsmittel wässriger wird und das Blut weniger Hämaglobin enthält als bei vollständigem Hunger, so kann doch nur die Zusammensetzung der Nahrung die Ursache sein.

Ich lege Werth auf diese Thatsache, da es mir durchaus nicht gleichgiltig erscheint, ob die denkbar beste Nahrung den menschlichen Körper in demselben stofflichen Zustande zurücklässt wie die schlechtest zusammengesetzte z. B. aus einem Uebermaass von Kartoffeln bestehende. Dass dies auch ganz unmöglich ist, geht schon aus dem schlechten Aussehen einer fast ausschliesslich von Kartoffeln sich nährenden Bevölkerung gegenüber einer sich reichlich ernährenden hervor.

Sitzung vom 5. März 1892.

1. Herr Hugo Seeliger legt eine Abhandlung des correspondirenden Mitgliedes der Akademie, Herrn Prof. Jac. Lüroth in Freiburg, vor: „über die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen."

2. Herr Ludwig Boltzmann spricht: „über das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten."

3. Herr Leonhard Sohncke macht Mittheilung über eine in seinem Laboratorium ausgeführte Untersuchung des Herrn Dr. R. Emden: „über den Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen."

4. Herr Gustav Bauer bespricht die Resultate einer ihm von Herrn Dr. Hermann Brunn, Privatdozenten an der hiesigen Universität, übergebenen Arbeit; „über Verkettungen."

5. Herr Walter Dyck bringt eine Fortsetzung seiner Untersuchungen: „über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme (zweite Mittheilung)."

6. Herr Wilhelm v. Gümbel bespricht und überreicht: „Geologische Bemerkungen über die warme Quelle des Brennerbads und seine Umgebung."



Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen.

Von J. Lüroth in Freiburg i. Br.

(Eingelaufen 5. März.)

§ 1. Eine Betrachtung, die sich an die Berechnung einer Landesvermessung anschliesst und von der unten in § 16 noch weiter die Rede sein wird, legte mir die Behandlung der folgenden Aufgabe nahe.

Gegeben sind zwei stetige Flächenstücke F und F'. Durch jeden ihrer Punkte sei eine Linie, die Lothlinie des fraglichen Punktes gezogen. Der Punkt, zu dem die Lothlinie gehört, heisse der Fusspunkt der Lothlinie. Eine Ebene durch die Lothlinie eines Punktes werde Verticalebene dieses Punktes genannt.

Keine Lothlinie, weder von F noch von F' liege in der betreffenden Fläche. Die Richtung der Lothlinien von F und F' ändere sich stetig mit dem Fusspunkt.

Es sei weiter eine Abbildung $\mathfrak{A}$ gegeben, welche die Fläche F auf die F' so abbildet, dass deren Punkte sich gegenseitig eindeutig entsprechen. Damit ist dann auch ein Entsprechen der Lothlinien gegeben, indem zwei Lothlinien entsprechend heissen sollen, wenn ihre Fusspunkte durch $\mathfrak{A}$ sich zugeordnet sind.

Sind nun $A\,B\,C\,D\,E\ldots$ Punkte von F, $A'\,B'\,C'\,D'\,E'\ldots$ die entsprechenden Punkte von F', ist a die Loth-

linie in A, a' die in A', so soll endlich $\mathfrak{A}$ so beschaffen sein, dass die beiden Ebenenbüschel $a(B\,C\,D\,E\ldots)$ und $a'(B'\,C'\,D'\,E'\ldots)$ projectiv sind.

Die Beziehung

$$a(B\,C\,D\,E\ldots)\barwedge a'(B'\,C'\,D'\,E'\ldots)$$

soll gelten, wo auch die Punkte $A\,B\,C\,D\ldots$ auf F gelegen sein mögen.

Es soll die Natur der Abbildung $\mathfrak{A}$ bestimmt werden.

§ 2. Aus der projectiven Beziehung folgt sofort, dass wenn die Ebenen $a\,B$ und $a\,C$ zusammenfallen, auch die $a'\,B'$ und $a'\,C'$ identisch sein müssen und umgekehrt; also entsprechen Punkte von F, die irgend einer Verticalebene angehören, Punkten einer Verticalebene von F'. Vermöge $\mathfrak{A}$ kann in Folge dessen jetzt auch jeder Ebene ε, die in einem Punkte A von F Verticalebene ist, eine andere Ebene zugeordnet werden. Denn ist B ein Punkt der Schnittcurve von F und ε, entsprechen den Punkten A, B und der Lothlinie a in A, die Punkte A', B' und die Lothlinie a' in A', so kann man die Verticalebene $a'\,B'$ der $a\,B$ entsprechen lassen. Und diese Art der Zuordnung ist dann, dem eben gefundenen Resultate gemäss, nicht abhängig von der Wahl des Punktes B auf der Schnittcurve von ε mit F.

Gesetzt, es seien A und B zwei Punkte von F, deren Lothlinien a und b sich schneiden, sei es in einem endlichen oder in einem unendlich fernen Punkt. Sei C ein anderer Punkt von F in der Ebene $a\,b$. Weil B und C einer Verticalebene von A angehören, liegen B' und C' in einer Ebene durch a'. Und weil A und C auf einer Ebene durch b sich befinden, liegen A' und C' auf einer Ebene durch b'. Die drei Punkte $A'\,B'\,C'$ gehören folglich einer Ebene durch a' und einer durch b' an; liegen also $A'\,B'\,C'$ nicht in einer geraden Linie, so müssen jene beiden Ebenen zusammenfallen.

also a' und b' sich schneiden. Nehmen wir daher an, dass weder F noch F' gerade Linien enthalten, so folgt, dass wenn zwei Lothlinien von F sich schneiden, auch die entsprechenden von F' sich treffen.

§ 3. Für die weitere Untersuchung hat man nun verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Es ist erstens möglich, dass je zwei Lothlinien von F, und damit auch die von F', sich schneiden. Dann liegen die sämmtlichen Lothlinien von F entweder in einer Ebene oder sie gehen durch einen Punkt. Der erste Fall ist ausgeschlossen, weil er nur stattfinden könnte, wenn F selbst eine Ebene wäre, die die sämmtlichen Lothlinien enthielte, gegen unsere Voraussetzung, dass diese nicht in F liegen liegen sollen. Somit müssen alle Lothlinien von F durch einen Punkt A gehen und die von F' müssen durch einen Punkt A' gehen. A sei der eine Eckpunkt $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ eines homogenen Tetraedercoordinatensystems; die Kanten $x_1 = 0$ $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ mögen die Lothlinien der drei Punkte $C\,B\,A$ von F sein. Entsprechende Festsetzungen seien für F' getroffen, indem die Coordinaten mit $x'_1\, x'_2\, x'_3\, x'_4$ bezeichnet seien. Weil die beiden Büschel, deren Axen die Lothlinien $C\,A$ und $C'\,A'$ sind, projectiv bezogen sind, sind die Gleichungen von zwei sich entsprechenden Ebenen dieser Büschel

$$x_2 = \lambda\, x_1 \quad \text{und} \quad x'_2 = c\, \lambda\, x_1$$

Für einen Punkt von F und den entsprechenden von F' muss also

$$\frac{x'_2}{x'_1} = c\, \frac{x_2}{x_1}$$

sein. Ebenso findet man für jene Punkte die Gleichungen

$$\frac{x'_3}{x'_2} = a\, \frac{x_3}{x_2} \qquad \frac{x'_3}{x'_1} = b\, \frac{x_3}{x_2}$$

Diese Gleichungen definiren eine projective Beziehung der beiden Strahlenbündel A und A' aufeinander. Ueber die Natur der beiden Flächen F und F' aber lässt sich nichts weiter ausmachen. Ist F gegeben, so kann F' jedes beliebige Flächenstück sein, das von den Strahlen des Bündels A' in nur je einem Punkte getroffen wird. Wenn dann $\mathfrak{A}$ einem Punkte P von F denjenigen Punkt P' von F' zuordnet, welcher aus F' von dem Strahl ausgeschnitten wird, der im Bündel A' dem Strahl PA entspricht, so sind alle oben dem $\mathfrak{A}$ auferlegten Bedingungen erfüllt.

§ 4. Es kann aber zweitens der Fall sein, dass nicht je zwei Lothlinien sich schneiden. Dann kann man zwei Lothlinien a und b von F finden, die sich nicht treffen. Wir nehmen a zur Axe $x_1=0$ $x_2=0$, b zur Axe $x_3=0$ $x_4=0$ eines homogenen Systems von Tetraedercoordinaten, und die a, b entsprechenden Lothlinien a' und b' zu den Axen $x'_1=0$ $x'_2=0$ bezw. $x'_3=0$ $x'_4=0$ eines Systems der $x'_1\,x'_2\,x'_3\,x'_4$.

Wegen der projectiven Beziehung der Büschel mit den Axen a und a' muss der Ebene, deren Gleichung ist $x_2-\lambda x_1=0$ die Ebene $x'_2-\lambda p\,x'_1=0$ entsprechen. Für Punkte von F und ihre entsprechenden ist also

$$\frac{x'_2}{x'_1}=p\,\frac{x_2}{x_1}$$

was wir, $p=\dfrac{a_2}{a_1}$ gesetzt, in die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x'_1=l\,a_1\,x_1 \qquad x'_2=l\,a_2\,x_2 \\ \text{auflösen können.} \\ \text{Ganz ähnlich ergeben sich die Beziehungen} \\ x'_3=m\,a_3\,x_3 \qquad x'_4=m\,a_4\,x_4. \end{array}\right\}\;1)$$

Seien nun c und c' eine dritte, von a und b verschiedene, Lothlinie von F und ihre entsprechende von F'. Durch c legen wir die beiden von einander verschiedenen Vertical-

ebenen α, β und durch c' die α', β', die so gewählt seien, dass α' der α, β' der β entspricht. Die Gleichungen der Ebenen α' und β' seien bezw.

$$\alpha' \ldots . \; \alpha_1' x_1' + \alpha_2' x_2' + \alpha_3' x_3' + \alpha_4' x_4' = \alpha'(x') = 0$$

$$\beta' \ldots . \; \beta_1' x_1' + \beta_2' x_2' + \beta_3 x_3' + \beta_4' x_4' = \beta'(x') = 0,$$

die von α und β seien $\alpha(x) = 0$ $\beta(x) = 0$. Wegen der projectiven Beziehung der Büschel mit den Axen c und c' muss dann

$$\frac{\alpha'(x')}{\beta'(x')} = \frac{r}{s} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

sein. Setzt man hier die Werthe aus 1) ein und bezeichnet

$$\alpha_1' a_1 x_1 + \alpha_2' a_2 x_2 = A(x) \quad \alpha_3' a_3 x_3 + \alpha_4' a_4 x_4 = \mathcal{A}(x)$$

$$\beta_1' a_1 x_1 + \beta_2' a_2 x_2 = B(x) \quad \beta_3' a_3 x_3 + \beta_4' a_4 x_4 = \mathbf{B}(v)$$

so kommt

$$\frac{l\,A(x) + m\,\mathcal{A}(x)}{l\,B(x) + m\,\mathbf{B}(x)} = \frac{r}{s} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

$$l\,\{s\,A(x)\,\beta(x) - r\,\alpha(x)\,B(x)\} = m\,\{r\,\alpha(x)\,\mathbf{B}(x) - s\,\beta(x)\,\mathcal{A}(x)\}.$$

Mit Hilfe der Zeichen

$$2) \qquad \begin{aligned} S &= r\,\alpha(x)\,\mathbf{B}(x) - s\,\beta(x)\,\mathcal{A}(x) \\ T &= s\,A(x)\,\beta(x) - r\,\alpha(x)\,B(x) \end{aligned}$$

kann man also

$$l = \varrho S \qquad m = \varrho T$$

schreiben und findet dann in

$$\text{I.} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1' &= \varrho S x_1 \\ x_2' &= \varrho S x_2 \\ x_3' &= \varrho T x_3 \\ x_4' &= \varrho T x_4 \end{aligned} \right.$$

die Beziehung der Fläche F' auf F, wie sie durch die Abbildung $\mathfrak{A}$ gegeben ist. Diese Formeln sind aber auf Punkte

von F beschränkt. Sie stellen, allgemein betrachtet, eine birationale Raumtransformation vor, wie sie von Clifford, Cremona und Nöther untersucht worden sind, und zwar geben sie diejenige specielle Umformung, die Nöther auf Seite 570 seiner Arbeit im 3. Bande der Math. Annalen aufführt.

§ 5. Diese Formeln können illusorisch werden, wenn S oder T für die Punkte von F, oder gar identisch, verschwinden.

Wenn S identisch Null ist, so ist entweder $\mathfrak{A}(x) = 0$ $\mathfrak{B}(x) = 0$. Dann wären, weil a_3 und a_4 nicht Null sein können, α'_3, α'_4, β'_3, β'_4 alle Null und es enthielten die Functionen $\alpha'(x')$, $\beta'(x')$ nur x'_1 und x'_2, so dass c' mit a' zusammenfiele und dann auch c mit a. Oder es ist

$$\mathfrak{B}(x) = \frac{s}{r} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \mathfrak{A}(x)$$

also, weil $\beta(x)$ zu $\alpha(x)$ prim ist, $\mathfrak{A}(x)$ durch $\alpha(x)$ theilbar, $\mathfrak{A}(x) = c_0\, \alpha(x)$ und $\mathfrak{B}(x) = \frac{s}{r}\, c_0\, \beta(x)$, wo c_0 constant. Dann würden α und β für $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ verschwinden, d. h. c fiele mit b zusammen, gegen die Annahme. Also kann S nicht identisch $= 0$ sein. Wenn es aber bedingt, für die Punkte von F, verschwindet, so ist F ein Stück der Fläche zweiter Ordnung S, deren Gleichung $S = 0$ ist. Würde S nicht zerfallen, so wäre sie durch F vollständig bestimmt und könnte von der Wahl der Lothlinien a, b, c nicht abhängen. Weil aber für c die Functionen α und β Null sind, liegt c auf der Fläche S, und weil c ganz beliebig ist, müssten dann alle Lothlinien der Fläche S angehören, was nicht möglich ist, weil die Lothlinien eines Flächentheils einen Raumtheil erfüllen und S dann identisch Null wäre. Wenn aber S zerfiele, so könnte es nur aus zwei Ebenen bestehen, und F wäre ein Stück von einer derselben, was

auch ausgeschlossen ist. Daher ist S nicht $= 0$; Aehnliches gilt für T, das auch weder identisch noch bedingt Null sein kann. Die durch die Gleichungen I dargestellte Abbildung kann folglich nicht illusorisch werden.

§ 6. Es empfiehlt sich jetzt, zuerst den Fall zu betrachten, dass man c so annehmen kann, dass es sowohl a wie b schneidet. Dann kann man für die beiden Ebenen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ die ac und bc nehmen, und deren Gleichungen bezw.

$$x_1 = 0 \qquad x_3 = 0$$

schreiben. Diesen beiden Ebenen entsprechen dann die beiden $a'c'$ und $b'c'$, so dass man

$$\alpha' = x_1' \qquad \beta' = x_3'$$

setzen kann. Damit wird

$$A(x) = a_1 x_1 \qquad B(x) = 0 \qquad \mathbf{A}(x) = 0 \qquad \mathbf{B}(x) = a_3 x_3$$

$$S = r a_3 x_1 x_3 \qquad T = s a_1 x_1 x_3$$

und die Formeln I des § 4 geben, wenn man $\sigma = \varrho x_1 x_3$ nimmt,

$$x_1' = \sigma r a_3 x_1, \; x_2' = \sigma r a_3 x_2, \; x_3' = \sigma s a_1 x_3, \; x_4' = \sigma s a_1 x_4.$$

Diese Formeln stellen eine projective Transformation vor.

Kann man also drei Lothlinien finden, von welchen zwei die dritte schneiden, ohne in einer Ebene zu liegen, so ist die Abbildung $\mathfrak{A}$ eine projective.

§ 7. Im Folgenden nehmen wir nun, $\mathfrak{A}$ sei nicht projectiv und zeigen, dass diese Annahme auf unzulässige Resultate führt.

Wenn es nicht möglich ist, c so zu finden, dass es beide Lothlinien, a und b trifft, so gibt es entweder gar keine Lothlinie, die a oder b trifft, oder es gibt Lothlinien, die eine dieser beiden schneiden. In diesem letzten Falle können nun entweder je zwei der Lothlinien, die a begegnen,

auch sich gegenseitig schneiden, oder es gibt Paare, deren Linien a schneiden, ohne sich zu treffen.

Wenn diese letztere Möglichkeit einträfe, so wäre nach § 6 $\mathfrak{A}$ projectiv. Im ersten Falle müssten a und alle Lothlinien, die a treffen, entweder in einer Ebene liegen, oder durch einen Punkt gehen. Der Ort G der Fusspunkte wäre also ein Curvenstück oder höchstens ein Flächentheil, der von F verschieden ist, wenn wir den in § 3 absolvirten Fall ausschliessen. Aehnliche Verhältnisse treten bei b ein. Der Ort H der Fusspunkte der Lothlinien, die b treffen, ist auch eine Curve oder höchstens ein Flächentheil, wenn nicht die Abbildung $\mathfrak{A}$ projectiv ist. Wenn G und H zusammen F ausfüllten, würde, weil a und b sich nicht schneiden, nicht an allen Punkten, wo G und H aneinander grenzen, Stetigkeit in der Richtung der Lothlinien stattfinden können. Da wir diese angenommen haben, muss es sicher auch einen Flächentheil K von F geben, dessen Punkte weder G noch H angehören. Die Lothlinien, deren Fusspunkte auf K liegen, schneiden dann weder a noch b. Aus ihnen sei nun die in den Formeln I § 4 benutzte Lothlinie c gewählt; dann müssen $\alpha(x)$, wie $\beta(x)$ jedenfalls mindestens eine Variable des Paares $x_1\, x_2$ und mindestens eine des Paares $x_3\, x_4$ enthalten, weil sonst c die Linie b bezw. a schneiden würde.

Unter den Lothlinien, deren Fusspunkte K angehören, gibt es unendlich viele, die c nicht treffen. Denn eine Ueberlegung, die der im Anfang des § angestellten analog ist, zeigt, dass die Fusspunkte der c schneidenden Lothlinien einen Flächentheil L höchstens erfüllen können und dass sie durch einen Punkt gehen müssen, wenn $\mathfrak{A}$ nicht projectiv ist. Wenn L mit K identisch wäre, hätten wir an den Grenzen von K und G, sowie von K und H Unstetigkeiten der Richtungen der Lothlinien. Daher muss nach Abzug von L aus K noch ein Flächentheil M übrig bleiben, dessen Lothlinien c nicht treffen.

§ 8. Die weitere Untersuchung zerfällt in mehrere Theile.

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ der Fläche F auf F' kann von der besonderen Wahl des Coordinatensystems und besonders der Lothlinie c nicht abhängen. Nehmen wir also für c eine andere Lothlinie d, die ebenfalls weder a noch b trifft, so werden sich die Functionen S und T in andere U und V verwandeln und die Formeln

$$x_1' = \varrho' U x_1, \quad x_2' = \varrho' U x_2, \quad x_3' = \varrho' V x_3, \quad x_4' = \varrho' V x_4$$

werden also ebenfalls die Abbildung $\mathfrak{A}$ darstellen müssen, d. h. sie werden für die Punkte von F dasselbe geben müssen, wie die Formeln I. Dies verlangt, dass

$$\text{II.} \qquad \Phi = UT - VS = 0$$

sei für die Punkte von F. Der Ausdruck Φ kann aber auch identisch Null sein.

§ 9. Betrachten wir zuerst diesen Fall. Dann muss, da ja ein identisches Verschwinden von S und T, wie auch von U und V nach § 5 ausgeschlossen ist,

$$\text{III.} \qquad V = \frac{UT}{S}$$

ganz sein. Ist T prim zu S, so muss U durch S theilbar und der Quotient, weil U und S von gleicher Dimension — der zweiten — sind, constant $= k$ sein. Dann hat man also $U = kS$, $V = kT$. Wie S und T für die Lothlinie c verschwinden, werden U und V für d zu Null. Den letzten Gleichungen zu Folge würde aber die Linie d gleichzeitig auch den beiden Flächen $S = 0$ und $T = 0$ angehören, die schon c gemein haben. Da aber diese beiden Flächen von der zweiten Ordnung sind, können sie, wenn sie nicht einen Flächentheil gemein haben — und dann wären S und T nicht theilerfremd — höchstens noch in einer Geraden sich

schneiden, die c nicht trifft und die natürlich von a, b und c abhängen wird. Da aber (§ 7) d noch unter unendlich vielen Lothlinien gewählt werden kann, die c nicht treffen, kann man sie immer von jener Linie verschieden annehmen. Somit ist der Fall nicht möglich; die Gleichung II kann nicht identisch bestehen, wenn S und T theilerfremd sind, sondern höchstens, wenn sie einen gemeinsamen Theiler haben.

§ **10.** Sind S und T nicht relativ prim, so können sie einen Factor ersten oder einen zweiten Grades gemein haben. Im letzten Falle muss $T = \mu S$ sein, wo μ eine Constante. Dann aber geben die Formeln I

$$x_1' = \varrho S \cdot x_1 \quad x_2' = \varrho S \cdot x_2 \quad x_3' = \varrho S \cdot \mu x_3 \quad x_4' = \varrho S \cdot \mu x_4,$$

die eine projective Transformation liefern.

Es können aber S und T auch einen gemeinsamen Factor ersten Grades τ haben, so dass $S = \tau S_1$, $T = \tau T_1$ ist. Dann müssten die beiden Functionen S und T zerfallen. Soll S zerfallen, so muss, weil $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur x_3 und x_4 enthalten, einer der beiden Factoren eine Function nur von diesen beiden Variabeln sein, die wir $m x_3 - l x_4$ setzen wollen. Dann müsste S für $x_3 = l$ $x_4 = m$ verschwinden, oder, wenn wir $\mathfrak{A}(l, m) = g$, $\mathfrak{B}(l, m) = f$ setzen

$$r f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + l \alpha_3 + m \alpha_4) = s g(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + l \beta_3 + m \beta_4),$$

somit auch

$$r f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = s g(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

sein. Nach einer Bemerkung in § 7 können die beiden hier vorkommenden Functionen nicht Null sein. Ist nun weder f noch g Null, so folgt, dass für $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ die Functionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ verschwinden, dass also c und b sich schneiden. Wäre $f = 0$, so müsste auch $g = 0$ sein, weil $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ nicht identisch Null sein kann. Danach ist jene Gleichung möglich, wenn f und g gleich-

zeitig Null sind, in welchem Falle B sich nur durch einen constanten Factor von $\mathfrak{A}$ unterscheiden kann, so dass es $= \mathfrak{A} h$ gesetzt werden kann. Damit wird

$$S = \mathfrak{A}(r h \alpha - s \beta).$$

In ähnlicher Weise kann T nur zerfallen, wenn $B(x) = k A(x)$ also

$$T = A(s \beta - r k \alpha)$$

ist. Beide müssen aber einen Factor gemein haben. Dass er in $\mathfrak{A}$ und A aufgehe, ist ausgeschlossen, weil diese Functionen verschiedene Variabeln enthalten. Dass $\mathfrak{A}$ mit $s \beta - r k \alpha$ proportional ist oder A mit $r h \alpha - s \beta$ ist auch unmöglich, weil sonst c die Linie b oder die a schneiden würde. Also wäre nur möglich, dass $r h \alpha - s \beta$ durch $s \beta - r \alpha k$ theilbar ist; der Quotient muss dann -1, und $h = k$ sein. Dann wäre also

$$S = \mathfrak{A}(r h \alpha - s \beta)$$
$$T = - A(r h \alpha - s \beta).$$

Die Gleichung III in § 9 würde

$$V = - \frac{U A}{\mathfrak{A}}$$

verlangen. Da A und $\mathfrak{A}$ theilerfremd sind, müssen U und V ebenfalls einen gemeinsamen Factor ersten Grades haben. Wenn man die vorigen Ueberlegungen nun auf U und V anwendet, so zeigt sich, dass diese Functionen die Formen

$$U = \Gamma(t n \gamma - u \delta)$$
$$V = - C(t n \gamma - u \delta)$$

haben müssen und dass dann

$$C = \frac{\Gamma A}{\mathfrak{A}}$$

sein muss, wobei $\gamma = 0$ $\delta = 0$ zwei Ebenen durch d darstellen

und C, Γ an die Stelle von A und $\mathcal{A}$ treten, wenn man c durch d ersetzt. Die letzte Gleichung gibt aber

$$\Gamma = v\,\mathcal{A} \qquad C = v\,A,$$

wo v ein constanter Factor. Aus der ersten dieser beiden

$$\gamma_3' a_3 x_3 + \gamma_4' a_4 x_4 = v(\alpha_3' a_3 x_3 + \alpha_4' a_4 x_4)$$

folgt aber $\gamma_3' = \alpha_3' v$, $\gamma_4' = \alpha_4' v$ und aus der zweiten $\gamma_1' = \alpha_1' v$, $\gamma_2' = \alpha_2' v$. Beide zusammen ergeben daher

$$\gamma'(x') = v\,\alpha'(x').$$

Es ist aber $\gamma'(x') = 0$ eine Ebene durch die Linie d', $\alpha'(x') = 0$ eine Ebene durch c'; daher sagt die letzte Gleichung aus, dass c' und d', also auch c und d sich schneiden, was durch Wahl von d nach § 8 stets vermieden werden kann.

Die Gleichung II kann also auch dann nicht identisch bestehen, wenn S und T einen Factor ersten Grades haben. Haben sie einen Factor zweiten Grades, ist also $\mathfrak{A}$ projectiv, so ist die Betrachtung jener Gleichung überhaupt unnöthig.

§ 11. Die Gleichung II kann aber vielleicht nur bedingt, für die Punkte von F, bestehen.

Ist $\Phi = 0$ die Gleichung einer unzerlegbaren Fläche vierter Ordnung Φ, so ist sie durch das Flächenstück F vollständig bestimmt und kann von der Wahl der Lothlinien $a\,b\,c\,d$ nicht abhängen. Da aber S und T für c, U und V für d, S und U für b, T und V für a verschwinden, so gehören diese Linien Φ an. Die Betrachtung von § 7 zeigt jedoch, dass die Lothlinie a ganz beliebig gewählt werden kann. Läge sie auf Φ, so müssten alle Lothlinien auf Φ liegen. Dann aber müsste die Function Φ, gegen die hier gemachte Annahme, identisch Null sein, weil die Lothlinien eines Flächentheils einen Raumtheil erfüllen. Daher muss die Function Φ zerfallen, entweder in einen Factor dritten Grades Φ_3, der nicht weiter zerfällt, und einen Factor ersten

Grades Φ_1, oder in einen unzerlegbaren Factor zweiten Grades Φ_2 und einen andern Factor zweiten Grades Φ_2'.

Im ersten Falle muss F, weil es nicht Theil einer Ebene sein soll, der Fläche dritter Ordnung $\Phi_3 = 0$ angehören, die durch F vollständig bestimmt ist, weil sie unzerlegbar sein soll, und von der Wahl der Linien a b c d nicht abhängen kann. Jede Linie, die auf Φ liegt, muss nun entweder auf der Fläche dritter Ordnung oder auf der Ebene liegen. Läge a auf Φ_3, so würden, weil a beliebig, alle Lothlinien dieser Fläche angehören, also Φ identisch Null sein. Daher muss a auf Φ_1 liegen. Die Lothlinie b kann aber auch nicht auf Φ_3 liegen. Denn ihr Fusspunkt kann (§ 7) jeder Punkt des Flächentheils G' sein, der übrig bleibt, wenn man G von F wegnimmt. Wenn b auf Φ_3 läge, so müssten alle Lothlinien von G' auf Φ_3 liegen, daher die Function Φ_3 und damit auch Φ identisch Null sein.

Die beiden Lothlinien a und b können aber auch nicht auf Φ_1 liegen, weil sie sich nicht schneiden. Daher ist ein Zerfallen von Φ in dieser Weise nicht möglich. Zerfällt es aber in zwei Factoren zweiten Grades, so ist nur der Fall zu betrachten, dass F dem irreducibelen Factor Φ_2 angehört, der dann von der Wahl der Lothlinien a b c d nicht abhängen könnte. Lägen nun c oder d auf Φ_2, so müsste, weil c und d beliebige Lothlinien aus K sind, alle Lothlinien dieses Flächentheils auf Φ_2 liegen, und dies ist nicht möglich. Daher können jene beiden Lothlinien nur auf Φ_2' liegen. Keine der Lothlinien a oder b kann aber Φ_2 angehören. Läge a auf Φ_2, so lägen alle Lothlinien auf dieser Fläche; läge b auf ihr, so würde das Gleiche von allen Lothlinien von G' gelten. Somit liegen die vier Lothlinien a b c d auf einer und derselben Fläche zweiter Ordnung $\Phi_2' = 0$, die nicht zerfallen kann, weil sonst c sicher a oder b treffen müsste. Daher gehören je zwei Lothlinien von K mit a und b derselben Fläche zweiter Ordnung an.

Sind d, e, f, g .... andere Lothlinien, deren Fusspunkte auf K liegen, so gehören also $abcd$, $abce$, $abcf$, $abcg$, ... je derselben Fläche zweiter Ordnung an. Weil diese aber die drei windschiefen Geraden abc gemein haben, fallen sie zusammen, so dass alle Lothlinien aus K der nämlichen Fläche zweiter Ordnung angehören müssten, was nicht eintreten kann. Folglich kann die Gleichung II auch nicht bedingt, für die Punkte von F, erfüllt sein.

Ueberblickt man die gefundenen Resultate, so zeigt sich, dass keine Möglichkeit bleibt, als dass die Abbildung $\mathfrak{A}$ projectiv ist.

§ 12. Diese projective Umformung gilt zunächst nur für die Punkte von F. Man kann sie aber auch auf die Punkte, Geraden und Ebenen im Raume anwenden und in dieser allgemeineren Weise sei sie mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}$ zunächst nur für die Punkte von F.

Sei nun ε eine Verticalebene von F; A, B, C drei in ihr gelegene Punkte von F. Dann gehen diese durch $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{T}$ in A', B', C' über, die in der Ebene $\mathfrak{A}\varepsilon$ gelegen sind, die ε durch $\mathfrak{A}$ nach § 1 zugeordnet ist. Da aber vermöge $\mathfrak{T}$ aus ε wieder eine Ebene $\mathfrak{T}\varepsilon$ hervorgeht, welche die drei Punkte A', B', C' enthalten muss, so muss $\mathfrak{T}\varepsilon = \mathfrak{A}\varepsilon$ sein, weil ja nach unserer Annahme F' keine geraden Linien enthalten soll. Da weiter zwei Verticalebenen desselben Punktes sich in der Lothlinie des Punktes schneiden, so folgt, dass auch die Lothlinien von F durch die Transformation $\mathfrak{T}$ in die von F' übergehen, so dass also Punkte, Ebenen und Geraden, die sich vermöge $\mathfrak{A}$ entsprechen, auch durch $\mathfrak{T}$ aus einander hervorgehen.

§ 13. Nimmt man an, man hätte durch ein gehörig dichtes Netz von Messungen auf einer unbekannten Fläche F' mit einem nicht bekannten System von Lothlinie Σ' die Ueberzeugung gewonnen, dass sie sich auf einer bekannten

Fläche F in der im § 1 geschilderten Art abbilden lasse, wenn man die Lothlinien von F, deren System Σ sei, passend annimmt, so kann man also schliessen, dass F' und Σ' durch projective Umformung aus F und Σ hervorgeht. Da aber die gegenseitige Lage der Punkte und Lothlinien von F' nicht bekannt ist, ist man auch nicht im Stande, die Beziehung $\mathfrak{T}$ von F auf F' zu finden. Es kann vielmehr F' jede Fläche sein, die durch irgend eine derartige Umformung der F entspricht, so dass sich über die Gestalt von F' nichts weiter aussagen lässt, wenn über die Art der projectiven Beziehung zwischen entsprechenden Büscheln von Verticalebenen nichts weiter bekannt ist.

§ 14. Anders gestaltet sich dies in dem speciellen Falle, den wir von jetzt ab in's Auge fassen wollen.

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ erfülle die Bedinguugen des § 1 mit der Modification, dass der Winkel zwischen zwei beliebigen Verticalebenen irgend eines Punktes von F, dem Winkel zwischen den entsprechenden Verticalebenen von F' gleich sei. Diese Voraussetzung schliesst die in § 1 gemachte über die projective Beziehung entsprechender Büschel von Verticalebenen ein. Die Transformation $\mathfrak{T}$ lässt sich dann finden, wenn man die Lothlinien von F zu Hilfe nimmt. Denn sei a eine Lothlinie von F, seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ Ebenen durch a, a' die entsprechende Lothlinie von F' und $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon' \ldots$ die entsprechenden Verticalebenen. Ist ferner ω der unendlich ferne Kugelkreis und sind λ, μ die beiden durch a an ω zu legenden Tangentenebenen, die wir die Hauptebenen der Linie nennen wollen, λ', μ' die Hauptebenen von a', so ist der Winkel zwischen α und β gegeben durch $\frac{1}{2i}\, l\,(\lambda\,\mu\,\alpha\,\beta)$ und der zwischen α' und β' durch $\frac{1}{2i}\, l\,(\lambda'\,\mu'\,\alpha'\,\beta')$, wo ein Symbol wie $(\alpha\beta\gamma\delta)$ das Doppelverhältniss der vier Ebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ be-

zeichnet. Wegen der Gleichheit der Winkel zwischen entsprechenden Ebenen muss dann $(\lambda\mu\alpha\beta) = (\lambda'\mu'\alpha'\beta')$ sein. Weiter erfordert die Winkelgleichheit die Gleichungen $(\lambda\mu\alpha\gamma) = (\lambda'\mu'\alpha'\gamma')$, $(\lambda\mu\alpha\delta) = (\lambda'\mu'\alpha'\delta')\ldots$, die zusammen

$$\lambda\mu\alpha\beta\gamma\delta\ldots \barwedge \lambda'\mu'\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$$

liefern. Da $\mathfrak{T}$ projectiv ist, ist es auch die umgekehrte Transformation $\mathfrak{T}^{-1}$; wenn man diese auf $\lambda'\mu'\alpha'\beta'\ldots$ anwendet und $\mathfrak{T}^{-1}\lambda' = \lambda_1$, $\mathfrak{T}^{-1}\mu' = \mu_1$ setzt, folgt, dass $\lambda'\mu'\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots \barwedge \lambda_1\mu_1\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ und also auch $\barwedge \lambda\mu\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ sein muss. Daher müssen die Ebenen $\lambda_1\mu_1$ mit $\lambda\mu$ identisch sein. Da aber $\lambda'\mu'$ die von a' an ω zu legenden Tangentenebenen sind und a' durch $\mathfrak{T}^{-1}$ in a übergeht, werden $\lambda_1\mu_1$ die beiden Tangentenebenen sein, welche man von a aus an den Kegelschnitt Ω legen kann, der aus ω durch die Umformung $\mathfrak{T}^{-1}$ hervorgeht. Die Lothlinie a hat somit die Eigenschaft, dass von ihr zwei Ebenen ausgehen, die gleichzeitig ω und $\mathfrak{T}^{-1}\omega = \Omega$ berühren (Vgl. Sturm Math. Annalen Bd. 28 Seite 263/64 Nr. 5). Ist demnach $\mathfrak{T}$ gegeben, so ist auch die Richtung der Lothlinie in jedem Punkte von F bestimmt (und zwar zweideutig). Nur dann ist diese Richtung willkürlich, wenn $\Omega = \omega$ ist, was eintritt, wenn $\mathfrak{T}$ eine Aehnlichkeitstransformation ist.

§ 15. Umgekehrt, wenn in den Punkten von F die Lothlinien bekannt sind, so ist $\mathfrak{T}$ bestimmt. Denn die Hauptebenen der Lothlinien müssen einen Kegelschnitt Ω berühren, und da F' in der Eingangs erwähnten Beziehung zu F steht, muss auch ein solcher Kegelschnitt existiren, der freilich entweder ω selbst ist, oder von ω verschieden sein kann. Man habe nun entweder I. gefunden, dass die sämmtlichen Hauptebenen der Lothlinien keinen anderen Kegelschnitt als ω berühren, oder II. erkannt, dass sie einen anderen berühren und diesen bestimmt.

Im Falle I ist $\Omega = \mathfrak{T}^{-1}\omega = \omega$, daher $\mathfrak{T}$ eine Aehnlichkeitstransformation, F' ist zu F ähnlich.

Im Falle II nehmen wir eine Lothlinie a zur Axe $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ eines homogenen rechtwinkeligen Systems, den Fusspunkt A von a zum Ursprung. Die entsprechenden Gebilde A', a' nehmen wir zum Ursprung und zur Axe $x_1' = 0$ $x_2' = 0$ eines zweiten homogenen rechtwinkeligen Systems, dessen Ebenen $x_1' = 0$ $x_2' = 0$ den $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ bezw. entsprechen mögen. Bezeichnen wir die homogenen Ebenencoordinaten des ersten Systems mit $u_1 u_2 u_3 u_4$, die des zweiten mit $u_1' u_2' u_3' u_4'$, beachten, dass $\mathfrak{T}$ eine Ebene durch A in eine durch A' überführt, und, wegen der Winkelgleichheit, die Ebene $x_2 = \lambda x_1$ in die $x_2' = \lambda x_1'$ übergehen muss, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho u_1' &= \alpha u_1 + \gamma u_3 + \delta u_4 \\
\varrho u_2' &= \alpha u_2 + \varepsilon u_3 + \zeta u_4 \\
\varrho u_3' &= \vartheta u_3 + \eta u_4 \\
\varrho u_4' &= \varkappa u_4.
\end{aligned}$$

Die Gleichung von ω im ersten System ist

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

und im zweiten

$$u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 = 0.$$

Daher ist die Gleichung von $\mathfrak{T}^{-1}\omega = \Omega$

$$\begin{aligned}
0 = \alpha^2 (u_1^2 + u_2^2) + (\gamma^2 + \varepsilon^2 + \vartheta^2) u_3^2 + (\delta^2 + \zeta^2 + \eta^2) u_4^2 \\
+ 2\alpha\gamma u_1 u_3 + 2\alpha\delta u_1 u_4 + 2\alpha\varepsilon u_2 u_3 + 2\alpha\zeta u_2 u_4 \\
+ 2(\gamma\delta + \varepsilon\zeta + \vartheta\eta) u_3 u_4.
\end{aligned}$$

Man kann stets $\alpha = 1$ setzen. Ist Ω gefunden und $\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$ seine Gleichung, so müssen die von a ausgehenden Hauptebenen, deren Coordinaten $u_1 = i$ $u_2 = 1$ $u_3 = u_4 = 0$ und $u_1 = -i$ $u_2 = 1$ $u_3 = u_4 = 0$ sind, diese Gleichung erfüllen, woraus $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ sich ergibt.

Nimmt man an, es sei $a_{11} = a_{22} = 1$ gemacht, so gibt die Vergleichung der Coefficienten

$$\gamma = a_{13} \quad \delta = a_{14} \quad \varepsilon = a_{23} \quad \zeta = a_{24}$$
$$\vartheta^2 = a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2$$
$$\eta^2 = a_{44} - a_{14}^2 - a_{24}^2$$
$$\vartheta\,\eta = a_{34} - a_{13}\,a_{14} - a_{23}\,a_{24}$$

Die letzte Gleichung bestimmt die Combination der Zeichen von ϑ und η: sie ist erfüllt, denn sie drückt aus, wie man leicht sieht, dass die Determinante von Ω Null ist. Man hat also zwei Möglichkeiten, je nachdem man, unter $\vartheta_0\ \eta_0$ ein Werthsystem von ϑ, η verstanden,

$$\varrho\, u_3' = \vartheta_0\, u_3 + \eta_0\, u_4$$

oder

$$\varrho\, u_3' = -\vartheta_0\, u_3 - \eta_0\, u_4$$

nimmt. Die zweite Formel geht in die erste über, wenn man den Sinn der x_3' Axe umkehrt, was mit einer Spiegelung an der Ebene $x_3' = 0$ übereinkommt. Abgesehen von dieser Spiegelung ist also Σ durch Ω eindeutig bestimmt und folglich kann man dann F' und Σ' aus F und Σ ableiten.

§ 16. Man könnte von dem gewonnenen Resultate, wenigstens der Idee nach, eine Anwendung machen auf die Bestimmung der Gestalt eines Theiles der Erdoberfläche aus geodätischen Messungen. In der That liefern ja diese, von Basismessungen abgesehen, die Winkel zwischen den Verticalebenen eines Punktes. Wenn man dann, etwa durch Probiren, ein Modell F hergestellt hätte mit einem System Σ von Lothlinien, für das die Winkel der Verticalebenen ebenso gross wären, wie die auf der Erde beobachteten, so wäre man im Stande, die Beziehung der Gestalt der Erde zu diesem Modell anzugeben.

In der Praxis freilich geht dies nicht an. Bei der geringen Neigung gegen einander, welche die Lothlinien von

Punkten haben, die noch gegenseitig sichtbar sind, erweisen sich die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, insbesondere auch die von der Seitenrefraction herrührenden, als von zu bedeutendem Einfluss.

Man benutzt daher die gemessenen Winkel in anderer Weise. Man projicirt die Orte von der physischen Erdoberfläche auf die mathematische Erdoberfläche, das Geoid, durch Linien, welche Normalen zur Geoidfläche sind, und berechnet dann aus den beobachteten Winkeln zwischen den Verticalebenen der physischen Erdoberfläche, die Winkel, die die Normalebenen des Geoids zeigen würden, indem man die Höhen der Punkte über dem Geoid anderweitig, etwa nivellitisch, bestimmt. Als Lothlinien der Geoidfläche benützt man dann ihre Normalen und bildet sie auf eine „Referenzfläche" — gewöhnlich das Bessel'sche oder Clarke'sche Ellipsoid — ab, indem man als Lothlinien der Referenzfläche deren Normalen verwendet. Man bestimmt nämlich die Coordinaten der Punkte auf der Referenzfläche so, nöthigenfalls mit Benutzung der Methode der kleinsten Quadrate, dass die Horizontalwinkel auf der Referenzfläche, d. h. die Winkel zwischen deren Normalschnitten, mit den beobachteten und auf das Geoid reducirten Horizontalwinkeln möglichst übereinstimmen. Und da zeigt es sich, dass, wenn die Ausdehnung des betrachteten Theils des Geoids ein Paar Hundert Kilometer nicht überschreitet, die Differenzen zwischen den Horizontalwinkeln auf dem Geoid und auf der Referenzfläche so gering sind, dass man sie den Beobachtungsfehlern zuschreiben kann.

§ 17. Nehmen wir nun an, die genannte Abbildung erfülle die im § 14 aufgestellte Bedingung strenge.

Indem wir unter F ein beliebiges Flächenstück verstehen und als Lothlinien ihre Normalen annehmen, sowie Gleiches von F' voraussetzen, wollen wir nun die Art der

$$\omega(u, \tau) = 0 \qquad \Omega(u, \tau) = 0$$

sind. Sind ferner λ und μ zwei durch n gehende reelle Ebenen, λ_i und μ_i ihre Coordinaten, so verlangt die Forderung, dass durch n zwei Ebenen gehen, welche ω und Ω gleichzeitig berühren (§ 14), dass

$$\Omega(\lambda\lambda) = c\,\omega(\lambda\lambda),\ \ \Omega(\lambda\mu) = c\,\omega(\lambda\mu),\ \ \Omega(\mu\mu) = c\,\omega(\mu\mu)$$

sei. Da die Ebenen λ und μ durch n gehen, ist die Bedingung dafür, dass n die Pole von τ in Bezug auf ω und Ω enthalte, durch die vier Gleichungen

$$\omega(\lambda\tau) = \omega(\mu\tau) = \Omega(\lambda\tau) = \Omega(\mu\tau) = 0$$

gegeben.

Setzen wir $\Omega(u) - c\,\omega(u) = W(u)$, so ist auch

$$W(\lambda\lambda) \quad W(\lambda\mu) \quad W(\mu\mu) \quad W(\lambda\tau) \quad W(\mu\tau) = 0.$$

Ist σ eine Ebene, die nicht durch den Schnitt von λ, μ und τ geht, und solche gibt es, da diese drei Ebenen nicht dieselbe Gerade enthalten, und multiplicirt man die Hesse'sche Determinante von W zweimal mit $\Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \tau_3 \sigma_4$, so entsteht Null. Daher ist W eine Grenzfläche nach der Bezeichnung von Hesse (Anal. Geom. des Raumes 3. Auflage Seite 173). Aus den drei ersten der letzten Gleichungen folgt noch

$$W(\lambda + p\mu, \lambda + p\mu) = 0$$

für beliebige p, also gehen durch den Schnitt von λ und μ unendlich viele Tangentenebenen der Grenzfläche, so dass n Tangente eines Kegelschnitts ist, wenn die Grenzfläche W nicht zerfällt. Da aber in dem Büschel $\Omega - c\omega$, wenn nicht alle Flächen Grenzflächen sind, höchstens zwei Grenzflächen vorhanden sind — ω und Ω selbst sind unbrauchbar, weil sie imaginäre Kegelschnitte enthalten — so liegen, wenn jene zwei Grenzflächen nicht zerfallen, ihre Tangenten, also die Normalen von F, in zwei Ebenen, was nicht möglich ist.

Also muss Ω so beschaffen sein, dass jenes Büschel zerfallende Grenzflächen enthält. Eine Grenzfläche zweiter Klasse kann aber entweder in zwei Punkte zerfallen oder aus einem einzigen Punkte bestehen. Sei im ersten Falle

$$W(u) = r(u) \cdot s(u)$$

so muss demnach

$$r(\lambda)\, s(\lambda) = r(\mu)\, s(\mu) = r(\lambda)\, s(\mu) + r(\mu)\, s(\lambda) = 0$$

sein. Wenn n durch keinen der beiden Punkte r oder s ginge, könnte man λ und μ so annehmen, dass keine der vier Grössen $r(\lambda)$, $s(\lambda)$, $r(\mu)$, $s(\mu)$ Null wäre. Daher muss n etwa durch r gehen. Legen wir dann μ noch durch s, so ist $r(\lambda) = r(\mu) = s(\mu) = 0$, $s(\lambda)$ nicht 0. Dann muss sein

$$0 = W(\lambda\, \tau) = s(\lambda)\, r(\tau), \quad \text{also} \quad r(\tau) = 0,$$

es muss somit τ durch r gehen. Alle Normalen gingen folglich durch einen Punkt, der auch in allen Tangentenebenen enthalten wäre, was nicht möglich ist. Ebenso ist es, wenn n durch s geht.

Also kann W nur ein Quadrat $= r(u)^2$ sein. Dann müssen die Gleichungen bestehen

$$r(\lambda)^2 = r(\mu)^2 = r(\lambda)\, r(\mu) = r(\lambda)\, r(\tau) = r(\mu)\, r(\tau) = 0,$$

welchen zufolge n jede Linie durch den Punkt r sein kann. In diesem Falle gehen folglich alle Normalen durch einen Punkt. Die beiden letzten Gleichungen sind dann für jedes τ erfüllt, so dass τ aus $\omega(\lambda\, \tau) = 0$ $\omega(\mu\, \tau) = 0$ bestimmt werden muss.

Wenn nicht alle Flächen des Büschels Grenzflächen sind, so kann es unter den Functionen $\Omega - c\,\omega$ höchstens zwei geben, die Quadrate sind, so dass die Normalen zwei Strahlenbündel bilden könnten.

§ 19. Sollen alle Flächen des Büschels Grenzflächen sein, so muss entweder die Ebene von Ω Tangentenebene

von ω sein oder umgekehrt oder die Ebenen von ω und Ω müssen zusammenfallen. Da die Transformation $\mathfrak{T}$ reell ist und die Ebene von ω ebenfalls, so ist es auch die von Ω und somit ist der erste Fall nicht möglich. Im zweiten ist $\mathfrak{T}$ affin, weil die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht.

Wenn dann ω und Ω nicht identisch sind, bilden die Ebenen, welche beide berühren, je nach der Lage von Ω gegen ω, 4, 3, 2 oder 1 Ebenenbüschel, deren Axen die gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte sind und in der unendlich fernen Ebene liegen. Die Normalen sind also dann Schnitte von zwei Ebenen aus zwei verschiedenen Büscheln. Die Tangentialebene τ muss den vier Gleichungen

$$\omega(\lambda u) = 0 \quad \omega(\mu u) = 0 \quad \Omega(\lambda u) = 0 \quad \Omega(\mu u) = 0$$

genügen, welche die Berührungspunkte der Ebenen λ und μ mit ω und Ω vorstellen. Sie ist also die unendlich ferne Ebene, wenn die Zahl der Berührungspunkte mindestens drei ist. Einen brauchbaren Fall erhalten wir daher nur, wenn die gewählten beiden Büschel zusammen nur zwei Berührungspunkte haben. Dies tritt weder ein, wenn ω und Ω vier gemeinsame Tangenten besitzen, noch wenn sie deren drei haben. Haben sie dagegen nur zwei Tangenten gemein, so können diese drei oder zwei Berührungspunkte haben. Nur den letzten Fall können wir benutzen, in dem sich dann ω und Ω doppelt berühren. Die Berührungssehne der beiden Tangenten ist dann Axe eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen Tangentenebenen sein können. Die Ebenen aus beiden Büscheln, deren Axen die gemeinsamen Tangenten sind, schneiden sich aber in einem unendlich fernen Punkte, d. h. alle Normalen sind parallel. Haben ω und Ω nur eine Tangente gemein, so wären λ und μ aus dem Büschel zu wählen, dessen Axe sie ist und n wäre eine unendlich ferne Gerade.

§ 20. Also bleibt nur übrig, dass die beiden Kegelschnitte ω und Ω zusammenfallen oder dass alle Normalen durch einen oder zwei, endliche oder unendlich ferne, Punkte gehen. Der erste Fall liefert eine Aehnlichkeitstransformation.

Gehen alle Normalen durch einen endlichen Punkt, so nehmen wir ihn zum Ursprung eines rechtwinkeligen Systems. Dann muss sein

$$x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{Constante};$$

die Fläche F ist Theil einer Kugelfläche.

Schneiden sich die Normalen in einem unendlich fernen Punkt der z Axe, so verlangt dies

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

also z constant, wobei F eine Ebene wäre.

Dass alle Normalen zwei Bündel bilden, ist ausgeschlossen durch unsere Annahme, dass die Lothlinien, folglich hier die Normalen, ihre Richtung stetig ändern.

Ist F Stück einer Kugel, so muss auch F' ein Kugelstück sein und folglich ist auch hier die Abbildung von F' auf F eine ähnliche. Eine Abbildung einer Kugel auf eine Ebene ist offenbar unter der Bedingung der §§ 14 und 17 nicht möglich, wegen der Winkelsumme im Dreieck. Dagegen lassen sich zwei Ebenen selbstverständlich ähnlich aufeinander abbilden.

Sind also die Lothlinien Normalen und findet Gleichheit der Horizontalwinkel statt, so sind die beiden Flächen F und F' in allen Fällen einander ähnlich.

Da wie in § 16 erwähnt ein mässig grosser Bezirk der

vermittelst sich in der angegebenen Weise auf ein Rotationsellipsoid umbilden lässt, so könne man schliessen, dass das entstehende Geoidstück einem Stücke eines Rotationsellipsoids ähnlich wäre, wenigstens mit einer gewissen Annäherung. Freilich müsse nach unseren Resultaten auch die relative Lage der Lothlinien beider Flächen die nämliche sein. Solange nur geodätische Messungen vorliegen, lässt sich die Richtigkeit dieser Folgerung nicht prüfen. Sind aber, wie gewöhnlich, auch astronomische Beobachtungen über die Richtung der Lothlinie auf der Erde gemacht, wenn auch nur in beschränkter Zahl, so kann man diese mit den Normalen des Ellipsoids vergleichen. Wie bekannt zeigen sich dann kleine Differenzen, die Lothablenkungen. Zum Theil sind sie dadurch bedingt, dass man ja auf der physischen Erdoberfläche beobachtet, während man die Lothrichtungen auf dem Geoid mit jenen auf dem Ellipsoid vergleichen müsste. Wenn man die Wirkung der über dem Geoid liegenden Massen auf die Lothrichtung berechnet und diese danach corrigirt, kann man, wenigstens genähert, die Lothrichtung auf dem Geoid bestimmen. Wenn auch dann noch Lothabweichungen übrig bleiben, so ist dies ein Zeichen, dass das Ellipsoid dem Geoid nicht genau genug anliegt. Man kann dann, wenn genug Lothabweichungen bekannt sind, das Ellipsoid durch eine andere, nur wenig verschiedene Fläche ersetzen, deren Normalen diese Abweichungen nicht zeigen, während die Unterschiede der gemessenen und gerechneten Horizontalwinkel mit denen auf der Bildfläche noch in den Grenzen der Beobachtungsfehler bleiben. Die so entstandene Fläche ist dann dem Geoid mit genügender Genauigkeit anliegend.

Ueber das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 26. März.)

Von den Erscheinungen der Elektricitätsbewegung wurden anfangs experimentell ausschliesslich die in Leitern vor sich gehenden geprüft; Maxwell musste die für die Elektricitätsbewegung in Leitern gefundenen Gesetze (das Ohm'sche, das Neumann'sche Induktionsgesetz etc.) mit entsprechenden Modifikationen auf Nichtleiter übertragen, fast ohne sich dabei auf quantitative Experimente stützen zu können, die an letztern angestellt worden wären; nur so gelang es ihm, seine allgemeine die Leiter und Nichtleiter umfassende Theorie der Elektricitätsbewegung aufzubauen.

Um so auffallender muss es erscheinen, dass, während diese Theorie sich im Verhalten der Nichtleiter fast ausnahmslos bestätigt hat, dies für die Leiter nicht in gleichem Maasse gilt. Schon Maxwell fiel dies auf; in neuerer Zeit hat Herr Cohn[1]) diesem Gegenstande eine besondere Abhandlung gewidmet. Er bespricht daselbst besonders die

1) Wied. Ann. Bd. 45 pag. 55, 1892. Ueber Durchsichtigkeit der Metalle vgl. Rathenau, Inauguraldissertation, Berlin 1889, Drude, Wied. Ann. 39, 1890.

Lichtbewegung in Metallen und findet im Gegensatze zu Maxwell, dass sie weniger absorbirt wird als es die Theorie verlangt. Wie er jedoch selbst erwähnt, beweisen die Erscheinungen der auswählenden Absorption, dass hier die diskontinuirliche Molekularstruktur der Materie von wesentlichem Einfluss ist. Da nun die elektrischen Eigenschwingungen der Moleküle offenbar nothwendig ebenfalls Veranlassung zur Absorption geben, so wäre die Thatsache, dass letztere ohne deren Berücksichtigung zu klein herauskommt, von vorne herein zu erwarten.

In neuester Zeit haben auch E. Wiedemann, Ebert[1]) und Hertz[2]) auf die unerwartet grosse Durchlässigkeit dünner Metallschichten für Katedenstrahlen hingewiesen. Die beiden ersteren sagen bei dieser Gelegenheit: „Wir haben hier einen neuen Fall vor uns, welcher zeigt, dass die Maxwell'sche Theorie nicht ausreicht, die Erscheinungen zu erklären.“ Wahrscheinlich hat man es jedoch auch hier mit Schwingungen zu thun, deren Wellenlänge nicht mehr unendlich gross gegen die Molekulardimensionen ist und welche sich daher der Maxwell'schen Theorie von vorne herein entziehen, sodass deren Giltigkeit auf alle anderen Erscheinungen, für welche sie allein gemacht wurde, unangefochten bleibt.

Es folgt nun aus der Maxwell'schen Theorie, dass sehr rasche elektrische Schwingungen, wenn sie sich längs eines Drahtes fortpflanzen, auf dessen Oberfläche beschränkt bleiben; ferner, dass Wellen, deren Fortpflanzungsrichtung nicht wie im eben angeführten Falle parallel, sondern senkrecht zur Metalloberfläche steht (wie dies bei Lichtschwingungen der Fall ist, die senkrecht in Metall eindringen) innerhalb einer Wellenlänge bereits ganz enorm geschwächt werden. Aus dem letzteren Resultate folgt weiter, dass ächte Lichtschwingungen schon beim Durchwandern sehr dünner Metallschichten

1) Phys.-med. Soc. zu Erlangen 14. Dec. 1891.

2) Wied. Ann. 45 p. 28 1892.

ausserordentlich an Intensität verlieren. Die Wellen aber, welche Hertz auch in freier Luft erzeugt hat, und deren Wellenlänge nach Decimetern zählt, müssten nach Maxwell's Theorie durch das blosse Durchwandern eines Metallschirmes von $^1/_{10}$ Millimeter, ja selbst einem Millimeter Dicke noch kaum erheblich geschwächt werden. Nun hat aber Hertz beobachtet, dass selbst weit dünnere Metallschichten für diese Wellen undurchlässig sind; die Ursache hievon kann nach dem obigen nicht in der Absorption in deren Innerem, sondern nur in den Grenzbedingungen beim Ueberschreiten ihrer Oberfläche liegen, was in der That durch Berechnung der Metallreflexion aus Maxwell's Formeln bestätigt wird.

Obwohl die betreffenden Rechnungen für Planwellen und planparallele Metallplatten ohne alle Schwierigkeit sind, da sie ja vollkommen analog denjenigen sind, welche in der Theorie des Newton'schen Farbenglases vorkommen, so scheint mir doch bei der Wichtigkeit des Gegenstandes eine ausführliche Mittheilung desselben angezeigt umsomehr als gerade über diese Vorgänge angestellte Experimente wichtige neue Aufschlüsse namentlich über die noch nicht einmal der Grössenordnung nach bekannten Werthe der Dielektricitätsconstanten der Metalle zu versprechen scheinen. Die allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen, welche Metalle und Drielektrica umfassen, sind folgende:

$$a=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},\quad b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},\quad c=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy} \qquad \text{A)}$$

(M. T. 591, A)[1])

$$4\pi u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},\quad 4\pi v=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},\quad 4\pi w=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy} \qquad \text{B')}$$

1) M. T. bedeutet Maxwells treatise on electr. a. magn. second. edit. Die folgende Zahl bedeutet den Artikel, worauf die Nummer der Gleichung folgt. Vgl. auch: Boltzmann, Vorles. über Maxwell's Theorie art. 88, Barth 1891, was ich kurz als B. V. citiren will.

(M. T. 607, E), worin

$$a = \mu\,\alpha, \quad b = \mu\,\beta, \quad c = \mu\,\gamma \qquad \text{F)}$$

(M. T. 616, im Text unmittelbar vor Gleichung 1, B. V. art. 116)

$$4\,\pi f = k\,P, \quad 4\,\pi\,g = k\,Q, \quad 4\,\pi\,h = k\,R \qquad \text{C')}$$

(M. T. 608, F; denn die beiden dortigen Vectoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ haben die Componenten P, Q, R und f, g, h; vergl. auch M. T. 790, 16; statt **Maxwell's** Buchstaben K wurde k geschrieben.)

$$p = C\,P, \quad q = C\,Q, \quad r = C\,R \qquad \text{D')}$$

(M. T. 609, G. Diese Gleichungen heissen bei **Maxwell** $\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}$; p, q, r sind die Componenten von $\mathfrak{K}$; vgl. M. T. 611, I*)

$$u = p + \frac{df}{dt}, \quad v = q + \frac{dg}{dt}, \quad w = r + \frac{dh}{dt} \qquad \text{E)}$$

(M. T. 610, H*)

$$P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \quad Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \quad R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \qquad \text{G)}$$

(M. T. 598, B, worin $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, da das Medium ruht.)

§ 1. Einmalige Reflexion.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass nur eine Trennungsfläche vorhanden ist, welche wir als eben voraussetzen und zur yz-Ebene wählen. Links von derselben auf der Seite der negativen Abscissen sei Luft, rechts ein Metall. Elektrische Planwellen sollen vom negativ Unendlichen gegen die Trennungsfläche anrücken. Hier werden sie theils reflectirt, theils dringen sie ins Metall ein; in letzterem existiren also nur Wellen, die in der Richtung der positiven Abscissen fortschreiten. Die Abscissenaxe ist die Fortpflanzungsrichtung, sodass alles nur Function von x und t ist. Die elek-

trischen Verschiebungen sollen in der Richtung der y-Axe geschehen. Wir haben also für negative x: $f=P=h=R=0$

$$\begin{gathered}g=A\sin\frac{2\pi}{\tau}(t-x\sqrt{\mu k})+B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t-x\sqrt{\mu k})+\\+C\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+x\sqrt{\mu k})+D\cos\frac{2\pi}{\tau}(t+x\sqrt{\mu k})=\frac{k}{4\pi}Q.\end{gathered} \tag{1}$$

Hier stellen die Glieder der ersten Zeile die directe, die der zweiten die reflectirte Welle dar. An Stelle von $\sqrt{\mu k}$ sollte vorläufig eine später zu bestimmende Constante stehen. Wir schreiben jedoch schon jetzt diesen später sich ergebenden Werth (M. T. 784, 10; B. V., art. 95, Gl. 87). Aus C' und G) folgt $H=T_1$,

$$\begin{gathered}G=\frac{2\tau}{k}\Big[A\cos\frac{2\pi}{\tau}(t-x\sqrt{\mu k})-B\sin\frac{2\pi}{\tau}(t-x\sqrt{\mu k})+\\+C\cos\frac{2\pi}{\tau}(t+x\sqrt{\mu k})-D\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+x\sqrt{\mu k})\Big]+T_2,\end{gathered} \tag{2}$$

wobei T_1 und T_2 kein x enthalten. Nach A folgt weiter $a=\alpha=b=\beta=0$

$$\begin{gathered}c=\mu\gamma=4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\Big[A\sin\frac{2\pi}{\tau}(t-x\sqrt{\mu k})+\\+B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t-x\sqrt{\mu k})-C\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+x\sqrt{\mu k})-\\-D\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+x\sqrt{\mu k})\Big]\end{gathered} \tag{3}$$

Bilden wir $\frac{dc}{dx}$ und $\frac{dg}{dt}$, so sehen wir, dass auch die Gleichungen B und E erfüllt sind, dass also für die Constante, die eigentlich statt $\sqrt{\mu k}$ hätte gesetzt werden sollen, der richtige Werth gewählt wurde.

Die Werthe unserer Grössen rechts von der yz-Ebene sollen mit dem Index 1 versehen werden. C_1 und vorläufig

auch k_1 sollen dort von Null verschieden sein, so dass die allgemeinen Gleichungen A bis G gelten. Wir haben dort nur die durchgehende in der positiven x-Richtung fortschreitende, keine reflectirte Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass auch das Glied verschwindet, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält. Dann würden die für positive Abscissen geltenden Gleichungen erfüllt durch $f_1 = P_1 = h_1 = R_1 = 0$

$$q_1 = \frac{4\pi C_1}{k_1} g_1 = e^{-\xi x} E \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)^{1)} \qquad 4)$$

wobei

$$\xi^2 = -\frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4 k_1^2 \mu_1^2}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C_1^2 \mu_1^2}{\tau^2}}$$

$$\eta = \frac{4\pi^2 \mu_1 C_1}{\tau \xi}, \; \eta^2 = \frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4 k_1^2 \mu_1^2}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C_1^2 \mu_1^2}{\tau^2}} \qquad 5)$$

wobei der Quadratwurzel der positive Werth beizulegen ist und auch für ξ und η deren positive Werthe zu setzen sind. Aus D′ und G folgt wieder $H_1 = T_3$,

$$G_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) + T_4 \qquad 6)$$

und aus A folgt $a_1 = \alpha_1 = b_1 = \beta_1 = 0$

$$c_1 = \mu_1 \gamma_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x} \left[\eta \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) - \xi \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)\right]. \qquad 7)$$

Durch Bildung von $\frac{d\gamma_1}{dx}$ und $\frac{dg_1}{dt}$ können wieder die Gleichungen B′ und E noch verificirt werden.

Es handelt sich noch um die Grenzbedingungen für die

1) Siehe B. V. art. 96, pag. 101. Nach C′ und D′ können sich f, g, h von p, q respective r nur durch constante Factoren unterscheiden.

Trennungsfläche. Obwohl dieselben schon von Maxwell aufgestellt wurden, wollen wir sie doch lieber nach einer oft (von Helmholtz, Hertz etc.) verwendeten Methode aus den Gleichungen A bis G entwickeln. Wir betrachten sogleich den allgemeinsten Fall, dass rechts und links von der Trennungsfläche, welche wir zur yz-Ebene wählen, ein ganz beliebiges Medium vorhanden ist. Rechts wenden wir den Index 1 an. Substituiren wir statt der Trennungsfläche eine Schicht continuirlichen Uebergangs von der Dicke δ, so sind darin die Differenzialquotienten nach x im Allgemeinen Unendlich wie $1:\delta$, die nach y und z aber sind endlich, so dass letztere, sowie die ebenfalls überall endlichen Grössen a, b, c, $u \cdots$, mit dx multiplicirt und von Null bis δ integrirt, Verschwindendes liefern. Es liefern daher die Gleichungen A mit dx multiplicirt und von Null bis δ integrirt:

$$G = G_1, \qquad H = H_1.$$

Da Ψ das Potential der freien Elektricität ist, so haben seine Differentialquotienten in Richtungen, die tangential zur Trennungsfläche stehen, zu beiden Seiten derselben den gleichen Werth. In dem von uns betrachteten Falle müssen übrigens die Glieder $\frac{d\Psi}{dy}$ und $\frac{d\Psi}{dz}$ überhaupt verschwinden, da alles nur Function von x und t ist. Wir erhalten also aus G, C′ und D′

$$\left.\begin{aligned} Q = Q_1 = \frac{4\pi}{k} g = \frac{q}{C} = \frac{4\pi}{k_1} g_1 = \frac{q_1}{C_1} \\ R = R_1 = \frac{4\pi}{k} h = \frac{r}{C} = \frac{4\pi}{k_1} r_1 = \frac{r_1}{C_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{H)}$$

Multipliciren wir ebenso die Gleichungen B′ mit dx und integriren von Null bis δ, so folgt:

$$\beta = \beta_1 = \frac{b}{\mu} = \frac{b_1}{\mu_1}, \; \gamma = \gamma_1 = \frac{c}{\mu} = \frac{c_1}{\mu_1}. \qquad \text{G)}$$

$$Q = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2} = \frac{2\sqrt{2u + 2\sqrt{u^2 + v^2}}}{1 + \sqrt{2u + 2\sqrt{u^2 + v^2}} + \sqrt{u^2 + v^2}}$$

Bei den früher betrachteten Hertz'schen Schwingungen war $\mu = \mu_1$, $k = 1$, $C_1 \tau = v : 2 = 2.10^7 L$. Wenn also selbst die Dielektricitätsconstante des Metall eine millionmal grösser als die der Luft wäre, so würden die für diesen Fall gefundenen Resultate kaum alterirt. Dagegen würde im Falle des Natriumlichts die Dielektricitätsconstante des Metalls schon einen kleinen Einfluss bekommen, wenn sie der der Luft gleich wäre. Der Verlauf noch viel rascherer Schwingung würde dann gänzlich verändert.

Die Gleichungen 5 zeigen, dass mit wachsendem k_1 sowohl die Dämpfungsconstante ξ als auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $2\pi : \eta\tau$ nur abnehmen kann. Habe ξ, wenn alles sonst unverändert bleibt, nur $k_1 = 0$ ist, den Werth ξ_0, so hat man nämlich $\xi_0^4 = \xi^4 + 4\pi^2 k_1 \mu_1 \xi^2 : \tau^2$.

Wenn entgegen dem zuerst betrachteten Falle das k_1 enthaltende Glied gross gegen das C_1 enthaltende ist, so wird:

$$\xi = 2\pi C_1 \sqrt{\frac{\mu_1}{k_1}}, \quad \frac{2\pi}{\eta\tau} = \frac{1}{\sqrt{k_1 \mu_1}}, \quad Q = \frac{4\sqrt{\mu\mu_1 k k_1}}{(\sqrt{\mu k_1} + \sqrt{\mu_1 k})^2}.$$

$$A = \left(\frac{k}{k_1} + \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}\right)\frac{E k_1}{8\pi C_1}, \quad C = \left(\frac{k}{k_1} \quad \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}\right)\frac{E k}{8\pi C_1}$$

$$B = -D = \frac{\tau E}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}.$$

Nun schreiten wir zur Erledigung des 3. Punktes.

§ 2. Betrachtung einer planparallelen Metallplatte.

Seien die Ebenen $x = -p$ und $x = 0$ die beiden Begrenzungsflächen einer Metallplatte. Die im Innern der Metallplatte gültigen Werthe sollen den Index 1 erhalten. Links auf Seite der negativen Abscissen (wofür kein Index angewendet wird und rechts von der Metallplatte (Index 2 für die variabeln Grössen) sei dasselbe Dielectricum Luft. Von links sollen Planwellen anrücken, welche an beiden Metalloberflächen reflectirt werden. Rechts von der yz-Ebene ist dann keine reflectirte, nur die durchgedrungene Welle vorhanden. Die übrigen Verhältnisse sollen wie im vorigen Paragraph sein. Dann ist also für $-\infty < x < -p$:

$$g = A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + \\ + C \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) + D \cos \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}).$$

$$c = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}\Big[A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) - \\ - C \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - D \cos \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big].$$

Für $-p < x < 0$

$$g_1 = e^{-\xi x}\Big[E \sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big) + F \cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big)\Big] + \\ + e^{\xi x}\Big[G \sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big) + H \cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big)\Big]$$

$$c_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1}\Big\{e^{-\xi x}\Big[E \cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big) - F \sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big)\Big] + \\ + e^{\xi x}\Big[G \cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big) - H \sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big)\Big]\Big\}$$

$$c_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1}\left\{e^{-\xi x}\left[(E\eta + F\xi)\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right) + \right.\right.$$

$$\left. + (-E\xi + F\eta)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right)\right] +$$

$$+ e^{\xi x}\left[(-G\eta - H\xi)\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right) + \right.$$

$$\left.\left. + (G\xi - H\eta)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right)\right]\right\}.$$

Endlich für $x > 0$ haben wir nur die durchgehende in der positiven x-Richtung fortschreitende Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass das Glied, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält, verschwindet. Dann wird also für $x > 0$

$$g_2 = J\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}),\quad c_2 = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,J\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}).$$

Die Bedingungsgleichungen für $x = 0$ lauten:

$$\frac{g_1}{C_1} = \frac{4\pi g_2}{k},\qquad \frac{c_1}{\mu_1} = \frac{c_2}{\mu},$$

was liefert:

$$H = -F,\quad G = E - 2\frac{\eta F}{\xi},\quad E - \frac{\eta}{\xi}F = \frac{2\pi C_1 J}{k}$$

$$F = -H = \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \xi J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}},\quad E = \frac{2\pi C_1 J}{k} + \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \eta J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}$$

$$G = \frac{2\pi C_1 J}{k} - \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \eta J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}$$

Setzen wir

$$\cos\frac{2\pi p}{\tau}\sqrt{\mu k} = a,\quad \sin\frac{2\pi p}{\tau}\sqrt{\mu k} = \alpha,\quad \cos p\eta = b,\quad \sin p\eta = \beta,$$

$$e^{\xi p} = \gamma,$$

so liefern die Bedingungsgleichungen für $x = p$:

$$Aa - Ba + Ca + Da = \frac{k}{4\pi C_1}\left(Eb\gamma - F\beta\gamma + \frac{Gb}{\gamma} + \frac{H\beta}{\gamma}\right)$$

$$Aa + Ba - Ca + Da = \frac{k}{4\pi C_1}\left(E\beta\gamma + Fb\gamma - \frac{G\beta}{\gamma} + \frac{Hb}{\gamma}\right)$$

$$Aa - Ba - Ca - Da = \frac{\tau\sqrt{\mu k}}{8\pi\mu_1 C_1}\Big[E\gamma(b\eta + \beta\xi) +$$

$$+ F\gamma(b\xi - \beta\eta) + \frac{G}{\gamma}(-b\eta + \beta\xi) - \frac{H}{\gamma}(b\xi + \beta\eta)\Big]$$

$$Aa + Ba + Ca - Da = \frac{\tau\sqrt{\mu k}}{8\pi^2\mu_1 C_1}\Big[E\gamma(-b\xi + \beta\eta) +$$

$$+ F\gamma(b\eta + \beta\xi) + \frac{G}{\gamma}(b\xi + \beta\eta) + \frac{H}{\gamma}(-b\eta + \beta\xi)\Big].$$

Wir wollen $J = 1$ setzen, wodurch nur sämmtliche Amplitüden mit einem constanten Factor multiplicirt werden; ferner setzen wir zur Abkürzung

$$2\delta = \gamma + \frac{1}{\gamma} = e^{p\xi} + e^{-p\xi},\quad 2\varepsilon = \gamma - \frac{1}{\gamma} = e^{p\xi} - e^{-p\xi},$$

dann wird:

$$Aa - Ba + Ca + Da = b\delta + \frac{b\varepsilon\eta - \beta\delta\xi}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{2\pi\mu_1}{\tau}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$Aa + Ba - Ca + Da = \beta\varepsilon + \frac{b\varepsilon\xi + \beta\delta\eta}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{2\pi\mu_1}{\tau}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$Aa - Ba - Ca - Da = b\delta + (b\varepsilon\eta + \beta\delta\xi) \cdot \frac{\tau}{2\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$Aa + Ba + Ca - Da = \beta\varepsilon + (-b\varepsilon\xi + \beta\delta\eta) \cdot \frac{\tau}{2\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach: 1. mit a, a, a, a; 2. mit $-a$, a, $-a$, a; 3. mit a, $-a$, $-a$, a; 4. mit a, a, $-a$, $-a$ und setzt noch zur Abkürzung:

$$\varkappa = \frac{\tau}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}} + \frac{\pi\mu_1}{\tau(\xi^2+\eta^2)}\sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

$$\lambda = \frac{\tau}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}} - \frac{\pi\mu_1}{\tau(\xi^2+\eta^2)}\sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

so erhält man

$$A = a\,b\,\delta + \alpha\,\beta\,\varepsilon + (a\,b\,\varepsilon + \alpha\,\beta\,\delta)\,\eta\,\varkappa + (a\,\beta\,\delta - \alpha\,b\,\varepsilon)\,\xi\,\lambda$$

$$B = a\,\beta\,\varepsilon - \alpha\,b\,\delta + (a\,\beta\,\delta - \alpha\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\varkappa - (a\,b\,\varepsilon + \alpha\,\beta\,\delta)\,\xi\,\lambda$$

$$C = (\alpha\,\beta\,\delta - a\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\lambda - (a\,\beta\,\delta + \alpha\,b\,\varepsilon)\,\xi\,\varkappa$$

$$D = -(a\,\beta\,\delta + \alpha\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\lambda + (a\,b\,\varepsilon - \alpha\,\beta\,\delta)\,\xi\,\varkappa$$

$$A^2 + B^2 = (b^2\varepsilon^2 + \beta^2\delta^2)(\eta^2\varkappa^2 + \xi^2\lambda^2) + 2\,\delta\,\varepsilon\,\eta\,\varkappa + 2\,b\,\beta\,(\delta^2 - \varepsilon^2)\,\xi\,\lambda + b^2\delta^2 + \beta^2\varepsilon^2$$

$$C^2 + D^2 = (b^2\varepsilon^2 + \beta^2\delta^2)(\eta^2\lambda^2 + \xi^2\varkappa^2).$$

Sobald die Metallplatte sehr dünn, also p sehr klein ist, wird

$$a = b = \delta = 1, \quad \alpha = \beta = \varepsilon = 0,$$

daher

$$A = 1, \quad B = C = D = 0,$$

es werden also die Wellen durchgelassen, als ob die Metallplatte nicht vorhanden wäre (Fall 1). Ein anderer extremer Fall (2) tritt ein, wenn $\xi\lambda$ und $\varkappa\eta$ (wenigstens eine dieser beiden Grössen) sehr gross ist. Dann verschwindet das erste Glied im Ausdrnck für A sowie in dem für B und man hat $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$. Alle Bewegung wird reflectirt.

Man kann die Frage aufwerfen, wie dünn in diesem letzten Falle bei gegebener Schwingungsdauer die Metallplatte sein müsse, damit der Uebergang in das zuerst genannte Extrem eintrete.

Wir wollen da wieder bloss den Fall betrachten, dass die dielektrischen Eigenschaften der Metallschicht nicht in Betracht kommen, also k_1 verschwindet. Dann wird, wie wir sahen, $\xi = \eta = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_1 C_1}{\tau}}$.

Wir setzen ferner $\mu = \mu_1$ und erhalten

$$\varkappa\,\eta = \varkappa\,\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1\,\tau}{k}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{C_1\,\tau}},$$

$$\lambda\,\xi = \lambda\,\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1\,\tau}{k}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{C_1\,\tau}}.$$

Dieser Ausdruck wird sehr gross, wenn $\sqrt{\frac{C_1\,\tau}{k}}$ sehr gross oder sehr klein ist. Im ersteren Fall, der, wie aus den numerischen Beispielen des vorigen Paragraphen ersichtlich ist, bei den Hertz'schen Schwingungen eintritt, wird $\varkappa\,\xi = \lambda\,\xi$.

Da

$$\frac{\operatorname{arc}\cos b}{\operatorname{arc}\cos a} = \sqrt{\frac{C_1\,\tau}{k}},$$

so wird in diesem Falle auch dieses Verhältniss sehr gross, und daher α noch viel kleiner, als β sein, dessen Kleinheit die Grösse von $\eta\,\varkappa$ und $\xi\,\lambda$ zu compensiren hat. a und b können gleich eins gesetzt werden. Wir verbinden hiemit den Fall 1, dass fast alles Licht durchgeht, wenn p so klein ist, dass $\varepsilon = p\,\xi = 2\,\pi\,p\sqrt{\frac{C_1\,\mu}{\tau}}$ klein gegen 1, $\delta = 1$ wird.

Setzt man dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen im Medium zu beiden Seiten der Metallschicht (Luft) $\frac{1}{\sqrt{\mu\,k}} = V$, so ist

$$A = 1 + 2\,\pi\,p\,\frac{C_1}{k\,V}, \quad C = -2\,\pi\,p\,\frac{C_1}{k\,V}, \quad B = D = 0.$$

Wenn $p\,\xi$ gross ist, also nur wenig Licht hindurchgeht, so wird:

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{2}\,e^{2\,p\,\xi}\,(\xi^2\,\varkappa^2 + \xi\,\varkappa), \quad C^2 + D^2 = \frac{\xi^2\,\varkappa^2}{2}\,e^{2\,p\,\xi}.$$

Numerische Berechnungen nach dieser Formel, ähnlich wie wir sie an die Formel des vorigen Paragraph geknüpft haben, stossen natürlich nicht auf die mindeste Schwierigkeit. Eine experimentelle Prüfung der Durchlässigkeit äusserst dünner Schichten aus schlecht leitenden Metallen oder anderen Leitern für Licht und elektrische Schwingungen könnten vielleicht Aufschlüsse über deren Dielektricitätsconstante liefern.

Auch die Berechnung des entgegengesetzten Falles, dass die Schwingungen so rasch geschehen, dass $\frac{C_1 \tau}{k}$ sehr klein ist (Kathodestrahlen?), hat keine Schwierigkeit, doch gehe ich darauf nicht weiter ein, da diese Phänomene wohl durch den specifischen Einfluss der Resonanz der einzelnen Moleküle zu sehr gestört werden dürften.

Ueber den Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen.

Von R. Emden.

(Mit Tafel I.)

(Eingelaufen 5. März.)

Es ist bekannt,[1]) dass für nicht zu rasch alternirende Ströme Eisendrähte einen viel grösseren Coefficienten der Selbstinduktion besitzen als Kupferdrähte, da der Strom bei ersteren nicht nur den umgebenden Raum, sondern auch die Leitungsbahn selbst zu magnetisiren hat, welche Magnetisirungsarbeit für letztere verschwindend klein ist. Anderseits hat Hertz[2]) gefunden, dass für sehr rasch oscillirende Ströme sich der Magnetismus des Eisens nicht mehr geltend macht und Lodge[3]) giebt an, dass durch Eisendrähte sich Batterieentladungen nicht anders vollziehen wie durch Kupferdrähte. Man kann dies durch die Annahme erklären, dass die Eisenmolekeln zu träge sind, sich den raschen Stromwechseln gemäss umzulagern, oder neueren Anschauungen gemäss annehmen, dass in diesem Falle die Stromfäden nur an der Oberfläche des Drahtes liegen und so auf das Innere desselben nicht mehr magnetisirend wirken.[4]) Diese neuere

1) Wiedemann. Lehrbuch der Elektricität. III. S. 691.
2) Hertz. Wied. Annal. 31. pag. 421.
3) Lodge. Electrician 11. pag. 612.
4) Stefan. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 95. II. Abth. pag. 817. 1887.

Ansicht scheint durch die vorliegende Arbeit, die experimentelle Beiträge liefern soll über den Zusammenhang des Magnetismus des Eisens und der Schwingungszahl der magnetisirenden Wechselströme, an Wahrscheinlichkeit zu gewinnen.

Rasch alternirende Ströme kann man erhalten, wenn man Batterieen sich durch eine Leitungsbahn von genügend grossem Selbstinduktionscoefficienten entladen lässt. Die Schwingungszahl des Entladestroms kann duech Untersuchung des Entladefunkens im rotirenden Spiegel experimentell bestimmt werden. Sie ist abhängig von der Capacität der Batterie und der Selbstinduktion der Leitungsbahn. Würde man eine Batterie abwechselnd durch eine Leitungsbahn aus Kupfer und Eisen entladen, so hätte man eine Methode, um eine Verschiedenheit der beiden Selbstinduktionscoefficienten, und dadurch ein Maass für den Magnetismus des Eisendrahtes, zu bestimmen, die nur an dem Uebelstande leidet, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit des Spiegels, deren genaue Messung äusserst schwierig ist, quadratisch eingeht. Diesem Uebelstande wurde durch die folgende Versuchsanordnung abgeholfen.

Es wurden gleichzeitig 2 möglichst gleiche Batterieen benutzt, deren etwaige Ungleichheit durch Vertauschen eliminirt wurde. Die Entladekreise der beiden Batterieen hatten möglichst gleiche geometrische Configuration, doch war der eine aus Kupferdraht, der andere aus einem weichen Eisendraht von gleichem Querschnitte hergestellt. Beide Batterieen wurden gleichzeitig bis zum gleichen Potential geladen, in demselben Moment entladen, die beiden Funken gleichzeitig in einem rotirenden Spiegel zerlegt und die Funkenbilder auf einer photographischen Platte fixirt. Die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels braucht dann nur so genau bestimmt zu werden, um ein Maass für die Grösseanordnung der Stromwechselzahl zu erhalten. Denn die Ausmessung der photographischen Bilder lässt Unterschiede der Schwingungs-

dauer der beiden Ströme mit grösster Genauigkeit nachweisen.

Die Dimensionen der Batterieen und Leitungsbahnen wurden so gewählt, dass die Schwingungsdauer der halben Schwingung von $\frac{1}{26000}$ bis $\frac{1}{466000}$ Sekunde variirte.

Die Messungen ergaben folgendes:

1) Der Abstand der Oscillationen auf der Platte ist proportional der Schwingungsdauer. Die Schwingungsdauer der beiden oscillirenden Entladungen verhielten sich also wie diese Abstände, die Selbstinduktionscoefficienten aber wie die Quadrate derselben. Stets war der Selbstinduktionscoefficient der Eisenleitung der grössere und zwar war das Verhältniss der Coefficienten bei

$T_{\text{Schwing.)}}^{\text{(die halbe}} =$	$0{,}00000215$;	$0{,}00000791$;	$0{,}0000190$;	$0{,}0000380''$
$\frac{L_F}{L_C} =$	1,21 (Mittel aus 15 Platten)	1,36 (Mittel aus 14 Pl.)	1,18 (Mittel aus 11 Pl.)	1,38 (Mittel aus 16 Pl.)

Der Werth 1,36 dürfte zu gross ausgefallen sein, da bei einigen Platten sich unverhältnissmässig grosse Werthe ergaben. Diese Vermuthung wird durch die unter 2) gegebenen Zahlen noch mehr begründet. Es zeigt sich nun vor Allem, dass selbst bei den raschen Polwechseln von 466000 in der Sekunde sich der Magnetismus des Eisens noch deutlich bemerkbar macht. Der kleinste Werth $\frac{L_F}{L_C}$, der bei dieser grössten Schwingungszahl gefunden wurde, betrug 1,15. Hingegen zeigt sich nicht, wie ich anfangs erwartete, dass das Verhältniss dieser Coefficienten mit abnehmender Schwingungszahl stetig zunimmt. Erst bei $T = 0{,}000038''$ macht sich eine Zunahme bemerkbar. Versuche mit noch grösseren und kleineren Schwingungszahlen sind im Gange.

2) Bei konstantem Strome zeigten die beiden Leitungsbahnen eine Differenz ihrer Widerstände bis zu 25 Ohm, je nach der angewandten Drahtlänge. Es schien angebracht

diese Widerstände wenigstens für konstanten Strom auszugleichen. Das wurde so erreicht, dass in der Kupferleitung ein dünner Nickelindraht, in die Eisenleitung ein gleicher Kupferdraht eingeschaltet wurde. Diese dünnen Drähte waren so gewickelt, dass ihre Selbstinduktionscoefficienten möglichst klein wurden, und ihre Längen wurden so genommen, dass die Widerstände ausgeglichen waren. Es ergab sich dann:

$T =$	0,00000215;	0,00000791;	0,0000190;	0,0000380″
$\frac{L_F}{L_C} =$	1,19 (Mittel aus 12 Platten	1,22 aus 23 Platten	1,18 aus 18 Platten	1,40 aus 12 Platten.)

Eine Aenderung des Verhältnisses des Coefficient L ist also nicht eingetreten. Die Zahl 1,22 scheint die oben erwähnte Vermuthung zu bestätigen, dass die Zahl 1,36 in 1) zu gross ist.

3) Die Stromschwingungen bei diesen Batterieentladungen finden mit abnehmender Amplitude statt, bestimmt durch die Selbstinduktion und Widerstand der Leitungsbahn (bei gleicher Capacität der Batterieen). Bei den hier angestellten Versuchen zeigten die beiden Leitungsbahnen gänzlich verschiedene Dämpfungsverhältnisse. Benutzt man stets die gleiche Plattensorte, so werden die Schwingungen nicht mehr photographisch wirken, sobald ihre Amplitude unter einen gewissen Werth gesunken ist. Die Anzahl der photographirten Schwingungen auf der Platte giebt einen Maassstab für die Dämpfung derselben. Es ergeben sich bei

	$T =$	0,00000215;	0.00000791;	0,0000190;	0,0000380″
Halbe Schwingungen					
bei Cu	bei unausgeglichenen Widerständen des Stromkreises	20	29	22	21
„ Fe		11	8	5	5
bei Cu	bei ausgeglichenen Widerständen der Stromkreise	12	17	13	20
„ Fe		11	7	5	5

(Diese Zahlen sind Mittelwerthe der schon oben angegebenen Plattenzahl; bei den verschiedenen Platten zeigten diese Zahlen nur sehr geringe Differenzen.)

Die Schwingungen erleiden in dem Eisendrahte eine ausserordentlich viel stärkere Dämpfung als in demselben Kupferdrahte. Gleicht man die Widerstände der beiden Strombahnen für konstanten Strom aus, so zeigen beide Funken bei der kleinsten beobachteten Schwingungsdauer ungefähr gleich viele Schwingungen; bei den übrigen Schwingungsdauern aber ist die Anzahl derselben im Kupferdrahte 2, 3, resp. 4mal grösser als im Eisendrahte. Stefan hat in der oben citirten Abhandlung diese grössere Dämpfung im Eisen vorausberechnet unter der Annahme, dass mit grösserer Schwingungszahl die Stromfäden immer mehr in der Oberfläche des Drahtes liegen. Nimmt man das nicht an, so ist den älteren Anschauungen gemäss, nicht recht einzusehen, wie bei gleichem Widerstande und ziemlich gleichen Selbstinduktionscoefficienten diese ungleich stärkere Dämpfung zu Stande kommt.

Die grosse Verschiedenheit in der Anzahl der Schwingungen im Kupferdrahte bei kleinerem und grösserem Widerstande zeigt ferner, dass der Widerstand einer Leitung selbst bei grosser Polwechselzahl von 466000 pro Sekunde noch von Einfluss ist.

Bei den langsameren Schwingungen kommt der zur Widerstandsausgleichung beider Stromkreise zu der Kupferleitung addirte Zusatzwiderstand weniger zur Geltung. Da derselbe nur der Drahtlänge der Leitung proportional, der Selbstinduktionscoefficient aber ungleich rascher wächst.

Auf der beiliegenden Tafel I sind die Funkenbilder für 3 verschiedene Schwingungsdauern wiedergegeben und zwar bei nicht ausgeglichenen Widerständen der Kupfer- und Eisenleitung, da der Unterschied bei den Funken so am deutlichsten hervortritt.

Fig. I.

$$T = 0{,}0000380'' = \frac{1}{26300}''.$$

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältniss der Selbstinductionscoefficienten = 1.44

Verhältniss der Anzahl Schwingungen = $\frac{21}{6}$

Fig. II.

$$T = 0{,}000000[illegible]91 = \frac{1}{12[illegible]}.$$

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältniss der Selbstinductionscoefficienten = 1.25

Verhältniss der Anzahl Schwingungen = $\frac{27}{7}$

Fig. III.

$$T = 0{,}000000215 = \frac{1}{4650000}.$$

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältniss der Selbstinductionscoefficienten = 1.15

Verhältniss der Anzahl Schwingungen = $\frac{2[illegible]}{13}$

Ueber Verkettung.

Von Hermann Brunn.

(Mit Tafel II—IV.)

(Eingelaufen 19. März.)

I. Verkettete Ringe. Schema ihres Verkettungszustandes.

1. Man stelle sich Gebilde vor von der Art eines in sich zurücklaufenden Fadens, ganz gleichgültig, ob man dabei den Faden als Curve, als Fläche oder als Körper sich denkt, und lege diesem Faden die Eigenschaften einerseits der Beweglichkeit, Biegbarkeit und Dehnbarkeit, andrerseits der Unzerreissbarkeit und Undurchdringlichkeit bei.[1]) Ein solches Gebilde sei im Folgenden kurzweg als Ring bezeichnet.

2. Wenn eine Anzahl beliebig verschlungener Ringe vorliegt, so ergibt sich als ein zur Beschreibung des Ringsystem mit verwendbarer Begriff der des Verkettungszustandes. Dieser Begriff ist Gegenstand der folgenden Blätter, zu deren Abfassung ich die erste Anregung fand in zwei von Tait nebeneinandergestellten wesentlich verschiedenen Beispielen je dreier verketteten Ringe,[2]) und die sich inhalt-

---

1) Eine genauer eingehende Definition würde uns zu Umständlichkeiten verführen, die für das Folgende keinen Werth haben.

2) Siehe Figg. 1 und 2 auf Tafel II. Vgl. Tait, On knots, Transact. of the R. Edinb. Soc. 1876, Vol. 28. Plate XV Fig. 15 und Plate XVI Fig. 26.

lich an die Betrachtungen anreihen, mit denen Listing seine „Vorstudien zur Topologie“ abschliesst.

3. Verkettet mit einander sind Ringe dann, wenn die Weite, bis zu welcher sie von einander entfernt werden können, von ihren Dimensionen abhängt. Wenn eine Anzahl Ringe eine Kette bilden, so kann keiner vom andern über jede Weite hinaus entfernt werden, ohne dass mindestens einer von allen Ringen über jede Länge hinaus gedehnt würde, und es müssen, wenn man die Dimensionen der Ringe hinlänglich verkleinert, sämmtliche Ringe auf einen beliebig kleinen Raum zusammengezwungen werden.

4. Bildet ein Theil der Ringe einer Kette K, allein für sich betrachtet, ebenfalls eine Kette k, so heisse k eine Unterkette von K.

5. Nachdem der Begriff von verketteten Ringen dargestellt ist, lässt sich der von verketteten Ringketten leicht daraus ableiten.

6. Im Gegensatz zu Gebilden, die mit einander verkettet sind, sprechen wir von unverketteten oder „von einander freien“ Gebilden.

7. Unter der Beschreibung des Verkettungszustandes von n Ringen verstehe ich die genaue Angabe der Ketten, welche durch die Ringe gebildet werden, und der sämmtlichen in ihnen enthaltenen Unterketten. Diese Beschreibung wird durch ein jetzt zu bildendes Schema geleistet.

8. Man setze in eine erste Zeile die Namen der Ringe nebeneinander, etwa

$$1) \qquad R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots R_{n-1}, R_n$$

Dann bilde man die sämmtlichen Combinationen dieser Buchstaben zu zweien und untersuche, welche dadurch dargestellten Ringpaare, für sich allein betrachtet, mit einander verkettet sind, welche nicht. Die Bezeichnungen der ver-

ketteten Paare setze man in eine zweite Zeile nebeneinander, etwa:

2) $R_{i_1} R_{i_2}, \quad R_{i_3} R_{i_4}, \ldots\ldots, R_{i_{m-1}} R_{i_m}$

In eine dritte Zeile stelle man diejenigen Ringtripel, welche, für sich allein betrachtet, Ketten bilden, etwa:

3) $R_{k_1} R_{k_2} R_{k_3}, \; R_{k_4} R_{k_5} R_{k_6}, \ldots\ldots, R_{k_{l-2}} R_{k_{l-1}} R_{k_l}$

und so fahre man fort und stelle, allgemein gesprochen, in der m-ten Zeile die Ketten, resp. Unterketten von m Ringen zusammen. Das Schema bricht von selbst ab, spätestens mit der n-ten Zeile, welche für den Fall, dass sämmtliche Ringe in eine einzige Kette zusammentreten, ein Glied enthält. Die sämmtlichen Zeilen zusammen seien als das (Verkettungs-) Schema der n Ringe bezeichnet.

9. Es liegt nahe, die in einer Zeile stehenden Glieder von der 3. Zeile an in zwei Gruppen zu theilen. Das Bestehen der in einer Zeile vorkommenden Ketten und Unterketten ist entweder aus vorher angeschriebenen Zeilen ersichtlich, oder nicht. So z. B. würde aus dem Bestehen der beiden Ketten $ACEF$ und BCD das Bestehen einer Kette $ABCDEF$ folgen; denn da A, E und F mit C, C mit B und D zusammenhängt, so hängen sämmtliche sechs Ringe unter einander zusammen. Ueberhaupt immer, wenn Ketten einen oder mehrere Ringe gemeinsam haben, lassen sich andere, umfassendere als vorhanden erkennen.

10. Die aus früheren Zeilen zu folgernden Ketten einer Zeile setze man in eine erste, die übrigen in eine zweite Gruppe der Zeile und trenne beide Gruppen durch einen kräftigen Verticalstrich. Anbei (s. S. 80) folgt zur Erläuterung ein ausführlicheres Beispiel; die Unterketten sind mit durchlaufenden Nummern unterschrieben und bei den abgeleiteten links zugleich die Nummern vorhergehender Ketten, aus denen sie abgeleitet werden können, verbunden durch ein Pluszeichen angegeben.

11. Zur weiteren Erklärung des folgenden Beispieles vgl. auch 16.—18.

1. *a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z*

2.	*ab,* 1	*cd,* 2	*de,* 3	*dt,* 4	*hi,* 5	*hk,* 6	*ik,* 7	*pu,* 8	*xy* 9

3.	*cde,* 10, 2+8	*cdt,* 11, 2+4	*det,* 12, 8+4	*hik* 13, 5+7				*abc,* 14, 1+c *deg* 15, 8+g	*dgu,* 16 *wyz* 17
4.	*abcd,* 18, 2+14	*cdeg,* 19, 2+15	*cdet,* 20, 4+10	*cdgu,* 21, 2+16	*degt,* 22, 4+15	*degu,* 23, 3+16			*lmno* 27
		dgpu. 24, 8+16	*dgtu,* 25, 4+16	*wxyz* 26, 9+17					
5.	*abcde,* 28, 10+14	*abcdt,* 29, 11+14	*cdegt,* 30, 11+15	*cdegu,* 31, 10+16	*cdgpu,* 32, 2+27	*cdgtu,* 33, 4+21	*ikwyz* 37, 7+17	*frwyz* 38, 17+fr	*qrsvz* 39
		degpu, 34, 3+24	*degtu,* 35, 4+23	*dgptu* 36, 4+24					
6.	*abcdeg,* 40, 15+28	*abcdet,* 41, 4+28	*abcdgu,* 42, 16+18	*cdegpu,* 43, 8+31	*cdegtu,* 44, 4+31	*cdgptu,* 45, 4+32	*dethik* 50, 12+13	*frpwyz* 51, 38+p	
		degptu, 46, 4+34	*hikwyz.* 47, 5+38	*ikwxyz,* 48, 9+37	*frwxyz* 49, 9+38				
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮				
21.	*abcdefghikpqrstuvwxyz* 8+v+39+40+50+51								

12. Die abgeleiteten Ketten lassen sich oft auf mehrfache Weise aus vorhergehenden zusammensetzen, wie z. B. Kette 41: *a b c d e t* statt mit 4 + 28 auch mit 28 + 12 etc. unterschrieben sein könnte.

13. Das gegebene Schema ist nur bis zur 6. Zeile ausgeführt, und angenommen, dass von hier ab in den rechten Zeilenhälften keine neuen Ketten mehr auftreten. Jedenfalls reicht das Schema dann bis zu der wieder angeschriebenen 21. Zeile, und man sieht, dass das ganze Ringsystem aus den von einander freien Ketten

a b c d e f g h i k p q r s t u v w x y z und *l m n o*

besteht.

14. Die rechten Gruppen sämmtlicher Zeilen zusammen wollen wir als die rechte, die linken Gruppen zusammen als die linke Schemahälfte bezeichnen. Die erste und zweite Zeile haben gar keine linke Gruppe und müssen vollständig zur rechten Schemahälfte gerechnet werden.

15. Durch Weglassen der linken Hälfte wird der Inhalt dessen, was das Schema uns lehren kann, in keiner Weise vermindert, da die linke Hälfte stets mittels der rechten reconstruirt werden kann. Es dürfte aber trotzdem in den meisten Fällen sich empfehlen, die linke Hälfte auch auszuführen, resp. beizubehalten.

16. Für die weitere Anordnung der Glieder können sehr verschiedene Gesichtspunkte maassgebend werden.

Für unsere Zwecke nehmen wir in der rechten Hälfte eine bestimmte weitere Eintheilung vor, zusammenhängend damit, dass die Glieder einer Zeile Glieder vorhergehender Zeilen als Unterketten enthalten können oder nicht. Jede rechte Zeilenhälfte wird in drei Theile getheilt. Es werden immer gestellt

in das erste Drittel: Die Glieder, welche aus lauter (bereits vorhergegangenen) Unterketten zusammengesetzt sind;

in das zweite Drittel: Die Glieder, welche Unterketten enthalten, ausserdem aber noch eine Gruppe *G* von Buchstaben, welche zusammen keine Unterkette bilden;
in das dritte Drittel: Die Glieder, welche gar keine Unterketten enthalten.

17. Die ersten Drittel der sämmtlichen rechten Zeilenhälften seien als erstes Drittel der rechten Schemahälfte bezeichnet, und entsprechend seien die Benennungen zweites und drittes Drittel zu verstehen.

18. Die Zeilendrittel halte man durch kleinere Vertikalstriche auseinander, oder man bilde, wie in dem Beispiel geschehen, gleich drei durchgehende Kolumnen von der 3. Zeile an. Sollten gewisse Drittel gar keine Glieder enthalten, so wird es doch gut sein, trotzdem die Trennungsstriche zu setzen.[1] In dem Beispiel 11 enthält nur Zeile 5) Ketten in allen drei Dritteln der rechten Hälfte, Zeile 3) nur zweites und drittes Drittel, Zeile 4) nur ein drittes Drittel, Zeile 6) nur die zwei ersten Drittel. Für die Ketten der ersten zwei Drittel ist durch die untergeschriebenen Summen angedeutet, aus welchen Unterketten und Buchstabengruppen *G* sie zusammengesetzt sind.

II. Bildung von Ketten, deren Schema ein gegebenes ist.

19. Man würde sich den Gegenstand dieses Aufsatzes zu einfach vorstellen und den Zweck der Aufstellung eines so allgemeinen Schema's nicht einsehen, so lange man nur an die gewöhnlich sich darbietende Art der Verkettung denken wollte. Die gewöhnlichsten Ketten haben ein Schema, dem abgesehen von Zeile 2) die rechte Hälfte ganz fehlt. Unser Begriff der Verkettung ist aber ein viel weiterer, und es kann das Zusammenhängen

1) Aehnliches gilt für die Trennungsstriche der Hälften.

einer Anzahl von Ringen in viel absonderlicheren Weisen stattfinden, auf welche eben hingewiesen werden soll.

20. Dies wird ersichtlich, wenn wir zeigen, dass jedes Schema eine Beschreibung wirklich vorhandener darstellbarer Ketten liefert.

Wir sagen: jedes Schema; vorausgesetzt ist dabei natürlich, dass ein Schema stets die Buchstabenbezeichnung jener Ketten und Unterketten enthalten muss, welche aus anderen Unterketten mit Nothwendigkeit sich ergeben. Es ist z. B. keine Kette denkbar, deren Schema die Glieder AB und AC enthält, ohne zugleich das Glied ABC zu enthalten.

Es genügt für unseren Zweck, anzugeben, wie man zu einem beliebig gegebenen Schema irgend eine zugehörige Kette construirt, und es liegt uns fern, die Gesammtheit der durch das Schema beschriebenen Ketten erschöpfen zu wollen.

21. Es kann hier das Geständniss nicht umgangen werden, dass die folgenden Nachweise an dem allen jenen Verschlingungs- und Verknotungsuntersuchungen gemeinsamen Uebel kranken, welche über die durch Anwendung des Gauss'schen Verschlingungsintegrals gesteckte Grenze hinausgehen. Eine mathematisch strenge und auf jeden Fall anwendbare Formulirung der Merkmale, wann zwei oder mehr Ringe untrennbar verbunden sind, liegt zur Zeit nicht vor, trotz mancher in dieser Richtung gemachten Anstrengungen. Wie die meisten der bekannten Tait'schen und Simony'schen Untersuchungen sind daher auch die folgenden vorläufig zum Theile auf den Boden der Empirie gestellt.

Eine allgemeine Methode.

22. Jedermann weiss, dass man zwei Ringe nach Maassgabe von Fig. 3 Taf. II mit einander verketten und durch

Aufschneiden des einen von beiden wieder von einander frei machen kann.

23. Auffälliger ist schon die Möglichkeit, 3 Ringe so ineinander zu verflechten, dass kein Paar derselben verkettet ist, sondern alle drei Ringe frei werden, sobald ein beliebiger aufgeschnitten wird.

Tait gibt ein Beispiel für diese Möglichkeit, welches wir in Fig. 2 reproduciren.[1])

24. Wir sind nun weiter gegangen und haben in Fig. 4 und Fig. 5 Taf. II Ketten von 4, resp. 5 Ringen gebildet, welche ganz entsprechende Eigenschaften zeigen, d. h. sofort vollständig zerfallen, sobald irgend einer der Ringe aufgeschnitten wird.

Ja, es lässt sich allgemein folgender, auf den ersten Blick sehr unwahrscheinliche Satz behaupten:

25. Es lassen sich beliebig viele Ringe R so zu einer Kette K verbinden, dass in K gar keine Unterketten vorhanden sind. Zerschneidet man einen einzigen ganz beliebigen der Ringe R, so werden sofort sämmtliche R frei von einander.

26. Nachdruck ist darauf zu legen, dass das Zerfallen bei der Zerschneidung eines ganz beliebigen der Ringe eintritt, denn Beispiele für Ketten aus n Ringen, die bei Zerschneidung eines bestimmten Ringes in ihre Elemente zerfallen, liegen auf der Hand: Man denke sich nur beliebig viele Ringe auf einen andern aufgereiht, wodurch eine Kette entsteht, deren rechte Schemahälfte die Form

1) $A, B, C \ldots\ldots N$

2) $AB, AC \ldots\ldots AN$

hat, und welche beim Zerschneiden des Ringes A, aber keines andern in ihre Elemente zerfällt.

1) Siehe Citat bei 2.

27. Wir wollen ein Verfahren angeben, welches Ketten obiger Art herzustellen gestattet. Um es hinlänglich zu illustriren, ist es in den Figg. 3 (Taf. II), 6 und 7 (Taf. IV), 8 und 9 (Tafel III) für 2, 3, 4, 5 und 6 Ringe ersichtlich gemacht.

28. Allgemein gesprochen werden dabei, wenn n Ringe eine Kette sub 25. bilden sollen, $n-1$ derselben, $A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$, der Uebersichtlichkeit wegen wie ein System concentrischer Kreise angeordnet, ein n-ter, A_1, in eigenthümlicher Weise in dieselben verflochten. Zur Beschreibung des Verfahrens dient am besten die vollständige Induction. Um die Art des Fortschreitens von n zu $n+1$ Ringen zu characterisiren, wird es genügen, in Worte zu fassen, wie aus der Kette von 5 Gliedern die von 6 Gliedern abgeleitet wird.

29. In Fig. 9 tritt zu den 4 concentrischen Ringen A_2, A_3, A_4, A_5 der Fig. 8 ein weiterer, A_6, aussen hinzu. Die Lage des durchgeflochtenen Ringes A_1 gegen A_2, A_3, A_4 bleibt vollständig ungeändert, die Aenderung der Verknüpfungsart äussert sich nur an seinem Verhalten gegen den früher äussersten Ring A_5 und den neuen A_6.

30. Für A_5 steigt die Zahl der „Ueberkreuzungen" mit A_1 auf das doppelte; man kann sagen, an Stelle jeder bisherigen Ueberkreuzung treten zwei neue, z. B. an Stelle[1]) von x_1 in Fig. 8 tritt x_1 und x_2 in Fig. 9, an Stelle von x_3 in Fig. 8 x_5 und x_6 in Fig. 9.

31. In Fig. 8 geht der Ring A_1 von einer Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl zur nächsten rechts immer so fort, dass er dabei von einer Seite des Ringes A_5 auf die andere tritt. In Fig. 9 hingegen geht der Ring A_1 von einer Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl zur nächsten rechts so fort,

1) Wir numeriren auf den concentrischen A die Ueberkreuzungen von links nach rechts, wie auf den Figuren zu sehen, und bezeichnen eine Ueberkreuzung mit x und ihrer Ordnungszahl als Index.

dass er auf der nemlichen Seite von A_5 bleibt. In Fig. 8 fand zwischen zwei Ueberkreuzungen $x_{2\nu+1}$ und $x_{2\nu+2}$ ein Umfangen, Unterqueren von A_5 durch A_1 statt; an dessen Stelle tritt jetzt sozusagen ein „Reiten" von A_1 auf A_5 zwischen zwei Paaren von Ueberkreuzungen $x_{4\nu+1}$, $x_{4\nu+2}$ und $x_{4\nu+3}$, $x_{4\nu+4}$, indem A_1 auf jeder Seite von A_5 eine Schleife herabhängen lässt. In Fig. 9 befindet sich ferner allgemein bei x_{2n-1} und x_{2n} A_1 auf der nemlichen Seite von A_5 wie in Fig. 8 bei x_n.

32. Nun zu A_6! Mit diesem Ring bildet A_1 geradesoviel Ueberkreuzungen wie mit A_5 und wir nennen die Ueberkreuzungen gleicher Ordnungszahl auf A_5 und A_6 entsprechende. Die Ueberkreuzungen entstehen, indem A_6 jede der von A_5 herabhängenden Schleifen einmal durchbohrt. A_1 befindet sich daher, gerade im Gegensatz zu dem Verhalten entsprechender Ueberkreuzungen auf A_5, auf verschiedenen Seiten von A_6, wenn man eine Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl und die rechts folgende ins Auge fasst.

Ferner:

33. Bezeichnet man das Vornlaufen von A_1 bei einer Ueberkreuzung mit v, das Hintenlaufen mit h, so entspricht jeder Reihe von Ueberkreuzungen eine Reihe von Buchstaben v, h, und es gilt die Regel: Einer Buchstabenfolge $v v h h$ resp. $h h v v$ auf A_5 muss eine symmetrische Buchstabenfolge auf A_6 entsprechen, also entweder $v h h v$ oder $h v v h$.

Schliesslich:

34. Symmetrieen von Buchstabenfolgen auf A_5 müssen in den entsprechenden Buchstabenfolgen von A_6 erhalten bleiben.

35. Durch die unter 30—34 gegebenen Regeln sind nun auf A_6 die Ueberkreuzungen vollständig bestimmt bis auf eine beliebige, die zu Anfang willkürlich gewählt werden

darf. Wir dürfen also z. B. bestimmen, dass die Ueberkreuzung der Ordnungszahl 1 stets den Buchstaben v zugetheilt erhält.

36. Es lässt sich die Anordnung der Ueberkreuzungen durch ein Schema wiedergeben, indem man die Ueberkreuzungsbuchstaben der Ringe A_2, A_3 . . . in aufeinanderfolgende, mit A_2, A_3 . . . bezeichnete Zeilen setzt.

Für zwei Ringe erhält man das Schema:

A_2: $v \quad h$

für drei Ringe:

A_2: $v\,v \quad h\,h$
A_3: $v\,h \mid h\,v$

für vier Ringe:

A_2: $v\,v \quad h\,h$
A_3: $v\,v\,h\,h \mid h\,h\,v\,v$
A_4: $v\,h\,h\,v \mid v\,h\,h\,v$

für fünf Ringe:

A_2: $v\,v \quad h\,h$
A_3: $v\,v\,h\,h \mid h\,h\,v\,v$
A_4: $v\,v\,h\,h \mid h\,h\,v\,v \mid v\,v\,h\,h \mid h\,h\,v\,v$
A_5: $v\,h\,h\,v \mid v\,h\,h\,v \mid v\,h\,h\,v \mid v\,h\,h\,v$

etc. etc.

Die senkrechten Linien deuten Symmetriemitten an, und setzen sich, wenn sie in einer Zeile zum Vorschein gekommen sind, nach unten durch alle folgenden Zeilen fort.

37. Dass ein nach diesen Vorschriften gebildetes System wirklich eine Kette bildet, davon mag man sich durch das Experiment überzeugen. Vergl. übrigens 21.

38. Dass diese Ketten aber bei Zerschneidung eines einzigen beliebigen Ringes sofort in ihre sämmtlichen Elemente zerfallen, soll jetzt eingehend gezeigt werden.

Selbstverständlich ist das Zerfallen, wenn der zerschnittene Ring gerade A_1 ist.

Zerschneidet und entfernt man den äussersten Ring, so kann A_1, weil es auf den übrigen Ringen nur „reitet", einfach von ihnen abgehoben werden, wie ein Reiter vom Ross.

Zerschneidet und entfernt (= „löscht") man den zweiten Ring von aussen, so kann man alle Schleifen, mit denen A_1 auf diesem Ringe „ritt", nach unten fallen lassen, wofür die von der Mitte dieser Schleifen ausgehenden Symmetrieen von Wichtigkeit sind, und findet dann den äussersten Ring nirgends mehr unterquert. Daher steht dem Abheben des Ringes A_1, der auf den Ringen innerhalb des zerschnittenen nur reitet, nichts im Wege.

Löscht man den dritten Ring von aussen, so werden die auf diesem reitenden Schleifen frei, und lassen sich, wieder in Folge der Symmetrieen, die in den zwei äusseren Ringen von ihren Mitten ausgehen, durch einfaches Abwickeln resp. Durchschieben ganz aus denselben herausflechten. Auf den weiter innen liegenden Ringen findet wieder nur ein Reiten statt und dem Abheben von A_1 steht nichts im Wege.

39. Ueberhaupt: Löscht man einen beliebigen der concentrischen Ringe, so besteht die sichtbarliche Freimachung des Ringes A_1 von den übrigen nach Richtung der äussern in einem Abwickeln und Durchschieben der Schleifen, welche auf dem zerschnittenen Ringe geritten waren, nach Richtung der innern Ringe in einem Abheben. Die erste Operation ist stets wesentlich bedingt durch die von der Mitte jener Schleifen ausgehenden Symmetrieen der Ueberkreuzungsbuchstaben, welche die Ueberkreuzungen stets paarweise aufzuheben gestatten.

Dass nach Ausflechtung von A_1 die übrigen Ringe alle frei sind, ist von selbst klar.

40. Wir werden nun keine Schwierigkeit haben, auch die Möglichkeit des folgenden einzusehen:

Beliebige von einander freie Ketten A, B....N, bestehend aus Ringen A_1, A_2 ... A_α; B_1, B_2 .. .B_β; .... N_1 N_2 ... N_ν respective können in der Weise zu einer Kette P vereinigt werden, dass, beim Zerschneiden eines einzigen beliebigen Ringes, P in die sämmtlichen Ketten A, B, ... N zerfällt. Besser gesagt: Das Resultat der Aufschneidung ist das nemliche, als ob der Schnitt an den von einander freien Ketten A, B ... N ausgeführt worden wäre.

41. Man denke sich in den Figg. 3, 6, 7, 8, 9 die Ringe, statt sie in den ungezeichneten, resp. punctirten Theilen kreisförmig und von einander frei zu ergänzen, dort beliebig mit einander verschlungen, oder anders gesprochen: Man zerre aus den beliebig mit einander verketteten oder nicht verketteten Ringen A_1 A_2 ... N_ν Theile so hervor, dass sie die Anordnung wie in den als Muster dienenden Figuren 3—9 erhalten, und denke sich einen beliebigen derselben wie A_1 in die andern hineingeflochten. Bei der an unseren Ringen (s. 1) vorausgesetzten unbegrenzten Dehnbarkeit ist dies stets zulässig. Sobald man eine der Curven A_1, A_2 ... N_ν zerschneidet, bedeutet die neu hinzugekommene Verflechtung nur eine für den Verkettungszustand des Systems irrelevante Lagenänderung, die Ketten A, B ... N trennen sich.

42. Man könnte einen Augenblick denken, dass die neu hinzugefügte Verkettung früher vorhandene Verkettungen zerstören könnte, indem sich neue Ueberkreuzungen gegen alte aufheben liessen. Alsdann würden wir nicht wissen, ob bei unserem Versuch, aus A_1 ... N eine einzige Kette P zu bilden, nicht vielmehr frühere Ketten in Unterketten zerfielen und würden in grosser Verwirrung sein. In Wahrheit ist die Gefahr nicht vorhanden; weil eben die neue Verkettung nur für die Gesammtheit der Ringe wirksam (s.

oben 41) und somit für die anfangs vorhandenen Verkettungen, die sich nur auf einen Theil der Ringe beziehen, völlig belanglos ist.

43. Das geschilderte Verfahren reicht vollkommen aus, um bei beliebig gegebenem Schema eine dementsprechende Kette zu bilden. Man bilde der Reihe nach die in der rechten Schemahälfte vorkommenden Unterketten, die der linken Hälfte entstehen dann von selbst. Die Möglichkeit, dass Ringe oder Unterketten zu einer Kette zusammentreten, nachdem sie schon zur Bildung andrer Ketten verwendet und in denselben befangen sind, stört in keiner Weise. Es macht also gar nichts, dass z. B. nach zwei Ketten *a b c d* und *e f g h* eine Kette *a c f g* im Schema auftreten kann. Nur ein Paar Worte sind oben in 42 zu verändern, um die dortigen Schlussfolgerungen auch auf diesen Fall anzuwenden.

Andre Methoden, um speciell Ketten ohne Unterketten zu bilden.

44. Da speciell die Ketten ohne Unterketten, welche unter 25. erwähnt sind, einiges Interesse erwecken dürften, so sollen noch zwei andre Methoden angegeben werden, um solche Ketten zu bilden.

45. Man denke sich auf eine Ebene einen kreisförmigen Ring B gelegt, darüber einen ebensolchen Ring A, so dass die beiden Kreisflächen sich zum grössten Theile überdecken, und A etwas mehr nach links liegt. Dann schlage man — die Ebene wird weggedacht — den Theil des Ringes A, der innerhalb des Umfanges von B liegt, nach unten und links, den Theil von B, der innerhalb A liegt, nach oben und rechts, so werden A und B nach dem Muster von Fig. 11 zusammengesetzt sein. Operation wie Resultat wollen wir mit dem Symbol $[A\,B]$ bezeichnen. $[A\,B]$ bildet keine Kette, sondern die beiden Ringe sind frei von einander.

46. $[A\,B]$ erinnert, so wie es in Fig. 10 gezeichnet ist, mit den bei p und q nahe sich umwindenden und im übrigen eng nebeneinanderherlaufenden Strängen, selbst an die Gestalt eines Ringes, der bei r seinen Durchgang hat und kreisförmig verläuft.

47. Diese Vorstellung des Ringartigen bei $[A\,B]$ lässt sich verstärken und die Handhabung des Gebildes als Ring erleichtern dadurch, dass man $[A\,B]$ in das Innere eines Hohlringes eingeschlossen denkt, resp. einschliesst, der es wie eine Haut umgibt und zusammenhält. Natürlich kann die Hilfsvorstellung resp. Hilfsvorrichtung des Hohlringes jederzeit wieder beseitigt werden.

48. Es wird jetzt, und noch mehr durch die folgende Verwendung, erklärlich sein, warum wir das Gebilde $[A\,B]$ als „Systemring" uns zu bezeichnen erlauben, trotzdem es nicht ein Ring nach der Definition 1 ist.

49. Wir können in dem Systemring $[A\,B]$ offenbar an Stelle von A und B selbst Systemringe treten lassen, wodurch Gebilde der symbolischen Bezeichnung

$$\big[[A\,B]\,C\big],\quad \big[A\,[B\,C]\big],\quad \big[[A\,B]\,[C\,D]\big]$$

entstehen, die selbst wieder als „Systemringe" bezeichnet und gehandhabt werden dürfen.

Man kann mit diesen Systemringen wieder die nemlichen Operationen vornehmen, wie mit den bisherigen einfachern, also z. B. Gebilde der symbolischen Bezeichnung

$$\big[[A\,B]\,[C\,D]\,E\big],\quad \big[[A\,B]\,[C\,D]\,[E\,F]\big] \text{ etc.}$$

herstellen, wodurch man zu immer complicirteren Systemringen gelangt.

50. Jeder Systemring S hat die Eigenschaft, aus zwei einfacheren Systemringen (resp. Ringen) S_1 und S_2 zusammengesetzt zu sein, und einen Hauptdurchgang zu besitzen,

der einerseits durch die Stränge von S_1, andrerseits durch die von S_2 begrenzt wird.

51. Keiner der behandelten Systemringe bildet eine Kette; sie bestehen aus lauter freien, nur in eigenthümlicher Weise zusammengelegten Ringen.

Sobald jedoch durch die Hauptöffnung eines solchen Systemringes S ein Ring oder andrer Systemring T geführt wird in der Weise, dass eine Verkettung stattfinden würde, sobald an Stelle von S und T einfache Ringe träten — am einfachsten also nach Muster von Fig. 3 —, so sind auf einmal sämmtliche Ringe mit einander verkettet und zwar liegt dann eine Kette ohne Unterkette vor. Der Schlussring versperrt sämmtlichen Ringen die Wege, auf denen sie aus den andern hervorgezogen und von ihnen frei gemacht werden könnten. Man überzeuge sich durch Experimente und erinnere sich an 21.

52. Dass ein vollständiges Zerfallen eintritt, sobald ein Ring R_1 in einem der Systemringe, sagen wir in S_1, zerschnitten wird, lässt sich folgendermaassen klar machen:

Innerhalb S ist R_1 jedenfalls mit einem andern Ring oder Systemring R_2 nach Muster von Fig. 11 zusammengelegt, später eventuell noch gefaltet worden. Führen wir den Schnitt an R_1 in der Nähe von p,[1]) so lässt sich dort der Systemring auseinanderzerren, ganz gleichgültig, welche Verbindungen er noch mit andern Ringen eingegangen ist, und verhält sich in Folge dessen in Bezug auf seinen Hauptdurchgang r nicht mehr wie ein Ring, sondern wie ein zweiendiger Faden. $[R_1\, R_2]$ war wieder mit einem andern Ring oder Systemring R_3 zu einem Systemring zusammengelegt worden, der sich nach der mit $[R_1\, R_2]$ vorgegangenen Veränderung selbst wie ein zweiendiger Faden verhält; etc. etc.

1) Nur der bequemeren Vorstellung wegen; die Stelle, wo der Schnitt geführt wird, ist gleichgültig.

so schliesst man fort und sieht schliesslich, dass S selbst sich wie ein zweiendiger Faden verhält nnd von T befreit werden kann; worauf alles zerfällt, da T allein ja keine Kette bildet.

53. Ein weiteres ganz besonders einfaches und symmetrisches Verfahren, um Ketten mit beliebig vielen Ringen ohne Unterketten zu bilden, ist durch Fig. 42 angedeutet. Es ist nur ein Stück der Kette gezeichnet, welche unter stets gleicher Wiederholung der Glieder, in Richtung des Pfeilbogens in sich zurücklaufend zu denken ist.

54. Es möge schliesslich noch bemerkt werden, dass diese Ketten mit den vorher unter 51 geschilderten eine viel grössere Verwandtschaft haben, als auf den ersten Blick ersichtlich ist.

III. Zerschneidungszahlen einer Kette.

Charakteristische Zahlen einer Kette im Allgemeinen.

55. Der für unsere Vorstellung einfachste Zustand von n Ringen ist der, wo sie sämmtlich unverkettet sind. Wir sind daher geneigt, jede Kette daraufhin zu beurtheilen, ob sie diesem Zustande nah oder ferne steht, und bezeichnen dementsprechend die Ringe als schwächer oder stärker verkettet. Diesen Grad der Verkettung kann man durch verschiedene charakteristische Zahlen darzustellen, zu messen versuchen.

56. Um eine erste derselben zu definiren, stellen wir uns die undurchdringlich gedachten Ringe einen Augenblick als durchdringlich für einander vor, und definiren sie als die geringste Anzahl der gegenseitigen Ringdurchdringungen, welche nöthig wird, um sämmtliche Ringe von einander zu trennen. Ueber diese Zahl sagt uns unser Schema gar nichts

aus, und um sie zu untersuchen, müssten wir über den Rahmen dieses Aufsatzes hinausgehen. Wir schreiten daher zu einer andern charakteristischen Zahl fort.

57. Vorausschickend bemerken wir, dass unter einem Querschnitt ein Schnitt verstanden werden soll, der einem Faden seine ringförmige Natur nimmt, und ihn in einen solchen mit zwei Enden verwandelt.

58. Man kann sich nun fragen: Welches ist die geringste Anzahl von Querschnitten, welche man an den gedachten Ringen ausführen muss, um dieselben sämmtlich von einander frei zu machen?

59. Und andrerseits: Welches ist die grösste Anzahl von Querschnitten, die man zur Zerfällung der Ketten in ihre Bestandtheile ausführen kann unter der Bedingung, dass nie ein bereits frei gewordener Ring zerschnitten wird?

60. Wir nennen die erste Zahl kurz die Minimalzerschneidungszahl, die zweite die Maximalzerschneidungszahl unseres Ringsystems.

Ableitung der Zerschneidungszahlen für eine specielle Art von Ketten.

61. Wir behandeln zunächst die Zerschneidungszahlen solcher Ketten, in deren Schema die linke Hälfte vollständig fehlt.

Ein solches Schema enthält kein einziges Glied, dessen Vorhandensein aus Gliedern, die in vorhergehenden Zeilen angeschrieben sind, nothwendig folgen würde, wie etwa aus zwei Gliedern AB und BC der zweiten Zeile nothwendig ein Glied ABC für die dritte Zeile sich ergibt.

62. Wenn zwei in einem solchen Schema vorkommende (Ketten resp.) Unterketten Ringe gemeinsam haben, so muss eine derselben sämmtliche Ringe der andern enthalten, mit

andern Worten: Unterketten des Schema's, welche Ringe gemeinsam haben, können einander nicht coordinirt, sondern eine von beiden muss der andern subordinirt sein.

63. Daraus folgt:

1) Die in den Gliedern einer Zeile auftretenden Ringe müssen sämmtlich von einander verschieden sein, somit können das zweite und dritte Drittel einer Zeile keine Ringe gemeinsam haben wie im allgemeinen Falle.

2) Die in den Gliedern des dritten Drittels vorkommenden Ringe sind sämmtlich von einander verschieden, während beim allgemeinen Falle im dritten Drittel ein und derselben Zeile gleiche Ringe in verschiedenen Gliedern vorkommen können.

3) Schneidet man einen Ring einer Kette des letzten Drittels auf, so werden sofort alle Ringe dieser Kette gänzlich frei, nicht bloss frei von einander.

Denn bliebe ein Theil T der Ringe dieser Kette, welche ausserdem noch die durch T' angedeuteten Ringe enthalten soll, mit nicht in der Kette enthaltenen Ringen U verkettet, so würde eine Kette mit den Gliedern $T + T' + U$ sich ergeben, die aus den Ketten $T + T'$ und $T + U$ ableitbar und daher in die linke Seite des Schema's zu setzen wäre, welche doch frei bleiben soll. Dass die Ringe T allein für sich zum Theil verkettet bleiben, ist ersichtlich ebenfalls ausgeschlossen.

Minimalzerschneidungszahl μ.

64. Es ist klar, dass, um das Ringsystem in seine Elemente zu zerlegen, in jeder Kette des dritten Drittels ein Schnitt geführt werden muss, da diese Ketten anders nicht aufgelöst werden können, und keiner dieser Schnitte seinen Einfluss auf zwei Ketten des dritten Drittels erstreckt.

65. Andrerseits folgt aus Satz 3) des letzten Abschnittes 63, dass nach Ausführung dieser Schnitte sämmtliche Ringe

vollständig frei sind. Die Minimalzerschneidungszahl ist also hier gleich der Anzahl der Glieder des dritten Drittels:

$$\mu = \delta_3.$$

66. Um eine deutlichere Einsicht von der Richtigkeit dieses Satzes zu bekommen, könnte man den Einfluss der successiven Schnitte auf den Verkettungszustand des Ringsystems verfolgen, was wir aber hier der Kürze halber übergehen.

Maximalzerschneidungszahl M.

67. Bei Ableitung der Maximalzerschneidungszahl wird ein Umstand wichtig, der bei Ableitung der Minimalzerschneidungszahl belanglos war: Die Reihenfolge der Schnitte.

68. Sind M Ringe gefunden, bei deren Zerschneidung in bestimmter Reihenfolge das Ringsystem erst mit dem M-ten Schnitte in seine Elemente zerfällt, so gibt es sicher andre Reihenfolgen, bei deren Einhalten dieses Zerfallen vor dem M-ten Schnitte eintritt.

69. Jedenfalls lässt sich aus den M Ringen ein System von δ_3 Ringen herausheben, das mit jeder im dritten Drittel stehenden Kette nur je einen Ring gemein hat. δ_3 ist dann die Minimalzerschneidungszahl μ, s. den Schluss des vorigen Abschnittes, und das ganze System zerfällt schon nach dem μ-ten Schnitte, wenn man gerade die herausgehobenen μ Ringe zuerst aufschneidet.

70. Die $M-\mu$ übrigen Ringe können offenbar nicht in Ketten des dritten Drittels vorkommen, da sonst mindestens in einer derselben zwei Ringe aufgeschnitten würden. Dies hiesse aber, einen bereits ganz freigewordenen Ring aufschneiden (s. 63. 3)), was ausgeschlossen sein soll (s. 59). Es müssen daher Ringe sein, deren erstes Auftreten im zweiten Drittel erfolgt, als zu Gruppen G gehörig (s. 16). Schneidet man einen solchen Ring auf, so zerfällt die be-

treffende Kette in die zur Gruppe G gehörigen Ringe und in Unterketten, welche bereits in früheren Zeilen vorkommen; ausserdem können in den ersten zwei Dritteln von folgenden Zeilen dadurch Kettenzertheilungen eintreten, nicht aber in vorhergehenden. Die Ketten des letzten Drittels bleiben ganz unbeeinflusst.

71. Um nun die Zerfällung des ganzen Systems erst nach möglichst viel Schnitten eintreten zu lassen, beginne man in der letzten Zeile, welche ein zweites Drittel aufweist, und schneide in jedem Gliede des zweiten Drittels einen, gleichgültig welchen Ring der Gruppe G auf. Dann behandle man nach dem nemlichen Verfahren die vorhergehende Zeile, und so fort. Schliesslich wird man in jedem Gliede des zweiten Drittels einen Schnitt geführt haben, im Ganzen δ_2 Schnitte. Hierauf lässt sich aber kein weiterer Schnitt machen, der nicht eine Kette des letzten Drittels angreifen würde.

72. Die Maximalzerschneidungszahl ergibt sich nach diesen Betrachtungen gleich der Summe der Anzahlen der in den letzten Dritteln stehenden Glieder:

$$M = \delta_2 + \mu = \delta_2 + \delta_3.$$

73. Es ist auch klar, dass die Zerschneidungszahl des Systems jeden zwischen μ und M liegenden Werth annehmen kann. Man kann ja von den δ_2 Schnitten im zweiten Drittel (s. 71) eine beliebige Theilanzahl ausführen und dann zu den μ Schnitten im dritten Drittel übergehen (s. 69).

Die Zerschneidungszahlen für allgemeine Formen der Kette.

74. Die Zahlen μ und M lassen sich für Ketten allgemeiner Schemaform nicht in ähnlich einfacher Weise ableiten; man kann einige Regeln angeben, welche unnöthige

Umwege vermeiden lassen, und scheint im Uebrigen auf das Durchprobiren der verschiedenen Möglichkeiten angewiesen.

75. Zunächst ist für die Aufsuchung von μ wichtig, dass das ganze System dann und erst dann in seine Bestandtheile zerlegt ist, wenn die Glieder des letzten Drittels zweiter Hälfte im Schema in die ihren zerfällt sind. Es handelt sich also darum, diese Glieder durch möglichst wenig Schnitte vollständig zu zerfällen.

76. Geht man die Glieder des letzten Drittels durch und sucht eine Anzahl solcher heraus, welche aus lauter verschiedenen Buchstaben bestehen, es seien die Glieder $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_\nu$, so ist ν eine untere Grenze für μ. Es müssen mindestens ν Ringe $A_1, A_2, A_3 \ldots A_\nu$ zerschnitten werden, welche resp. den Gliedern $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \ldots \Gamma_\nu$ angehören.

Dadurch wird die Auswahl der zu zerschneidenden Ringe unter Umständen wesentlich beschränkt.

77. Für M ist Folgendes zu bemerken;

Jedes Glied des zweiten Drittels rechter Hälfte ist zusammengesetzt aus Gliedern vorhergehender Zeilen und ausserdem aus Ringen G, die zusammen kein vorhergehendes Glied bilden, obwohl sie in solchen vorhergehenden Gliedern vorkommen können. Zunächst kennzeichne man in jedem Gliede die Ringe G; weiterhin unter diesen wieder die, welche in keinem Glied des letzten Drittels vorkommen: sie mögen G' heissen. Durch Zerschneiden eines G' wird ein Glied zweiten Drittels rechter Hälfte in Unterketten vorhergehender Zeilen und die Ringe G zerlegt. Man beginne nun (vgl. 71) damit, in jedem Gliede der letzten Zeile, die ein zweites Drittel enthält, einen Ring G' aufzuschneiden und schreite dann zu vorhergehenden Zeilen weiter.

78. Es ist aber jetzt möglich, dass die Auswahl des G' im einzelnen Gliede nicht mehr gleichgültig ist, wie bei den speciellen Schemata 61, weil sehr wohl einzelne Ringe in

der Gesammtheit der G' mehrfach vorkommen können. Es ist also zu ermitteln, bei welcher Auswahl der zu zerschneidenden G' die meisten Schnitte möglich sind, ehe sämmtliche G sich loslösen.

Es sei M_1 diese Maximalzahl.

79. Dann mache man, ebenfalls durch Probiren die Maximalzahl der Schnitte ausfindig, welche geführt werden kann, bis sämmtliche Ketten im letzten Drittel zerfallen: Sie sei M_2. Dann ist

$$M = M_1 + M_2.$$

80. Fassen wir den Inhalt dieses Aufsatzes noch einmal kurz zusammen:

Die Arbeit bezieht sich auf Ringe, das heisst auf geometrische Gebilde von der Art in sich zurücklaufender Fäden. Den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung bildete der „Verkettungszustand" eines Ringsystems. Es war dies ein Begriff, der sich nicht auf die specielle Art der Verschlingung und Verknotung von Ringen bezog, sondern nur auf die Thatsache, ob Ringe zusammenhängen oder nicht. Die vollständige Beschreibung des Verkettungszustandes wurde durch ein Schema geliefert, das sämmtliche Ringe, Unterketten und selbständige Ketten eines Ringsystems in passender Anordnung angibt. So weit der erste Theil; im zweiten Theil wurde gezeigt, dass nicht nur jede Kette ihr Schema hat, sondern auch für jedes Schema Ketten existiren, und hiebei besonders auf eine Art von Ketten hingewiesen, welche keine Unterketten enthalten. Im dritten Kapitel wurde von den Zerschneidungszahlen der Ketten gehandelt, charakteristischen Zahlen, welche ein gewisses Maass für den Verkettungszustand abgeben.

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme.

Von Walter Dyck.

(Zweite Mitteilung.)

(Mit Tafel V—VII.)

(Eingelaufen 6. April.)

§ 1.
Einleitung.

In einer ersten Abhandlung „Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme"[1]) habe ich den Verlauf dieser Curvensysteme in der Umgebung ihrer „wesentlich" und „ausserwesentlich singulären" Stellen einer genaueren Betrachtung unterzogen und dabei auch die Frage nach dem „Gesammtverlauf" eines solchen Curvensystems aus der Kenntniss von Lage und Charakter der

1) Berichte der k. bayer. Akad. d. Wiss. 21. Bd. 1891. p. 23 ff. Auf diese Abhandlung, die in der Folge durch [Abh. I.] citirt ist, sei auch bezüglich der Litteratur über den Gegenstand verwiesen. Fundamental für die folgenden Entwicklungen ist selbstverständlich wieder die Abhandlung von Briot und Bouquet „Sur les propriétés des fonctions définies par des équations differentielles" im 36. Heft des Journal de l'école polyt.

einzelnen singulären Stellen discutirt und zwar je für die verschiedenen Blätter, in welchen sich das Curvensystem über der $(x\,y)$-Ebene ausbreitet.

Im Folgenden ist ein anderer Weg eingeschlagen, um über den Gesammtverlauf der Integral-Curven einer Differentialgleichung erster Ordnung Aufschluss zu erhalten: **Man betrachte durch Einführung eines Parameters die einzelne Differentialgleichung als Glied einer Reihe von continuirlich in einander übergehenden Differentialgleichungen und studire die Aenderungen, welche die Integralcurven durch eine solche stetige Abänderung der Differentialgleichung erleiden.**

Es bleibt dann bei dieser continuirlichen Abänderung der Gesammtcharacter des Curvensystems im Allgemeinen erhalten und ändert sich nur an gewissen Sprungstellen durch Entstehen, Umformung und Verschwinden von singulären Punkten.

Dabei bezieht sich der schon in Abh. I. gebrauchte Ausdruck „Gesammtcharacter“ wie dort auch hier wieder auf die Art und Verteilung der singulären Stellen, auf die im Sinne der Analysis situs genommene Anordnung der verschiedenen Blätter und des darin näherungsweise darzustellenden Verlaufes der einzelnen Curvenzweige. Eigenschaften von Integralcurven dagegen, wie die, sich zu schliessen, oder noch specieller, algebraisch zu sein, fallen hier ausser Betracht, denn sie werden im Allgemeinen bei einer infinitesimalen Aenderung der Differentialgleichung verloren gehen.

So versucht die vorliegende Abhandlung eine **Darstellung derjenigen Eigenschaften des Integralcurvensystems einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche bei im Sinne der Analysis situs nicht wesentlichen Umformungen der Differentialgleichung erhalten bleiben durch die Darlegung**

derjenigen Aenderungen, welche das Integralsystem bei den im Sinne der Analysis situs wesentlichen Umänderungen erleidet.

Das System der Differentialgleichungen, welches wir in seiner continuirlichen Umformung untersuchen, ist nun das folgende:

$$F(x, y, y') - k = 0$$

mit k als Parameter. Hier werden die analytischen Formulirungen von einfachster Art, sind aber doch allgemein genug, um das Verhalten solcher Umformungen auch in anderen einfach unendlichen Systemen von Differentialgleichungen übersehen zu können.

Weiter legen wir im Folgenden die Function $F(x,y,y')$ von „algebraischem Character" als eine reelle, eindeutige Function der reellen Veränderlichen x, y, y' zu Grunde, die nur für endliche Werte dieser Variabeln verschwindet, an jeder Stelle x_0, y_0, y'_0 nach ganzen Potenzen von $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(y'-y'_0)$ entwickelbar ist und deren drei Ableitungen nach den Variabeln nur für discrete Werte derselben gleichzeitig verschwinden.

Machen wir von der vielfach anzuwendenden Vorstellung des Systems $F(x, y, y') - k = 0$ als eines Systems von Flächen in einem Raume mit den Coordinaten x, y, y' Gebrauch, so entspricht den eben gemachten Annahmen die Vorstellung eines Systems von ganz im Endlichen gelegenen, einander nicht schneidenden, geschlossenen Flächen, die den Raum gerade einfach durchsetzen.[1]) Auf jeder solchen Fläche

1) Hiezu sei erwähnt: Durch die obige Bedingung schliessen wir auch das Auftreten von sog. Unbestimmtheitspunkten aus, denen in unserer Flächendeutung das Auftreten einer zur xy-Ebene senkrechten Geraden $x=x_0$, $y=y_0$ entspricht. Eine beiläufige Bemerkung der Abh. I. (pag. 30 oben) ist selbstverständlich unrichtig, wenn es

ist das ihr entsprechende System der **Integralcurven** einfach überdeckend, ausgebreitet.

Die wichtigsten Umformungen dieses Curvensystems entsprechen denjenigen Umänderungen der Flächen des Systems, bei welchen die **characteristische Zahl** (Zusammenhangszahl) der Fläche sich ändert. Ihnen entsprechen Aenderungen in der Anzahl der singulären Punkte des Curvensystems, den Relationen zufolge, welche diese Anzahlen mit der characteristischen Zahl verknüpfen.[1]) Alle übrigen Aenderungen, die bei der continuirlichen Umformung im Verlaufe des Curvensystems auftreten, sind — auch wenn dabei singuläre Stellen auftreten oder verschwinden oder sich umformen — so beschaffen, dass sie jene characteristischen Relationen **nicht** ändern.

Nehmen wir nun einmal an, für irgend eine Differentialgleichung des Systems sei der Verlauf der Integralcurven bekannt, so lässt sich die successive Aenderung der Integralcurven mit änderndem k von hier aus anschaulich verfolgen; speciell für die soeben gemachten Annahmen über die Endlichkeit der Fläche $F(x,y,y')=0$ wird es einen Parameterwert k_a geben, für welchen die Fläche $F(x,y,y')-k_a=0$ lediglich aus isolirten Punkten besteht, um von hier aus sich im Raume der x, y, y' continuirlich auszubreiten; dann werden wir von da ab mit der Entstehung des Integralcurvensystems selbst die Discussion der gestaltlichen Verhält-

sich um die Bedingungen für das Eintreten von Unbestimmtheitspunkten im Allgemeinen handeln soll.

Ich nehme Gelegenheit, hier weiter ein Versehen zu berichtigen, welches in Formel (35.) auf pag. 54 untergelaufen ist. Die letzte der dort gegebenen drei Gleichungen ist, wie unmittelbar ersichtlich, zu ersetzen durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c\,\partial y}-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c\,\partial x}=0.$$

1) Abh. I pag. 47, 48; Poincaré, Liouville's Journal Serie III Bd. 8, Serie IV Bd. 1.

nisse des Integralsystems beginnen können durch die Bezeichnung der Aenderungen, welche an den näher zu bestimmenden besonderen Stellen für den Verlauf unseres Curvensystems eintreten.

Diese Untersuchung ist im Folgenden ausgeführt, und sind dabei insbesondere diejenigen Umänderungen einer eingehenderen Betrachtung unterzogen, die mit einer gleichzeitigen Aenderung der characteristischen Zahl der Fläche $F - k = 0$ verbunden sind; die übrigen bemerkenswerten gestaltlichen Aenderungen sind im Folgenden wesentlich nur in so weit besprochen, als es eine genaue Classification erforderte. Es bieten übrigens, wie gleich hier erwähnt sei, gerade auch diese Fälle (insbesondere die im § 4 und 5 besprochenen) ein weitergehenderes Interesse speciell für den Verfolg der Frage der näherungsweisen Integration einer Differentialgleichung für die Umgebung gewisser singulärer Stellen und zwar deshalb, weil hier die Betrachtung erster Näherungen wegen der geringen Zahl der in den betreffenden Näherungsgliedern noch enthaltenen Constanten singuläre Vorkommnisse herbeiführt, die keineswegs bei Ausdehnung auf eine grössere Gliederzahl noch statthaben. Ich denke darauf in einer ausführlicheren Darlegung einzugehen.

§ 2.

Allgemeine Festsetzungen und Bezeichnungen.

Um das Verhalten der Integralcurven der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad F(x, y, y') - k_0 = 0$$

für die Umgebung einer Stelle x_0, y_0, y'_0 zu untersuchen, entwickeln wir zunächst F in eine Potenzreihe nach $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(y' - y'_0)$ und führen (vergl. Briot-Bouquet a. a. O. pag. 191) in dieselbe die Substitution ein:

$$(2.)\quad \begin{aligned} x - x_0 &= \xi, \\ (y - y_0) - y'_0 (x - x_0) &= \eta; \text{ wo dann} \\ y' - y'_0 = \eta' &= \frac{d\eta}{d\xi}. \end{aligned}$$

Es kommt dann die folgende Entwickelung:

$$(3.)\quad F(x, y, y') - k_0 \equiv$$
$$(\overline{F}_1 + y'_0 \overline{F}_2)\xi + \overline{F}_2 \eta + \overline{F}_3 \eta' +$$
$$+\tfrac{1}{2}\{(\overline{F}_{11} + 2y'_0 \overline{F}_{12} + y'^2_0 \overline{F}_{22})\xi^2 + 2(\overline{F}_{12} + y'_0 \overline{F}_{22})\xi\eta + \overline{F}_{22}\eta^2\} +$$
$$+ (\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})\xi\eta' + \overline{F}_{23}\eta\eta' + \tfrac{1}{2}\overline{F}_{33}\eta'^2 + \cdots$$

eine Differentialgleichung, die das gemeinsame Wertesystem

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \eta' = 0$$

als Lösung besitzt.

Wir fügen zur Uebersicht des Folgenden das Diagramm bei, in welchem in der bekannten Weise die einzelnen Glieder in Bezug auf ihre Grössenordnung in ξ und η' (wobei η äquivalent mit $\eta'\xi$) eingetragen sind.

Fig. 1.

Die in (2.) gegebene Umformung ist für die Deutung des Verlaufes der Integralcurven in einer Ebene $(\xi\eta)$ und für die andere in der Ebene $(x\,y)$ selbstverständlich unwesentlich; wir werden im Folgenden von der einen und anderen Ebene Gebrauch machen und ebenso je nach Zweckmässigkeit für die räumliche Anschauung von dem Coordinatensystem x, y, y' und dem andern ξ, η, η'.

Bezüglich der eingeführten Bezeichnungen sei noch erwähnt, dass wir da wo es wünschenswert erscheint, die Werte der Ableitungen von F nach den Variabeln x, y, y' als bestimmt für einen Punkt x_0, y_0, y'_0 hervorzuheben, die Ausdrücke F_1, F_2, F_3, F_{11} u. s. w. wie in Gleichung (3.) mit einem horizontalen Strich versehen, der wegbleibt, wenn die Stelle x, y, y' unbestimmt bleiben soll.

Weiter ist es zweckmässig, die Richtung des Durchlaufens des Systems

$$F(x, y, y') - k = 0$$

auf einfache Weise zu präcisiren. Wir betrachten die Constante k als wachsend. Machen wir die obige Annahme, dass $F(x, y, y')$ nur für endliche Werte der Variabeln verschwindet, so lässt sich das Vorzeichen so normiren, dass F für unendlich grosse Werte der Variabeln positiv ist; indem wir dann von dem untersten Wert k_a des Parameters k, für welchen noch eben ein reelles Wertsystem x, y, y' der Gleichung $F - k_a = 0$ genügt, ausgehen und die Gleichung $(F - k_a) = k$ für unser System einführen, lässt sich der Parameter k als durchaus positive Grösse einführen.

I. Abschnitt.

Die wesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen $F(x, y, y') - k = 0$.

§ 3.

Uebersicht.

Die Stelle x_0, y_0, y'_0 ist wesentlich singulär, wenn gleichzeitig die drei Gleichungen statthaben

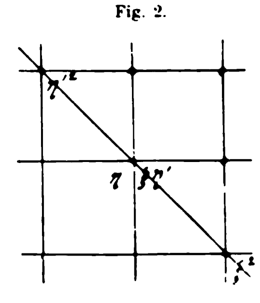
$$(4.)\quad \bar{F} - k_0 = 0.\quad \bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2 = 0,\quad \bar{F}_3 = 0.$$

Das Verhalten des Systems der Integralcurven in der Umgebung einer solchen Stelle ist (Abh. I) näherungsweise gegeben durch die Differentialgleichung:

$$(5.)\quad 0 = \bar{F}_2 \eta + \tfrac{1}{2}(\bar{F}_{11} + 2 y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22}) \xi^2 + \\ + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi \eta' + \tfrac{1}{2} \bar{F}_{33} \eta'^2,$$

welche dem aus Fig. 1 abgeleiteten Diagramm (Fig. 2.) entspricht.

Fig. 2.



Wir bezeichnen wie in (Abh. I) die drei Kategorien der wesentlich singulären Punkte als:

Kateg. I. Punkte P_0 (Taf. I, Fig. I d. Abh. I.)
" II. " P_2 (Tafel II, Fig. II.)
" III. " P_∞ (Tafel III, Fig. III.)

Dann sind für die Unterscheidung dieser 3 Kategorien die Vorzeichen der folgenden beiden Ausdrücke massgebend

$$(6.)\quad M = \frac{F_{11} + 2 y'_0 F_{12} + y'^2_0 F_{22}}{F_{13} + y'_0 F_{23}} \quad \frac{F_{13} + y'_0 \bar{F}_{23} + F_2}{F_{33}}$$

und

$$N \quad 4M \quad F_2^2$$

und zwar hat man folgende Tabelle der Vorzeichencombinationen:

(7.)

$\bar{M}$	$\bar{N}$	Kategorie
+	+	I (P_0)
+	—	III (P_∞)
—	—	II (P_2)

Denken wir uns nun das System der Differentialgleichungen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

mit änderndem (wachsendem) Parameter k durchlaufen, so werden die jedesmal aus den Gleichungen (4.) zu berechnenden wesentlich singulären Stellen (x_0, y_0, y'_0) eine stetige Aufeinanderfolge bilden. Besonders für den Verlauf der Curven der Integralsysteme werden dann einmal diejenigen Stellen zu beachten sein, für welche einer der Ausdrücke $\bar{M}$ bez. $\bar{N}$ sein Zeichen wechselt, und weiter diejenigen, für welche einer der wesentlichen Terme in der Näherungs-Differentialgleichung (5.) — das sind die Factoren von η und von η'^2 [1]) — verschwindet. Das Verschwinden des Factors $\bar{F}_2$ von η bringt dabei wegen $\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2 = 0$ auch das Verschwinden von $\bar{F}_1$ mit sich.

Sonach ergeben sich zur näheren Untersuchung der wesentlich singulären Stellen:

$$(4.) \quad \bar{F} - k_0 = 0, \quad \bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2 = 0, \quad \bar{F}_3 = 0$$

diejenigen Fälle, für welche noch die Bedingungsgleichungen:

1) Man überzeugt sich leicht, dass ein Verschwinden der Factoren von ξ^2 und von $\xi\eta'$ den Character der singulären Stelle im Sinne der Analysis situs nicht wesentlich beeinflusst.

A)	$\overline{M} = 0$	(§ 4.)
B)	$\overline{N} = 0$	(§ 5.)
C)	$\overline{F}_1 = 0, \overline{F}_2 = 0$	(§ 6–8.)
D)	$\overline{F}_{33} = 0$	(§ 9.)

bestehen.

Bedienen wir uns der schon in der Einleitung erwähnten Deutung der Variabeln x, y, y' als rechtwinkliger Coordinaten des Raumes, so können wir folgendes geometrische Bild bei unseren Betrachtungen einführen:

Das System der einfach unendlich vielen Flächen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

wird geschnitten einmal von der Fläche

$$F_1 + y' F_2 = 0,$$

welche auf den einzelnen Flächen $F - k = 0$ diejenigen Curven ausschneidet, für welche die Integralcurven in der Projection auf die $(x\,y)$-Ebene Wendepunkte besitzen.[1])

Weiter schneidet die Fläche

$$F_2 = 0$$

die Flächen des Systems $F - k = 0$ je in den Umrisslinien U_k in Richtung der y'-Axe; diese Linien, auf die $x\,y$-Ebene projicirt, sind also die Oerter der Spitzen der Integralcurven.

Die Flächen

$$F_1 [illegible] F_2 = [illegible] F_2 = 0$$

ihrerseits [illegible] Raumcurve S, welche auf den Flächen [illegible] die wesentlich singulären Punkte [illegible].

Auf dieser [illegible] S [illegible] die Punkte ausgezeichnet, für [illegible] $N = 0$ ist; weiter die-

1) Man [illegible] solutions singulières des équations [illegible] Bulletin des [illegible]

jenigen, für welche gleichzeitig $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ ist. d. h. die Knotenpunkte des Flächensystems $F - k = 0$; endlich die Punkte, welche der Gleichung $F_{33} = 0$ genügen. Für die zu einem dieser letzteren Punkte gehörige Fläche $F - k = 0$ bedeutet die Bedingung $F_{33} = 0$, dass die Umrisscurve der Fläche in ihrer Projection auf die xy-Ebene eine Spitze besitzt. In diese Spitze, welche nach den Betrachtungen der Abh. I. als ausserwesentlich singuläre Stelle des betr. Integralsystems zu bezeichnen ist, rückt hier noch ein wesentlich singulärer Punkt.

§ 4.

A) Die Bedingung $\overline{M} = 0$.

Das Verschwinden der Determinante

$$(8.)\quad \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{11} + y' F_{21} & F_{12} + y' F_{22} & F_{13} + y' F_{23} + F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

drückt die Bedingung dafür aus, dass die Raumcurve S

$$F_1 + y' F_2 = 0 \quad F_3 = 0$$

eine Fläche

$$F - k = 0$$

berührt. Man erkennt sofort, dass diese Bedingung die Form

$$(9.)\qquad M \cdot F_2 = 0$$

annimmt, in welcher das Verschwinden des letzten Factors die uneigentlichen Berührungen von S in den Knotenpunkten des Flächensystems bezeichnet, die Bedingung

$$M = 0$$

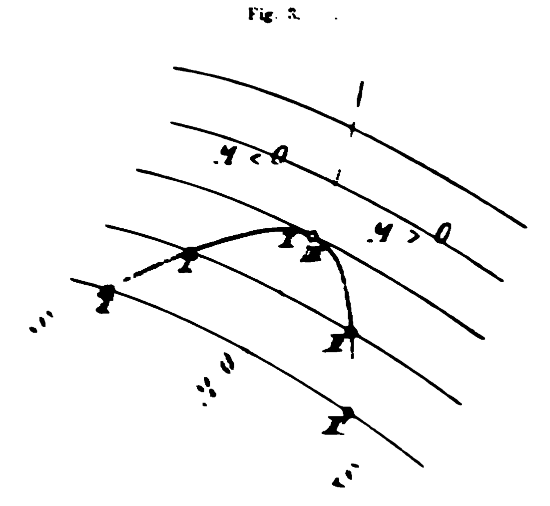
die eigentlichen Berührungen. Dabei trennt die Fläche $M = 0$ in der Umgebung eines solchen Punktes zwei Gebiete der Raumcurve S, für welche beziehungsweise

$$M < 0, \quad N < 0$$

und
$$M > 0, \quad N < 0$$

ist. Wie Fig. 3 schematisch darstellt, vereinigen sich also, wenn wir das Flächensystem in der einen Richtung durchlaufen, zwei singuläre Punkte, und zwar je ein Punkt II und ein Punkt III mit einander, die dann verschwinden:

Fig. 3.



[illegible]

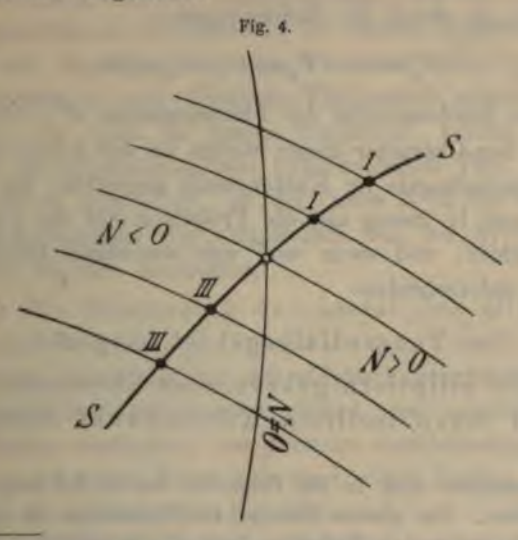
die Ebene $\xi\eta'$, in welcher die Umgebung der singulären Stelle eindeutig dargestellt ist.[1])

§ 5.

B) Die Bedingung $N = 0$.

An denjenigen Stellen der Curve S der singulären Punkte, für welche der Ausdruck N verschwindet, tritt ein besonderes Verhalten der Curve S gegenüber dem Flächensystem $F - k = 0$ nicht ein. Die Curve S tritt, wie Fig. 4. schematisch andeutet, aus einem Gebiete $N < 0$ in ein solches $N > 0$ ein, oder umgekehrt. Dabei ist, wie die auf pag. 108 gegebenen Gleichungen lehren, jedenfalls $M > 0$. Es verwandelt sich also bei änderndem k ein singulärer Punkt III in einen Punkt I oder umgekehrt.

Fig. 4.



1) Von dem Umstand der Eindeutigkeit der Projection auf die $\xi\eta'$-Ebene in gewissen für die $\xi\eta$-Ebene mehrdeutigen Darstellungen ist schon in der Abhandlung I in den Figg. I' II' III' der Tafeln für die dort behandelten Singularitäten Gebrauch gemacht und wir ver-

Die gestaltliche Umformung der singulären Stelle lässt sich an Hand der Figg. III und I (beziehungsweise III' und I') der Abh. I. leicht verfolgen, wenn wir beachten, dass die beiden in der ersten Näherung ausgezeichneten Curvenzweige der Integralcurven, welche den Punkt III durchsetzen, im Grenzfalle zusammenrücken, um dann imaginär zu werden.

§ 6.

C) Die Knotenpunkte des Flächensystems $F - k = 0$. Geometrische Discussion.

Die Raumcurve S

$$F_1 + y' F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

durchsetzt die durch die Bedingungen

$$\text{C)} \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

gegebenen Knotenpunkte des Flächensystems $F - k = 0$.

Für den Character dieser Stellen ist vor Allem die Lage des Tangentialkegels im Knotenpunkt gegenüber der Raumcurve S und in Bezug auf die Projection auf die $x\,y$-Ebene zu bestimmen, und zwar sind vier wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Der Tangentialkegel ist imaginär.

a) Ein elliptisch gekrümmter Flächenteil zieht sich auf einen isolirten Knotenpunkt zusammen.

wenden denselben auch in der Folge bei den in § 9 besprochenen Singularitäten. Das gleiche Princip, die Verhältnisse in einer eindeutigen Darstellung zu übersehen, liegt selbstverständlich auch den von Briot und Bouquet eingeführten allgemeinen Transformationen zu Grunde und kommt weiter in der auch von Poincaré verwendeten Betrachtungsweise des Integralcurvensystems auf der Fläche $F = 0$ zur Geltung.

um dann zu verschwinden, oder umgekehrt entsteht um einen isolirten Punkt ein solcher ellipsoidischer Flächenteil.

Die Raumcurve S durchschneidet diese kleine Fläche in zwei Punkten. Also verschwinden bez. entstehen zwei wesentlich singuläre Punkte, je nachdem der Uebergang in der einen oder andern Richtung statthat. (Vergl. die schematische Fig. 5a.)

Der Tangentialkegel ist reell.

Die Flächen $F-k=0$ werden derart umgeformt, dass zwei getrennte Flächenteile sich zu einem einzigen vereinigen oder umgekehrt eine Abschnürung eintritt und zwar lässt sich in der Umgebung des Knotenpunktes in bekannter Weise der Uebergang dadurch characterisiren, dass sich zwei elliptisch gekrümmte Flächenteile zu einem hyperbolisch gekrümmten vereinigen bez. eine Trennung eines hyperbolisch gekrümmten in zwei elliptische Flächenteile eintritt. Unterscheiden wir auch die beiden Raumteile, welche der Kegel trennt, als elliptischen, bez. hyperbolischen Teil, so kommt es zunächst darauf an, ob die Curve S in der Umgebung des Knotenpunktes den elliptischen bez. den hyperbolischen Teil des Raumes durchsetzt.

b) Die Raumcurve durchsetzt den elliptischen Raumteil des Kegels.

Beim Uebergang von der elliptisch gekrümmten Fläche zur hyperbolisch gekrümmten rücken zwei wesentlich singuläre Punkte zusammen, um dann zu verschwinden, während beim umgekehrten Uebergang zwei solche Punkte entstehen. (Vergl. die schematische Fig. 5b.)

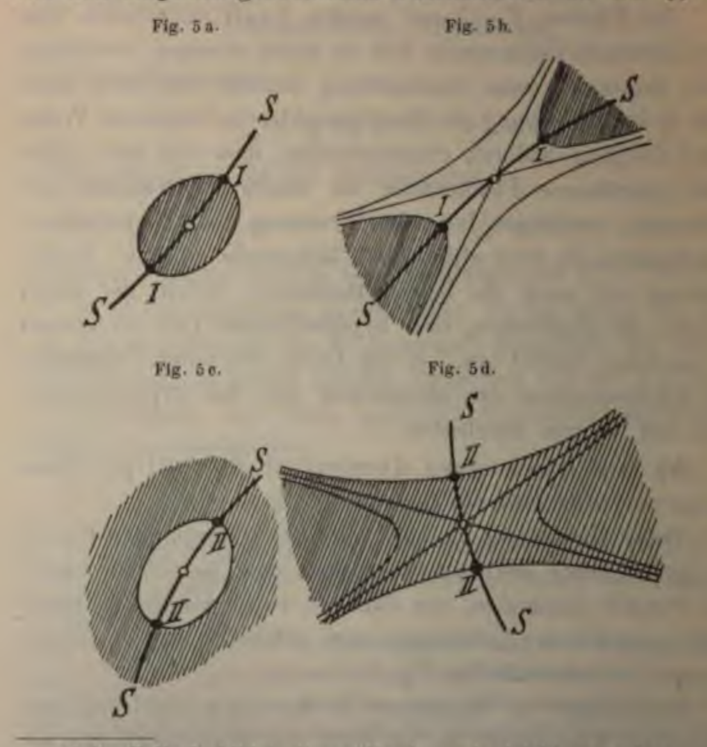
Durchsetzt die Raumcurve S den hyperbolisch gekrümmten Flächenteil, so ist noch eine Unterscheidung bezüglich des Umrisses unseres Kegels in der Projection auf die (xy)-Ebene zu beachten. Diese kann aus einem ima-

ginären oder einem reellen Paar von geraden Linien bestehen.[1])

c) Die Raumcurve S durchsetzt den hyperbolischen Teil des Kegels; Umriss des Kegels in die (xy)-Ebene imaginär.

d) Die Raumcurve S durchsetzt den hyperbolischen Teil des Kegels; Umriss des Kegels in die xy-Ebene reell.

In beiden Fällen c) und d) entstehen beim Uebergang von den elliptisch gekrümmten Flächenteilen zu den hyper-



1) Im Falle b bildet dieser Umriss, wie leicht zu sehen, notwendig ein reelles Geradenpaar, im Falle a selbstverständlich ein imaginäres.

bolisch gekrümmten zwei wesentlich singuläre Punkte, die beim umgekehrten Uebergang verschwinden. (Vergl. die Figg. 5c und 5d.)

In den Figuren ist jedesmal das doppelt überdeckt zu denkende Gebiet derjenigen Fläche schraffirt, welche die singulären Punkte trägt, also bei a) und b) das Gebiet der elliptisch, bei c) und d) der hyperbolisch gekrümmten Fläche.

§ 7.

C) Fortsetzung. Analytische Formulierung.

Die vier Fälle lassen sich nun in einfachster Weise analytisch von einander trennen.

1. Zunächst lässt sich bekanntlich der Unterschied des imaginären vom reellen Kegel nach den gleichen oder ungleichen Vorzeichen der drei Werte, welche die linke Seite der Kegelgleichung für die Kanten irgend eines Polardreikants annimmt, fixiren. Wir wählen als diese Kanten einmal die Tangente an die Raumcurve S, für welche

$$(10.)\quad dx:dy:dy' = \left\| \begin{matrix} \overline{F}_{11}+y'_0\overline{F}_{21} & \overline{F}_{12}+y'_0\overline{F}_{22}, & \overline{F}_{13}+y'_0\overline{F}_{23} \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & \overline{F}_{33} \end{matrix} \right\|$$

ist. Dann lässt sich die Axe y'

$$(11.)\qquad dx:dy:dy' = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

als zweite Kante wählen und folgt endlich eine Gerade mit der Fortschreitungsrichtung:

$$(12.)\qquad dx:dy:dy' = \left\| \begin{matrix} y'_0 & -1 & 0 \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & \overline{F}_{33} \end{matrix} \right\|$$

als dritte Kante dieses Polardreiecks.

Beachten wir dann, dass für eine Stelle

$$\overline{F}_1 = 0,\ \ \overline{F}_2 = 0,\ \ \overline{F}_3 = 0$$

der Ausdruck $\overline{M}$:

$$(13.)\quad \overline{M} = \begin{vmatrix} \overline{F}_{11} + 2y'_0\overline{F}_{12} + y'^2_0\overline{F}_{22} & \overline{F}_{13} + y'_0\overline{F}_{23} \\ \overline{F}_{13} + y'_0\overline{F}_{23} & \overline{F}_{33} \end{vmatrix}$$

wird, so ergiebt sich aus den obenbezeichneten Substitutionen der $dx:dy:dy'$ in die linke Seite der Kegelgleichung:

$$(14.)\quad \left.\begin{matrix} \overline{M}.\,|\overline{F}_{ik}|\,^{1)}, \\ \overline{F}_{33}, \\ \overline{M}.\,\overline{F}_{33}. \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{Gleiche Vorzeichen:} \\ \text{imaginärer Kegel.} \\ \text{Verschiedene Vorzeichen:} \\ \text{reeller Kegel.} \end{matrix}$$

2. Für die Projection des Kegels auf die $(x\,y)$-Ebene ergiebt sich sofort:

Der Umriss des Kegels in der Projectionsrichtung der y'-Axe ist imaginär oder reell, je nachdem

$$(15.)\quad \overline{F}_{33}.\,|\overline{F}_{ik}| \begin{matrix} > 0 \text{ imaginärer Umriss.} \\ < 0 \text{ reeller Umriss.} \end{matrix}$$

3. Die Lage der Raumcurve S gegen den Kegel lässt sich direct aus dem Vorzeichen des Productes der Determinante $\overline{F}_{ik}$ in die Determinante bestimmen, welche entsteht, wenn wir $\overline{F}_{ik}$ mit den beiden Zeilen der Matrix (10.) (für die Fortschreitungsrichtung der Raumcurve) rändern. Die letztere Determinante reduciert sich auf $\overline{M}.\ \overline{F}_{ik}$ und so folgt direct das Vorzeichen von $\overline{M}$ als characteristisch für jene gegenseitige Lage, so zwar, dass für

---

1) Wo zur Abkürzung die Determinante des Kegels

$$\begin{vmatrix} \overline{F}_{11} & \overline{F}_{12} & \overline{F}_{13} \\ \overline{F}_{21} & \overline{F}_{22} & \overline{F}_{23} \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & \overline{F}_{33} \end{vmatrix} = |\overline{F}_{ik}|$$

gesetzt ist.

(16.) $\overline{M}$ >0 die Raumcurve S den „elliptischen“ / <0 die Raumcurve S den „hyperbolischen“

Raumteil des Kegels durchsetzt.

4. Endlich lässt sich auch die Richtung des Ueberganges der Flächen $F-k=0$ in den Knotenpunkten fixieren. Wir machen dabei von der Eingangs schon erwähnten Normierung der Flächen $F-k=0$ Gebrauch und fixieren das Vorzeichen von F so, dass F für unendlich grosse Werte von x, y, y' positiv wird. Durchlaufen wir dann das System $F-k=0$ mit wachsendem Parameter k, so ändern sich die Flächen $F-k=0$ einander je umschliessend so, dass stets der „Innenraum“ $F-k=0$ wächst. Damit wird das Vorzeichen der Determinante $|\overline{F}_{ik}|$ bestimmend für die Richtung des Ueberganges unserer Flächen in der Umgebung eines Knotenpunktes, so zwar, dass:

(17ᵃ.) $$|\overline{F}_{ik}|>0$$

den Uebergang vom { Ellipsoid zur imaginären Fläche, zweischaligen Hyperboloid zum einschaligen Hyperboloid,

(17ᵇ.) $$|\overline{F}_{ik}|<0$$

den umgekehrten Uebergang (den wir hier wie auch in der Folge der Kürze wegen durch die Näherungsflächen bezeichnet haben) characterisirt.

§ 8.

C) Fortsetzung. Gestaltliche Discussion. Zusammenstellung.

Der gestaltliche Verlauf der Integralcurven in der Umgebung der im Vorstehenden unterschiedenen singulären Stellen folgt nun in übersichtlichster Weise aus folgenden Ueberlegungen:

Die in 3. gegebene Unterscheidung der Lage der Raumcurve S gegen den Kegel durch das Vorzeichen von $\bar{M}$ fixiert gleichzeitig die Kategorie der im Knotenpunkte zusammenrückenden Singularitäten:

Im Falle a), in welchem der Kegel imaginär, das den Knotenpunkt umgebende und von S durchsetzte Gebiet „elliptisch“ ist, und ebenso im Falle b) in welchem die Raumcurve S den „elliptischen“ Raumteil des reellen Kegels durchsetzt, fallen, wenn wir den Uebergang mit der elliptisch gekrümmten Fläche beginnen, im Knotenpunkt zwei singuläre Stellen I. Art zusammen, um dann zu verschwinden.

In den Fällen c) und d), in welchen S den „hyperbolischen“ Raumteil des (reellen) Kegels durchsetzt, entstehen, wenn wir wieder den Uebergang mit der elliptisch gekrümmten Fläche beginnen, im Knotenpunkt zwei zunächst vereinigte singuläre Stellen II. Art, die sich dann auf der hyperbolisch gekrümmten Fläche trennen.

Das Verhalten des Integralsystems für die Fläche mit Knotenpunkt sei nun zunächst noch dadurch genauer präcisirt, dass wir diejenigen Curvenzweige, welche durch den singulären Punkt hindurchlaufen, direct nach der Methode von Briot und Bouquet bestimmen. In erster Annäherung lautet hier die Differentialgleichung:

$$(18.)\quad (\bar{F}_{11} + 2y'_0\bar{F}_{12} + y'^2_0\bar{F}_{22})\xi^2 + 2(\bar{F}_{13} + y'_0\bar{F}_{23})\xi\eta' + \bar{F}_{33}\eta'^2 = 0$$

und deren Integral

$$(19.)\quad \eta = \xi^2 \cdot \frac{-(\bar{F}_{13} + y'_0\bar{F}_{23}) \pm \sqrt{-\bar{M}}}{2\bar{F}_{33}}$$

es ergeben sich also zwei Parabeln als Näherungscurven an

die beiden durch den singulären Punkt laufenden Zweige des Integralsystems. Diese sind imaginär für $\overline{M} > 0$, also in den Fällen a) und b), reell für $\overline{M} < 0$, also in den Fällen c) und d). In den letzten beiden Fällen unterscheidet noch das Vorzeichen:

$$(20.)\qquad (\overline{F}_{11} + 2y'_0\overline{F}_{12} + y'^2_0\overline{F}_{22}) \cdot \overline{F}_{33} \begin{matrix} > 0 \\ < 0, \end{matrix}$$

ob die beiden sich im singulären Punkte berührenden Curvenzweige auf $\left\{\begin{matrix}\text{einer Seite}\\\text{beiden Seiten}\end{matrix}\right.$ ihrer gemeinsamen Tangente verlaufen, ein Umstand, den wir sogleich noch weiter berücksichtigen.

Das Verhalten des Integralsystems für die der Fläche mit Knotenpunkt vorausgehenden und für die nachfolgenden Flächen ist durch die Fixierung der Art der auf ihnen liegenden singulären Stellen (I. bez. II. Art) nunmehr für die Umgebung dieser Stellen nach den in Abh. I. gegebenen Ausführungen näher zu bestimmen. Es mag dabei noch für die genauere gestaltliche Characterisierung die Curve der Wendepunkte der Integralcurven:

$$F - k = 0, \quad F_1 + y' F_2 = 0$$

in ihrer Umformung bei dem Uebergang durch die Fläche mit Knotenpunkt untersucht werden.

Bezeichne

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

die Parameter der Fläche mit Doppelpunkt, und deren vorausgehender sowie nachfolgender (ε positiv), so kann die obige Curve in erster Annäherung ersetzt werden durch eine Curve zweiter Ordnung, die durch den Schnitt der ersten Näherungsflächen entsteht. Das ist einmal die Fläche zweiten Grades:

$$\left.\begin{matrix}+2\varepsilon\\0\\-2\varepsilon\end{matrix}\right\} = \overline{F}_{11}(x-x_0)+2\overline{F}_{12}(x-x_0)(y-y_0)+\overline{F}_{22}(y-y_0)^2+ 2\overline{F}_{13}(x-x_0)(y'-y'_0)+\dots$$

und dann die Tangentialebene:

$$(\overline{F}_{11}+y'_0\overline{F}_{21})(x-x_0)+(\overline{F}_{12}+y'_0\overline{F}_{22})(y-y_0)+ (\overline{F}_{13}+y'_0\overline{F}_{23})(y'-y'_0)=0.$$

Für die Fläche mit Knotenpunkt hat daher die Curve der Wendepunkte einen Doppelpunkt, der sich beim Uebergang von $-\varepsilon$ nach $+\varepsilon$ in der bekannten Weise auflöst. Der Doppelpunkt ist $\left\{\begin{matrix}\text{isolirt bez.}\\\text{nichtisolirt,}\end{matrix}\right.$ je nachdem

$$(21.)\qquad (\overline{F}_{11}+2y'_0\overline{F}_{12}+y'^2_0\overline{F}_{22})\cdot|\overline{F}_{ik}| \begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}$$

ist. Nun beachte man, dass im Falle

$$\overline{M}>0$$

$$\overline{F}_{33} \text{ und } (\overline{F}_{11}+2y'_0\overline{F}_{12}+y'^2\overline{F}_{22})$$

notwendig gleiches Vorzeichen besitzen, die obige Unterscheidung also direct die Trennung der Fälle $\left\{\begin{matrix}\text{a)}\\\text{b)}\end{matrix}\right.$ bezeichnet: so kommt hier:

Im Falle a) ist der Doppelpunkt der Wendepunktscurve stets isolirt; im Falle b) existiren stets zwei reelle Zweige der Wendepunktscurve durch den singulären Punkt, die sich dann beim Uebergang auf die Gleichungen mit $-\varepsilon$ bez. $+\varepsilon$ als Parameter je in zwei hyperbolische Aeste auflösen.

In den Fällen c) und d) dagegen haben wir nach der einen oder andern Form der Wendepunktscurve je zwei Unterfälle zu unterscheiden. Nun übersieht man aber leicht (vergl. die nachfolgende Vorzeichentabelle), dass der eben betrachtete Ausdruck

(21.) $$(\overline{F}_{11}+2y'_0\overline{F}_{12}+y'^2_0\overline{F}_{22})\cdot|F_{ik}|$$

und der oben für den Unterschied der gegenseitigen Lage der durch den singulären Punkt verlaufenden Curvenzweige abgeleitete

(20.) $$(\overline{F}_{11}+2y'_0+y'^2_0\overline{F}_{22})\cdot\overline{F}_{33}$$

$\left.\begin{matrix}\text{gleiches}\\\text{ungleiches}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen haben im Falle $\left\{\begin{matrix}\text{c)}\\\text{d)}\end{matrix}\right.$; es ergiebt sich daher: Liegen für einen Punkt c) die beiden durch den Knotenpunkt verlaufenden Curvenzweige auf $\left\{\begin{matrix}\text{einer}\\\text{beiden}\end{matrix}\right.$ Seiten ihrer gemeinschaftlichen Tangente, so hat die Wendepunktscurve dort einen $\left\{\begin{matrix}\text{isolirten}\\\text{nichtisolirten}\end{matrix}\right.$ Doppelpunkt; für einen Punkt d) dagegen hat man einen $\left\{\begin{matrix}\text{nichtisolirten}\\\text{isolirten}\end{matrix}\right.$ Doppelpunkt der Wendepunktscurve, je nachdem die durch den Knotenpunkt verlaufenden Curvenzweige auf $\left\{\begin{matrix}\text{einer}\\\text{beiden}\end{matrix}\right.$ Seiten ihrer Tangente liegen.

In den Tafeln V, VI, VII sind die vier Fälle a), b), c), d) und zugleich jedesmal die beiden benachbarten Formen schematisch dargestellt. Die Fälle c) und d) beziehen sich dabei auf den Fall des isolirten Doppelpunkts der Wendepunktscurve, wo dann nach der einen Richtung des Uebergangs ein kleines Oval als Wendepunktscurve auftritt, während in der andern Richtung des Uebergangs keine reellen Wendepunkte mehr in der Umgebung der singulären Stelle vorhanden sind.

Die nachfolgende Tabelle gibt gleichzeitig die zusammenfassende Uebersicht über die Vorzeichencombinationen jener drei Ausdrücke

$$\overline{M},\quad \overline{F}_{33}\cdot\ |F_{ik}|,\quad |\overline{F}_{ik}|,$$

die nach den vorstehenden Entwickelungen für die Unterscheidung der vier Fälle und der Richtung des Uebergangs in denselben dienen:

Tabelle

für die Art der Singularitäten in den Knotenpunkten

$$\overline{F}_1 = 0 \quad \overline{F}_2 = 0 \quad \overline{F}_3 = 0.$$

	M	$\overline{F}_{33} \cdot \overline{F}_{ik}$	$\overline{F}_{ik}$			
a)	+	+	+	Verschwinden	von zwei wesentlich singulären Punkten I. Art.	(Taf. IV Fig. a)
	+	+	−	Entstehen		
b)	+	−	+	Verschwinden		(Taf. IV Fig. b)
	+	−	−	Entstehen		
c)	−	+	+	Entstehen	von zwei wesentlich singulären Punkten II. Art.	(Taf. V Fig. c)
	−	+	−	Verschwinden		
d)	−	−	+	Entstehen		(Taf. VI Fig. d)
	−	−	−	Verschwinden		

§ 9.

D) Die Bedingung $\overline{F}_{33} = 0$.

Wie in § 2 erwähnt, besagt das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$F_3 = 0, \quad F_{33} = 0$$

für die Flächen

$$F - k = 0,$$

dass der Umriss derselben in seiner Projection auf die xy-Ebene eine Spitze besitzt. Die Ordinate y' schneidet die Fläche $F - k = 0$ in drei aufeinanderfolgenden Punkten und die in der Umgebung dieser Stellen liegenden reellen Wert-

systeme von y' überdecken die durch die Umrisscurve geteilte Projectionsebene xy drei- bez. einfach in der etwa in Fig. 7[b] schematisch angedeuteten Form (vergl. auch Abh. I.).

Wird nun, was für einen Wert k_0 des Parameter eintreten möge, gleichzeitig die Gleichung

$$F_1 + y' F_2 = 0$$

erfüllt, so tritt in diesen Punkt (der im Allgemeinen ein ausserwesentlich singulärer für das Integralsystem ist, wie ihn Tafel IV Fig. IV der Abh. I. kennzeichnet) noch ein wesentlich singulärer Punkt herein. Und zwar findet der Uebergang, wenn wir die benachbarten Gleichungen für

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

betrachten, in der Weise statt, dass der betreffende wesentlich singuläre Punkt von dem einen Zweig der Spitzencurve auf den anderen Zweig rückt.

Für $F_{33} = 0$ wird nun

$$(22.) \quad \overline{M} = -(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})^2 - \overline{F}_2 (\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})$$

und

$$\overline{N} = 4\overline{M} - \overline{F}_2{}^2 = -(2(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}) + \overline{F}_2)^2 \cdot < 0;$$

der wesentlich singuläre Punkt ist also jedenfalls III[ter] oder II[ter] Art, je nach dem positiven oder negativen Vorzeichen von $\overline{M}$.

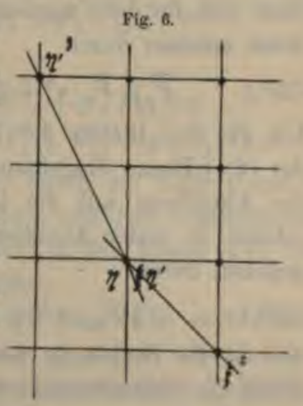


Fig. 6.

Für die durch den singulären Punkt laufenden Zweige der Integralcurven ergeben sich in erster Näherung aus dem nebenstehenden Schema die folgenden beiden Differentialgleichungen:

$$(23^a.)\qquad \bar F_2\eta' + (\bar F_{13} + y'_0\bar F_{23})\xi\zeta' + \tfrac{1}{6}\bar F_{333}\zeta'^3 = 0$$

und

$$(23^b.)\qquad \bar F_2\eta' + \tfrac{1}{2}(\bar F_{11} + 2y'_0\bar F_{12} + y'^2_0\bar F_{22})\xi^2 - (\bar F_{13} + y'_0\bar F_{23})\xi\zeta' = 0$$

Bestimmt man nun nach dem von **Briot** und **Bouquet** gegebenen Verfahren mit Hülfe dieser Gleichungen die durch den singulären Punkt verlaufenden Curvenzweige, so ergeben sich zunächst aus (23ª.) die zwei Zweige:

$$(24^a.)\qquad \zeta' = \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{-2\frac{2\bar F_2 + 3(\bar F_{13} + y'_0\bar F_{23})}{\bar F_{333}}\xi^{\frac{1}{2}}} + \dots$$

und aus (23ᵇ.) der weitere:

$$(24^b.)\qquad \zeta' = -\frac{(\bar F_{11} + 2y'_0\bar F_{12} + y'^2_0\bar F_{22})}{4(\bar F_2 - \bar F_{13} + y'_0\bar F_{23})}\xi + \dots$$

Es ist nun vor Allem zu entscheiden, welche Lage diese Curvenzweige zur Umrisscurve, und damit auf den drei im singulären Punkt zusammenhängenden Blättern der Fläche $F - z_0 = 0$ einnehmen.

Die Umrisscurve

$$F - z_0 = 0,\quad F_3 = 0$$

lässt sich für die Umgebung der singulären Stelle näherungsweise ersetzen durch

$$(25^a.)\qquad \bar F_{333}\bar F_2\,\eta'^2 - \tfrac{8}{9}(\bar F_{13} + y'_0\bar F_{23})\xi^3 = 0.$$

Um die drei Blätter der Fläche $F - z_0 = 0$, die Fig. 7 in der $\xi\eta$-Ebene übereinander liegen, zu trennen, genügt es, die Abbildung auf die $\xi\zeta$-Ebene zu machen. Dort erscheint in erster Annäherung die Umrisscurve als Parabel, gegeben durch:

$$(25^b.)\qquad \tfrac{1}{2}\bar F_{333}\zeta'^2 - (\bar F_{13} + y'_0\bar F_{23})\xi = 0$$

und ist die Beziehung der beiden Projectionen auf einander durch die nebenstehende Figur gegeben:

Fig. 7a.

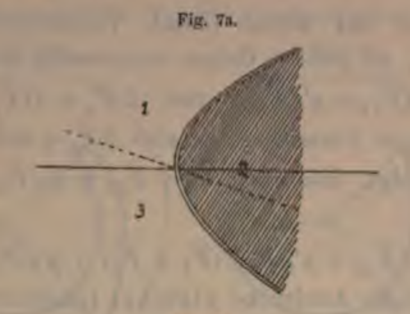


Fig. 7b.



Für die Abbildung der oben in erster Näherung gegebenen durch den singulären Punkt laufenden Curvenzweige erhält man nun einmal die Parabel

$$(26^a.)\quad \tfrac{1}{2}\overline{F}_{333}\,\eta'^2+(2\,\overline{F}_2+3\,(\overline{F}_{13}+y'_0\,\overline{F}_{23}))\,\xi=0$$

und weiter die Gerade

$$(26^b.)\quad (\overline{F}_{13}+y'_0\,\overline{F}_{23})(\overline{F}_2+2\,(\overline{F}_{13}+y'_0\,\overline{F}_{23}))\,\eta' \\ +(\overline{F}_{11}+2\,y'_0\,\overline{F}_{12}+y'^2_0\,\overline{F}_{22})\cdot(\overline{F}_2+\overline{F}_{13}+y'_0\,\overline{F}_{23})\,\xi=0.$$

Die letztere Gerade läuft entweder durch die Teile 1 und 2 oder durch 3 und 2 der Ebene $(\xi\eta')$ und dem entsprechend berührt der parabolische Zug (24^b) in der Ebene $(\xi\eta)$ die Axe ξ im einen oder anderen Gebiet.

Für die Parabel $(26^a.)$ haben wir zwei Fälle zu trennen, je nachdem dieselbe in den Gebieten 1 und 3 oder im Gebiete 2 verläuft. Ein Vergleich der Formeln (25^b) und (26^b),

in denen wir zur Kürze (durch Vorzeichenwahl in $\overline{F}$) $\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}$ als positive Grösse voraussetzen wollen, liefert:

Haben $(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})$ und $2\overline{F}_2 + 3(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})$ verschiedenes Vorzeichen, ist also $2\overline{F}_2 + 3(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})$ negativ, so folgt, dass auch $\overline{F}_2 + \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}$ negativ ist und damit

$$\overline{M} = -(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})(\overline{F}_2 + \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}) > 0.$$

Haben die obigen Ausdrücke gleiches (positives) Vorzeichen und ist:

$$2\overline{F}_2 + 3(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}) < \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23},$$

so ist $(\overline{F}_2 + \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})$ negativ und damit wieder

$$\overline{M} > 0;$$

ist dagegen

$$2\overline{F}_2 + 3(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}) > \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23},$$

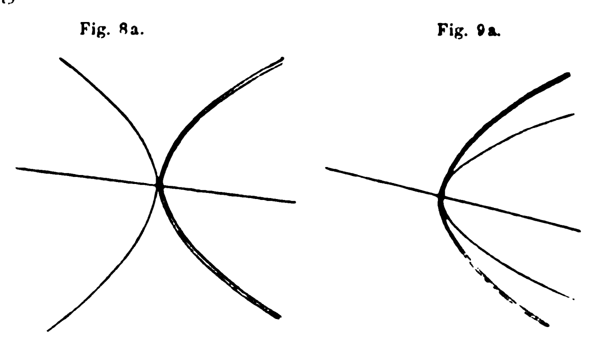
so ist $(\overline{F}_2 + \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})$ positiv und daher

$$\overline{M} < 0.$$

Also ergiebt sich:

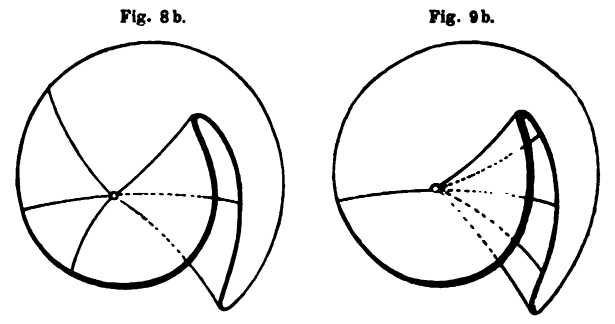
Ist der in die Spitze der Umrisscurve fallende wesentlich singuläre Punkt von der III^ten^ Art, so ist die Lage der Umrisscurve U zu den Zweigen der Integralcurve durch die beiden Schemata:

Fig. 8a. Fig. 9a.



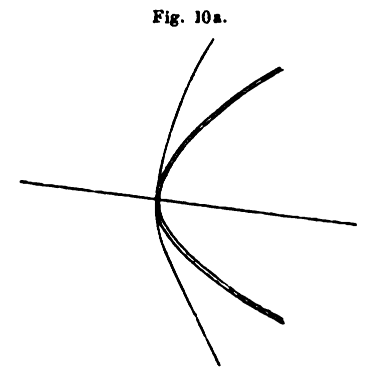
gegeben, denen auf die ($\xi\eta$)-Ebene projicirt, die Bilder

Fig. 8b. Fig. 9b.



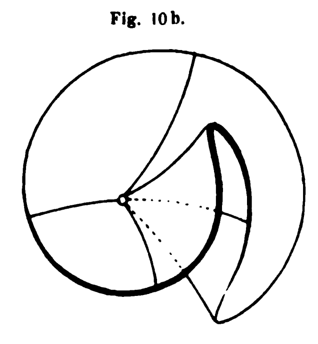
entsprechen, ist dagegen der wesentlich singuläre Punkt II^{ter} Art, so ist diese Lage schematisch gegeben durch

Fig. 10a.



und das entsprechende Bild

Fig. 10b.



Nun ist es nicht schwer, den Verlauf des ganzen Curvensystems in der Umgebung der singulären Stelle einzutragen, wenn wir beachten, dass der Character der singulären Stelle in der Projection auf die Ebene ($\xi\,\eta'$) dem Typus III' bez. II' der Abh. I. entspricht, wobei die eine der beiden ausgezeichneten Geraden, welche in dem dort dargestellten Falle die singuläre Stelle durchsetzen, durch die obige Parabel (26ª) zu ersetzen ist, die andere (in erster Näherung) durch die Gerade (26ᵇ).

II. Abschnitt.

Die ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen $F(x, y, y') - k = 0$.

§ 10.

Uebersicht.

Die Stelle x_0, y_0, y'_0 einer Differentialgleichung $F - k_0 = 0$ ist ausserwesentlich singulär, wenn

$$(27.)\qquad \overline{F}_3 = 0, \quad \overline{F}_{33} = 0;$$

dann ist das Verhalten des Integralsystems in der Umgebung einer solchen Stelle (wie schon erwähnt) im Allgemeinen durch die in § 3 und auf Tafel IV Fig. IV der Abh. I. gegebenen Entwickelungen gekennzeichnet.

Neben dem soeben besprochenen Zusammenrücken einer wesentlich und einer ausserwesentlich singulären Stelle haben wir jetzt noch das Zusammenfallen zweier ausserwesentlich singulären Stellen zu betrachten.

Deuten wir die Gleichungen

$$F_3 = 0, \quad F_{33} = 0$$

im Raume (x, y, y') wieder als die Gleichungen einer Raumcurve V, des Ortes der Spitzen der Umrisscurven, so wird ein Zusammenfallen zweier solcher Spitzen eintreten für die Berührungsstellen der Curve V mit einer der Flächen $F-k=0$. Dies liefert sofort die Bedingungsgleichung:

$$(28.)\qquad \begin{vmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 & 0 \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & 0 \\ \bar{F}_{331} & \bar{F}_{332} & \bar{F}_{333} \end{vmatrix} = 0.$$

Man hat also zwei wesentlich verschiedene Fälle dieses Zusammenrückens zu unterscheiden, je nachdem zu den Bedingungsgleichungen:

$$\bar{F}_3 = 0, \quad \bar{F}_{33} = 0$$

noch hinzutritt:

E) $$\bar{F}_{333} = 0 \qquad (\S\ 11),$$

beziehungsweise

F) $$\begin{vmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\S\ 12).$$

§ 11.

E) Die Bedingung $\bar{F}_{333} = 0$.

Dieser Fall gestaltet sich ganz analog dem schon in Abh. I. § 3 behandelten allgemeinen:

$$\bar{F}_3 = 0 \quad \bar{F}_{33} = 0.$$

Hier ergiebt sich sofort in erster Näherung die Differentialgleichung:

$$(29.)\qquad (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2)\xi + \tfrac{1}{24} \bar{F}_{3333}\, \eta'^4 = 0,$$

in welcher als nächste Näherungsglieder noch zutreten:

(30.) $\overline{F}_2\,\eta + (\overline{F}_{12} + y'_0\overline{F}_{22})\,\xi\eta' + \frac{1}{120}\overline{F}_{22222}\,\eta'^5$

Die durch den singulären Punkt hindurchlaufende Curve ist in erster Näherung gegeben durch:

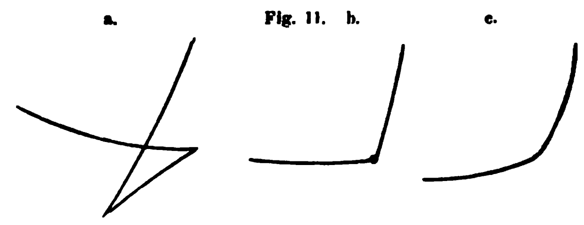
(31.) $(\overline{F}_1 + y'_0\,\overline{F}_2)\,\xi^3 + \frac{1}{24}\overline{F}_{2222}\,(\tfrac{\xi}{2}\eta)^4 = 0.$

Für die Umrisscurve U ergiebt sich (mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Näherung):

(32.) $\frac{1}{32}(\overline{F}_{12}+y'_0\overline{F}_{22})^4\xi^4 - \frac{1}{27}\overline{F}_{2222}((\overline{F}_1+y'_0\overline{F}_2)\xi+\overline{F}_2\eta)^3 = 0.$

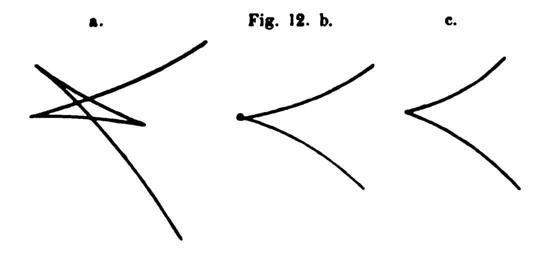
Eine gestaltliche Discussion der Umgebung der singulären Stelle zeigt nun einmal: Die Umrisscurve deformiert sich bei ändernder Constanten k derart, dass zwei Spitzen in der bekannten durch die Figuren 11 a, b, c gekennzeich-

a. Fig. 11. b. c.



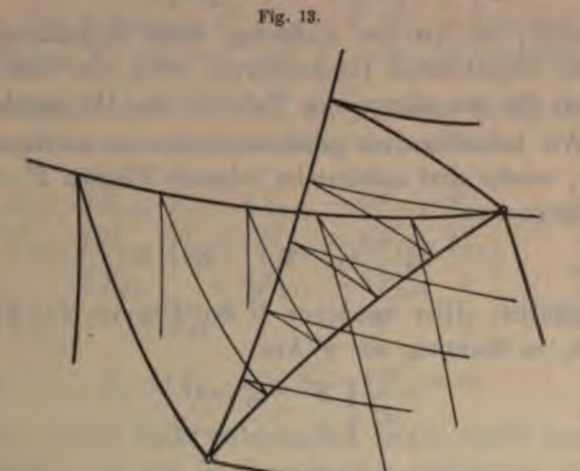
neten Weise zusammenrücken, um dann imaginär zu werden. Der Verfolg des Zusammenhangs der einzelnen Blätter der Flächen $F - k = 0$ bei diesem Uebergang ergiebt dann einen ähnlichen Uebergang der Curven des Integralsystems, bei welchem drei Spitzen (die sich auf die drei Zweige der Umrisscurve (Fig. 11ᵃ) verteilen) zusammenrücken, wobei nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle die Integralcurven

a. Fig. 12. b. c.



nur eine einzige Spitze aufweisen. Die Fig. 12a, b, c zeigt diesen Uebergang, während Fig. 13 den Gesammtverlauf der

Fig. 13.



Curven des Integralsystems in einer penultimaten Form zusammenstellt.

Es ist leicht nachzuweisen, dass ein analoger gestaltlicher Uebergang die Singularität kennzeichnet, welche eintritt, wenn an einer Stelle x_0, y_0, y'_0 alle Ableitungen von F nach y' bis hin zur n^{ten} verschwinden.

§ 12.

F) Die Bedingung $\overline{F}_1 \overline{F}_{32} - \overline{F}_2 \overline{F}_{31} = 0$.

Tritt zu den Gleichungen

$$\overline{F}_3 = 0, \quad \overline{F}_{33} = 0$$

noch die obige Bedingungsgleichung hinzu, so ist für den Verlauf der durch den singulären Punkt gehenden Integralcurve die schon in Abh. I. § 3 discutirte Gleichung

$$(33.) \qquad (\overline{F}_1 + y'_0 \overline{F}_2)\xi + \tfrac{1}{6} \overline{F}_{333} \eta'^3 = 0$$

maassgebend, welcher die Curve

$$(34.)\qquad (\overline{F_1} + y'_0\, \overline{F_2})\, \xi^3 + \tfrac{1}{6}\, \overline{F}_{333}\, (\tfrac{3}{2}\, \eta)^2 = 0$$

entspricht; die Art der Auflösung dieser Singularität aber für die benachbarten Integralcurven wird eine andere, als die dort für den allgemeinen Fall (in Fig. IV) gegebene.

Wir betrachten zur genaueren Discussion im Raume x_0, y_0, y'_0 wieder drei aufeinander folgende Flächen $F - k = 0$, den Parametern

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

entsprechend. Hier bezeichne $\overset{\circ}{U}$ den Umriss der Fläche $F - k_0$ in Richtung der y'-Axe:

$$(35.)\qquad \overset{\circ}{U} \begin{cases} F - k_0 = 0, \\ F_3 = 0; \end{cases}$$

und analog $\overset{-\varepsilon}{U}$, $\overset{+\varepsilon}{U}$ die Umrisscurven für die beiden Nachbarflächen; ferner sei V der Ort derjenigen Punkte aller Umrisscurven U der Flächen $F - k = 0$ (in Richtung der y'-Axe), für welche die Tangente auf der $x\,y$-Ebene senkrecht steht:

$$(36.)\qquad V \begin{cases} F_3 = 0, \\ F_{33} = 0. \end{cases}$$

Endlich sei W der Ort der Punkte aller dieser Umrisscurven, für welche die Schmiegungsebene auf der $x\,y$-Ebene senkrecht steht:

$$(37.)\qquad W \begin{cases} F_3 = 0, \\ H = 0, \end{cases}$$

wo H die Hesse'sche Form von F bezeichnet.

Betrachtet man die Projection aller Umrisscurven in die $(x\,y)$-Ebene, so entspricht V dem Ort der Spitzen, W dem Ort der Wendepunkte dieser Projectionen.

Nun zeigt eine Entwicklung der Gleichungen für U, V, W in der Umgebung unseres singulären Punktes:

1. Die Bedingung $\overline{F}_1 \overline{F}_{32} - \overline{F}_2 \overline{F}_{31} = 0$ besagt, dass die Flächen $F - k_0 = 0$ und $F_3 = 0$ sich berühren, dass also die Umrisscurve $\overset{\circ}{U}$ in x_0, y_0, y'_0 einen Doppelpunkt besitzt; wir haben also zwei Fälle zu trennen:

$$(38.)\quad \begin{vmatrix} \overline{F}_{11} - \lambda \overline{F}_{311} & \overline{F}_{12} - \lambda \overline{F}_{312} & -\lambda \overline{F}_{313} & \overline{F}_{13} \\ \overline{F}_{21} - \lambda \overline{F}_{322} & \overline{F}_{22} - \lambda \overline{F}_{322} & -\lambda \overline{F}_{323} & \overline{F}_{23} \\ -\lambda \overline{F}_{331} & -\lambda \overline{F}_{332} & -\lambda \overline{F}_{333} & 0 \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} < 0 \ \text{isolirter Doppelpunkt.} \\ > 0 \ \text{Doppelpunkt mit reellen Tangenten.} \end{matrix}$$

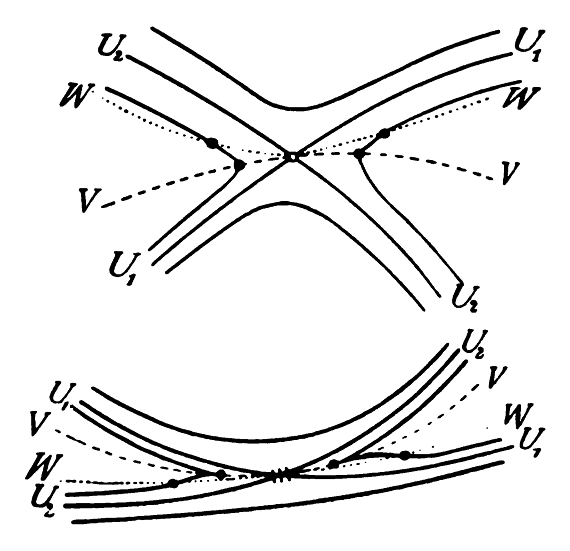
(wobei $\overline{F}_1 - \lambda \overline{F}_{31} = 0, \ \overline{F}_2 - \lambda \overline{F}_{32} = 0$).

Im zweiten Falle verlaufen die beiden reellen Aeste der Umrisscurve, die sich im Doppelpunkte durchsetzen, der Art, dass in den wirklichen Doppelpunkt noch ein scheinbarer Doppelpunkt der Umrisscurve gerückt ist. In der Projection auf die xy-Ebene spricht sich dies, wie eine kurze Rechnung zeigt, dadurch aus, dass hier die beiden Zweige U_1, U_2 der Umrisscurve $\overset{\circ}{U}$ eine dreipunktige Berührung mit einander eingehen. (Vergl. die umstehende Fig. 14.)

2. Die Curven V und W durchsetzen den singulären Punkt und zwar mit gemeinsamer Tangente; die Projectionen auf die xy-Ebene dieser beiden Curven berühren sich also vierpunktig. In dem in der untenstehenden Fig. 14 dargestellten Falle des „Doppelpunkts mit reellen Tangenten" sind dabei die Tangentenrichtung der Curven V, W und die Richtung der y'-Axe getrennt durch die beiden Tangenten der Curve $\overset{\circ}{U}$.

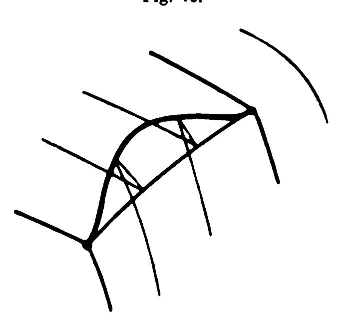
Betrachtet man jetzt den Grenzübergang für die den Parametern $k_0 - \varepsilon$, k_0, $k_0 + \varepsilon$ entsprechenden Flächen, so

Fig. 14.



ergiebt sich das Zusammenrücken zweier Spitzen der Umrisscurve zugleich mit dem Zusammenfallen zweier Wendepunkte derselben in der Weise, wie es Fig. 15 für den isolirten

Fig. 15.



Doppelpunkt von $\overset{\circ}{U}$ in einer ersten penultimaten Form, Fig. 16a und b für den nichtisolirten Doppelpunkt in den den Parametern $k_0 - \varepsilon$ wie $k_0 + \varepsilon$ entsprechenden Formen darstellt.



In gleicher Weise findet sich auch der Verlauf der Curven des Integralsystems mit dem bekannten Spitzenpaar eingetragen.

Ueberblicken wir das Ergebniss der vorliegenden Untersuchung über Auftreten, Umformung und Verschwinden der singulären Stellen in dem System der Differentialgleichungen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

und beachten dabei, welchen Einfluss diese Aenderungen in den singulären Stellen auf die in Abh. I. § 4 erörterten Abzählungen haben, so findet sich, wie notwendig:

Der Gleichung

$$K = s_0 + s_\infty - s_2,$$

welche die Beziehung der Characteristik (Zusammenhangszahl) einer Fläche $F - k = 0$ zu den Anzahlen s_0, s_∞, s_2 der singulären Stellen I^ter^, III^ter^ und II^ter^ Art für das zugehörige System der Integralcurven angiebt, entspricht das Verhalten der Singularitäten beim Durchgang durch die Knotenpunkte des Flächensystems. Hier ändert sich die Characteristik um ± 2, und dementsprechend ändert sich auch (in der durch die Fälle **C** a, b, c, d unterschiedenen Weise) die Anzahl

der wesentlich singulären Stellen durch Auftreten (bez. Verschwinden) von jedesmal zwei Punkten I^ter oder II^ter Art.

Die Aenderungen im Flächensystem, welche keine Aenderung in der Characteristik hervorrufen, lassen auch die obige Formel unverändert:

Es entstehen (bez. verschwinden) im Falle **A** stets paarweise je ein Punkt P_x und ein Punkt P_y, die sich bei der Abzählung compensieren. Im Falle **B** verwandelt sich ein Punkt P_x in einen (für die Abzählung aequivalenten) Punkt P_0 oder umgekehrt. Im Falle **D** findet nur eine Verschiebung eines wesentlich singulären Punktes von einem Blatte der Fläche auf ein anderes statt, durch welche sich der Verlauf der Integralcurven in den aus den einzelnen Blättern bestehenden Teilgebieten entsprechend ändert, der Gesammtverlauf aber nicht. Die Fälle **E** und **F** bringen ebenso nur Aenderungen hervor, die sich auf die einzelnen Teilgebiete beziehen, innerhalb welcher sich (Abh. I. pag. 47) analoge Relationen wie für die Gesammtfläche aufstellen lassen.

In jedem Falle sind es ganz bestimmt gestaltlich zu bezeichnende Uebergangsformen, welche durch die successiven Aenderungen, die ein System von Integralcurven bei unserem Deformationsprocesse erleidet, hervorgerufen werden; sie ergeben, damit mag die Absicht der vorstehenden Untersuchung zusammengefasst sein, innerhalb der schon Eingangs bezeichneten Grenzen einen weiteren Aufschluss über den Gesammtverlauf solcher Curvensysteme.

Geologische Bemerkungen
über die
warme Quelle des Brennerbades
und ihre Umgebung.

Von W. v. Gümbel.

(Eingelaufen 5. März.)

Zu der hohen Bedeutung, welche der Brenner-Pass als leicht zugängliche, bequeme und daher auch am meisten benützte Verbindungs- und Verkehrsstrasse der Gebiete nördlich und südlich der Alpen seit den ältesten Zeiten besitzt und zu dem grossen Interesse, welches derselbe als niedrigste, quer verlaufende Einsattelung im ganzen Zug des Centralstockes der Alpen bezüglich der Erklärung seiner Entstehung der wissenschaftlichen Forschung bietet, gesellt sich noch als besonders auffallende Erscheinung das Auftreten der warmen Quelle des Brennerbades, welche nahe auf dem höchsten Scheitelpunkte der Passvertiefung zum Vorschein kommt.

Derartige Thermen gehören gerade nicht zu den häufigen Erscheinungen in den Alpen und es liegt desshalb die Frage umso näher, welchen besonderen geologischen Verhältnissen das Vorkommen einer solchen warmen Quelle auf diesem Höhenpunkte unseres Hochgebirges ihren Ursprung

[illegible]

[illegible] Mineral- [illegible] in den [illegible] anerkennen. [illegible]

[illegible]

lichen Alpen mich so oft über den Brenner geführt hatten, ohne daselbst behufs geologischer Untersuchungen Aufenthalt zu nehmen. Ein längeres Verweilen in Gossensass während des letzten Sommers bot mir nun Gelegenheit, das Versäumte nachzuholen. Die nachfolgende Schilderung soll einen, wenn auch kleinen Beitrag zur näheren Kenntniss der geologischen Verhältnisse des Brennerbades und seiner Umgebung liefern.

Die warme Quelle des Brennerbades.



Das Gebirge am Brennerbad.

Die warme Quelle des Brennerbades soll nach einem alten Badbüchlein[1]) schon im 14. Jahrhundert bekannt und

1) Kurtzer Inhalt und Anweisung, wie nemlich das alt-wohlberühmte Kraft- und Tugendwürckende, also genannte Heylbrunner- oder Brenner-Bad in d. f. Gr. Tyrol entspringend etc. solle gebraucht werden. Zum erstenmal gedruckt zu Ynsbrugg durch D.

benützt worden sein; später aber verschüttet ist dieselbe erst wieder durch Zacharias Geitzkofler von und zu Gaillenbach gegen Ende des 16. Jahrhunderts aufgedeckt und zu Badzwecken hergerichtet worden. Es wäre zu verwundern, wenn diese Quelle, so unmittelbar an der ältesten Verkehrstrasse durch die Alpen gelegen, nicht schon im Alterthume die Aufmerksamkeit auf sich gezogen hätte. Doch scheinen hierüber zuverlässige Nachrichten zu fehlen. Jetzt ist dieselbe im Besitz der Stadt Sterzing und wird zum Theil in einer noch recht primitiv eingerichteten Badehütte für die Landleute, bei welchen ihre Heilwirkung in sehr hohem Ansehen steht und ausserdem in einem den Anforderungen der Neuzeit entsprechenden grossen Kurhotel ausgiebig zu Badzwecken benützt.

Die Quelle bricht nur um Weniges tiefer (1330 m) als der Sattelpunkt des Brennerpasses (1362 m) bereits auf der Südabdachung desselben dicht neben der Strasse am Westfusse des zum Wolfendorn und zur Fladspitze ansteigenden Gehänges hervor und ist in einer seichten, brunnenähnlichen Vertiefung innerhalb des erwähnten Badehauses gefasst. Eine wenig vertiefte schmale Rinne, welche hinter diesem Badhause an dem Gehänge steil aufwärts sich zieht, deutet die Richtung an, in welcher das Wasser herzukommen scheint. Diese Rinne ist unten zum Schutz der Quellenfassung brückenartig überwölbt und auf der Sohle ausgepflastert, sodass zeitweise wenigstens ein Theil des Quellwassers unter diesem Gewölbe zwischen dem Steinpflaster hervordringt. In dem dunklen Quellenraum selbst lässt sich bei künstlicher Beleuchtung wenigstens so viel wahrnehmen, dass das Quellwasser nicht aus der Tiefe emporsprudelt, sondern seitlich vom Berghang her abfliesst. Man bemerkt keine lebhafte Bewegung des

Paur, Anno 1603. (Abdruck 1887 zu Sterzing in der Buchdruckerei des A. Mnerinsky.) — Das Brennerbad von Conrad Fischnaler, Innsbruck bei Wagner 1878.

Wassers und kein Aufsteigen von Gasblasen, ebensowenig irgend einen Geruch nach sich entwickelnden Gasen.

Das Gestein, welches unter dem ziemlich mächtigen Thal- und Gehängeschutt in nächster Nähe der Quelle an dem Berghang aufstreicht, ist ein glimmerreicher, Schwefelkies führender, flasriger Schiefer, begleitet von quarzitischen Lagen, während sonst in der weiteren Umgebung der hier sehr verbreitete kalkige Phyllit mit zwischengelagerten Bänken von körnigem Kalk den Untergrund bildet und die benachbarten Berge zusammensetzt. Die Schichten streichen, abgesehen von kleinen Falten und Biegungen, weit vorherrschend von SW. nach NO. und fallen ziemlich constant unter 30—40° nach NW. ein; nur in der Nähe der Quelle beobachtet man südöstliches Einfallen.

Das Wasser des Brennerbades gehört zu den an Mineralstoffen armen, lauwarmen Thermen. Seine Temperatur wird allgemein zu 23,1° C., also um nahezu 19° wärmer, als die mittlere Jahrestemperatur des Bodens am Ausflusspunkte (zu 4,2° C.[1]) angenommen). Nach Barth, Senkofer und Kölle[2]) beträgt sie 22,9° C. Ich habe dieselbe wiederholt im August und September 1891 zu 21,6° gemessen, während die Temperatur des oberhalb der im Badehaus gefassten Quelle unter dem erwähnten Gewölbe ausfliessenden Wassers nur 20° C. betrug. Mitte September war dieser obere Ausfluss versiegt, ohne dass dadurch an der Temperatur der Badequelle sich eine Aenderung bemerkbar machte. Ob die Wärme der Badequelle in neuerer Zeit gegen früher abgenommen hat, muss ich unentschieden lassen. Es scheint dies aber der Fall zu sein. Zum Vergleiche wurde die Tem-

1) Die mittlere Jahrestemperatur der Luft auf dem Brennerpass wird zu 3,4° angegeben, während hier die nach der Wärme der gewöhnlichen Quellen bemessene Temperatur des Bodens 4,2° beträgt.

2) Bericht des naturwissensch.-medizin. Vereins in Innsbruck II. 1871. S. 26.

peratur mehrerer benachbarten gewöhnlichen Quellen wiederholt gemessen. Eine Trinkquelle in nächster Nähe des Bades neben der Strasse nach Gossensass an einer verebneten, mit einer Ruhebank versehenen Anlage (1325 m) ergab 4,2°; eine sehr starke Quelle nahe unter der Restauration (nicht Eisenbahnstation) Schellenberg 5,3° C. bei 1305 m Höhe; die Haupttrinkquelle oberhalb Gossensass 6,2° C. bei 1075 m; ebenso die Quelle des Springbrunnens am Redwitzplatze, eine starke Quelle unterhalb Venaders im Obernberger Thale bei 1225 m gleichfalls 6,2° C. Die sämmtlichen Quellen erweisen sich etwas wärmer als die berechnete mittlere Jahrestemperatur der Luft an den entsprechenden Ausflusspunkten. Dies dürfte wohl in der langanhaltenden Bedeckung der Oberfläche mit Schnee, welche das Eindringen grösserer Kälte in den Boden verhindert, seinen Grund haben. Bemerkenswerth ist der Einfluss, welchen das von der Quelle in die vorüberfliessende noch ganz kleine Eisack sich ergiessende Wasser auf die Temperatur der letzteren ausübt. Nahe oberhalb der Einmündung des Badequellenabflusses wurde die Wärme des Eisackwassers zu 9,0° C. gemessen; nach dem Zufluss der Quelle zur Eisack steigt deren Temperatur auf 11,4° C. und behält diesen Wärmegrad, der früh morgens bei nahezu gleich hoher Lufttemperatur in möglichst kurzer Zeit an sehr vielen Stellen bis zur Einmündung des Pflerschbaches bei Gossensass gemessen wurde, trotz der ungeheuren Reibung, mit welcher das Wasser in fast ununterbrochenem Wasserfall-artigem Abfluss 300 m hoch abstürzt, ohne nennenswerthe Erhöhung bei.

Was die Wassermenge der Badequelle anbelangt, so scheint diese sehr veränderlich zu sein, je nachdem bloss im Badehaus oder auch noch oberhalb desselben unter dem erwähnten Gewölbe ein Abfluss stattfindet. Zur Zeit, als letzteres nicht mehr der Fall war (Mitte September 1891), betrug der Quellenerguss ungefähr 40—50 Sekundenliter. Zu

einer genaueren Messung fehlte es an einer entsprechenden Vorrichtung.

In Bezug auf den Gehalt der Quelle an Mineralstoffen liegt eine Analyse (A) von L. Barth, K. Senkofer und R. Kölle[1]) vor. Da die Temperatur gegen früher abgenommen zu haben scheint, war es nicht unwichtig, zu untersuchen, ob auch eine entsprechende Gehaltsverminderung eingetreten ist. Eine erneuerte Analyse, welche Herr Ass. A. Schwager sowohl in Betreff des Mineralwassers (B), als wie eines gewöhnlichen Quellwassers von Gossensass (C) vornahm, ergab folgende Zahlen, denen zum Vergleiche auch die Analysen der verwandten Thermen von Gastein (G) und von Pfäffers-Ragaz (P) beigesetzt sind.

Nachstehende Zahlen lassen die chemische Verwandtschaft der verschiedenen Thermen der Alpen erkennen, welche überhaupt wenig von jenen des Gehaltes der gewöhnlichen, in älteren Gebirgsarten entspringenden Quellen abweichen. Es entspricht dieser Gehalt an Mineralstoffen auch im Allgemeinen der Beschaffenheit der Gesteine in der Nachbarschaft der Quellen. Die geringe Menge von Kalkcarbonat in den Gasteiner Thermen findet eine Erklärung in dem Umstande, dass diese Quellen in einem sehr kalkarmen Gneissgebirge ihren Ursprung haben, während die übrigen Quellen aus mehr oder weniger kalkhaltigen Schichten hervortreten, wie es sich insbesondere bei der Brennerbadquelle nachweisen lässt. Der Gehalt an Eisen[2]) rührt wohl von zersetztem Ankerit her. Der bei dieser Quelle zur Zeit gefundene, gegen früher geringere Gehalt an festen Bestandtheilen scheint mir von

1) Bericht des naturwissenschaftl.-medizin. Vereins in Innsbruck. II. Jahrg. 1871. S. 27.

2) Unterhalb des Bades in der Richtung nach Gossensass zu zeigen sich reichliche Spuren von Eisenguhren, die vielleicht von einer eisenhaltigen Quelle abstammen. Es würde sich empfehlen, der Sache hier näher auf den Grund zu sehen.

1 Liter Wasser enthält	A	B	C	G	P
Kalkcarbonat	0,1756	0,0932	0,1600	0,0195	0,1306
Bittererdecarbonat . . .	0,0447	0,0577	0,0336	0,0017	0,0531
Natriumcarbonat	—	—	—	—	0,0061
Eisencarbonat	0,0035	—	—	0,0005	0,0017
Kalksulphat	0,1585	0,0284	0,1034	—	0,0015
Bittererdesulphat	—	0,0106	—	—	—
Natriumsulphat	0,0144	0,0181	0,0284	0,2085	0,0329
Kaliumsulphat	0,0168	0,0122	—	0,0135	0,0075
Chlornatrium	0,0102	—	0,0069	0,0428	0,0493
Chlorkalium	—	0,0022	0,0067	—	—
Chlormagnesium	0,0060	—	—	—	—
Eisenoyyd	—	0,0003	0,0004	—	—
Thonerde	—	0,0026	0,0045	—	—
Thonerdesilikat	0,0007	—	—	—	—
Thonerdephosphat . . .	0,0003	—	—	0,0007	0,0009
Kieselsäure	0,0090	0,0097	0,0045	0,0496	0,0141
Freie Kohlensäure . . .	—	—	—	0.0309	0,0971
Glühverlust	—	0,0041	0,0324	0,0004	0,0006
Zusammen	0,4396 [1])	0,2391 [2])	0,3808	0,3681 [3])	0,3954 [4])

1) Dazu Spuren von Salpetersäure, Ammoniak, Lithium; 0,0118 organ. Substanz im Liter und 46,1 ccm Gas (18,4 N; 7,7 O. u. 20,0 CO_2).

2) Hierbei konnten die nur in geringer Menge vorkommenden Bestandtheile bei der kleinen zur Verfügung stehenden Wassermenge nicht bestimmt werden; Eisenoxyd ist als Carbonat im Quellwasser enthalten, in der Analyse B jedoch als Fe_2O_3 bestimmt; der Gehalt an Kalkcarbonat wegen bereits schon eingetretener Abscheidung in den Flaschen scheint etwas zu gering angegeben.

3) Dazu Cl Li = 0,0027, Mangancarbonat- und Fluorcalcium-Spuren; ferner kleinste Mengen von Caesium, Rubidium, Strontium, Titansäure und Arsen.

4) Dazu Barytcarbonat = 0,00064; Strontiumcarbonat = 0,00152; Chlorlithium = 0,0002; Borsaures Natrium = 0,00038; Jodnatrium = 0,00003; dann Spuren von Bromnatrium, Caesium, Rubidium und Thallium. In der Summe ist die freie und halbgebundene Kohlensäure mit eingerechnet; ohne diese ist die Summe 0,2990.

einer nicht zweckentsprechenden Fassung herzurühren, worauf schon der Umstand hinweist, dass, wie oben bereits erwähnt wurde, zeitweise offenbar zugehörige Wasseradern auch ausserhalb der Quellfassung hervorbrechen.

Der Phyllit in dem Brennergebiete.

Das im Quellengebiet des Brennerbades weit und breit herrschende Gestein ist der in dem Tiroler Centralalpenstock mächtig entwickelte Phyllit mit Uebergängen in Glimmer- und Gneissphyllit und mit Einlagerungen von körnigem Kalk (daher auch die Bezeichnung Kalkphyllit) und in Begleitung von grünen chloritischen und hornblendigen, sowie hellfarbigen quarzitischen Schiefern. Diesem älteren Gebirgsfundament sind in der Nähe des Brenners mächtige Stöcke und Schollen von jüngeren Trias- und Liaskalken aufgesetzt und zum Theil eingefaltet, zunächst im Tribulaunstock und im Kalkzug auf der nördlichen Seite des Pflerschthales. Erst entfernter erscheinen ächte Glimmerschiefer und Centralgneissschichten, welche als noch ältere Gebilde unter und neben dem Phyllit auftauchen, während Eruptivmassen, wie der Granit des Ifingers und der Franzensfeste, der Porphyr von Bozen und der Augitophyr des Fassathales, beträchtlich weit abstehen und sicher ohne jede Beziehung zu der Therme des Brenners sind.

Soviel auch durch die älteren, grundlegenden Arbeiten des montanistischen Vereins und vorzüglich Ad. Pichler's[1]) über die geologischen Verhältnisse des Brennergebirgs zu unserer Kenntniss gekommen ist, so vermisst man doch bezüglich der nächsten Umgebung des Brenner-Bades ausführlichere Mittheilungen der neuesten Forschungsresultate, welche durch die in so ausgedehnter Weise vorgenommenen

1) Besonders in: „Zur Kenntniss der Phyllite in den tirolischen Centralalpen." (Tschermak's Mineral. und petrograph. Mittheilungen. V. 1883, S. 293.)

Untersuchungen von Oberbergrath Stache[1]) und Dr. Teller gewonnen worden sind. Doch dürfen wir nach den gegebenen Andeutungen wohl vermuthen, dass im Allgemeinen die Gebirgsverhältnisse im Brennergebiete sich ähnlich denen verhalten, welche in so vortrefflicher und eingehender Weise von Dr. Teller[2]) in Bezug auf die zunächst südlich anstossenden Gebirgstheile zwischen Etsch und Eisack, sowie der Höhenzüge nördlich vom Pusterthal geschildert worden sind. Darnach haben wir es in diesen Gebirgstheilen vielfach mit nach Nord überkippten, an parallelen Längsbrüchen überschobenen, isoklinen Einfaltungen jüngerer Ablagerungen in die Glimmerschiefer und Gneisse zu thun und die hier häufig beobachteten Schollen von Triasdolomiten als Denudationsreste von in den Phyllitzügen eingefalteten, ursprünglich ihnen aufgesetzten Ablagerungen aufzufassen.

Ich kann es nicht wagen, nach einem nur wenige Wochen dauernden Aufenthalt in dieser Gegend zur Reconvalescenz, während welchem ich nur gelegentlich einige geologische Untersuchungen vornehmen konnte, den höchst verwickelten Gebirgsbau dieser an sich in vielen Theilen nicht leicht zugänglichen Hochalpen mehr, als die ganz allgemeinen Eindrücke zu schildern, welche der Anblick des Gebirgs auf mich gemacht hat. Je näher man dieses im Einzelnen innerhalb kleiner Gebiete kennen lernt, um so höher scheinen sich die Schwierigkeiten anzuhäufen, die Beobachtungen unter einander richtig zu verbinden, um daraus allgemein gültige Folgerungen zu ziehen, wenn man nicht grössere Striche

1) Stache in Verh. d. k. k. geolog. Reichsanstalt 1872 S. 78; [illegible] Jahrb. XXIV S. 135 und 333; Verh. [illegible] 249 und 250; Jahrb. XXVII S. 143; [illegible] 1884 S. 277.

2) [illegible] k. k. geol. Reichsanstalt in Wien [illegible] S. 91; 1881 S. 69; 1882 [illegible]

des Gebirgs zu überblicken in der Lage ist und mit seiner Tektonik im Ganzen sich bekannt machen kann. Doch dürfte immerhin auch ein kleiner Beitrag zur geologischen Kenntniss dieser Gegend nicht ohne Werth sein, um für die Auffassung im grossen Ganzen benützt werden zu können.

Ehe ich die gewonnenen Eindrücke über den Gebirgsbau, namentlich in Bezug auf die warmen Quellen des Brennerbades, weiter schildere, schalte ich einige wenige Bemerkungen über die Beschaffenheit der hier auftretenden Gesteine ein, welche sich Ad. Pichler's[1]) vortrefflichen Beschreibungen alpiner Phyllite zunächst anschliessen. Weit vorherrschend in der Brennergegend ist jener glimmerähnlich, jedoch etwas matter glänzende Thonschiefer, der als Phyllit und Kalkphyllit bezeichnet zu werden pflegt. Im Allgemeinen hat das Gestein in seinen vielfachen Abänderungen auf mich den Eindruck gemacht, dass es dem in anderen Urgebirgsdistrikten, z. B. im bayerisch-böhmischen Waldgebirge als jüngstes archäolithisches Glied entwickelten Schiefer, jedoch mit dem Unterschiede gleicht, dass in letzterem zwar auch ein Gehalt an Kalk, aber auf einzelnen abgeschlossenen Zwischenlagen concentrirt vorkommt, während derselbe im alpinen Phyllit ausser den Ausscheidungen in Lagen häufig noch in geringen Mengen durch die ganzen Massen fein vertheilt sich vorfindet. Nach Stache dürfte auch der Schiefer vom Brenner der paläolithischen Reihe zuzuzählen sein.

Der Phyllit des Brennergebiets besitzt durchschnittlich eine dunkelaschgraue, bald mehr ins Grünliche, bald mehr ins Weissliche, oft ins Schwärzliche spielende Färbung, ist meist flasrigwellig, selten ebenflächig deutlich geschichtet und zeigt auf dem Querbruche eine oft ins Bizarrste gehende Faltelung, wellige Biegungen und Knickungen, wobei thonige

1) Zur Kenntniss der Phyllite der tirol. Centralalpen in Tschermaks Mineralog. Mittheil. V. 1883, 293.

Flasern in dünnsten Lagen mit quarzigen und kalkigen Streifchen wechseln. Durchgehends sind mit diesen Krümmungen parallel verlaufende grössere Ausscheidungen von Quarz und Kalkspath oder beide mit einander vergesellschaftet verbunden. Auf die Bildung dieser Mineralausscheidungen werden wir später zurückkommen.

In Dünnschliffen, welche wegen der welligen Biegungen nicht genau mit den Schichtflächen gleichlaufend herzustellen sind, bemerkt man weissliche glimmerähnliche Blättchen mit unregelmässig ausgezackten Rändern neben grünen, schwach dichroitischen Schüppchen und einer mehr oder weniger reichlichen Beimengung von staubförmigen oder zu grösseren Flocken angehäuften, intensiv schwarzen, undurchsichtigen, kohligen Körnchen. Rutilnädelchen wurden nicht beobachtet. Auf den Querdünnschliffen tritt die flasrige Verflechtung der schuppigen Gemengtheile mit quarzigen wasserhellen Streifchen besonders deutlich hervor. Makroskopisch bemerkt man auf den Schichtflächen ausser weissen, selten braunen Glimmerblättchen häufig eingesprengte grüne Schüppchen[1]) und metallglänzende Blättchen, welche isolirt schwach vom Magnet angezogen werden, eine Reaktion auf Titan erkennen lassen und demnach als Titaneisen anzusprechen sein dürften. In dem mit Flusssäure behandelten Pulver bleiben neben den kohligen Körnchen zahlreiche kleine braune stark dichroitische Nädelchen von Turmalin im Rückstande, in welchem weder Mikrolithe von Rutil, noch, was besonders auffallend ist, von dem sonst so allgemein verbreiteten Zirkon beobachtet worden sind.[2]) Beimengungen von Pyrit und Magneteisen sind zufällig und im Ganzen selten, häufiger jedoch am Brennerbad.

1) Nach den mir von Herrn Professor Cathrein gütigst mitgetheilten Chloritoidschiefern von Prägratten sind diese Beimengungen mit Chloritoid nicht identisch.

2) Ad. Pichler beschreibt (a. a. O. S. 300) einen Phyllit von einem Absturz 6 km von dem Brennerpass als reich an Rutilkryställchen und Rhätizit (Disthen).

Der kohlige Bestandtheil in diesem Reste giebt getrocknet und auf Papier gestrichen einen schwarzen russigen, keinen graphitähnlich glänzenden Strich, kann also nicht als Graphit gelten. Damit stimmt auch sein Verhalten bei einer Behandlung mit chlorsaurem Kalium und Salpetersäure, wobei er sich in gewöhnlicher Temperatur nur wenig verändert, bei Anwendung von Wärme aber vollständig zersetzt. Ausserdem ist derselbe, wenn auch schwierig, verbrennlich. Zur chemischen Analyse wurde ein Schieferstück ausgewählt, welches den vorherrschenden Charakter des Brennerphyllits zeigte und der Gesteinshalde aus dem langen Tunnel unterhalb des Passes entnommen wohl verhältnissmässig weniger Veränderungen, als die zu Tag ausstreichenden Gesteinslagen erlitten haben dürfte. Nach der von Herrn Ass. Ad. Schwager vorgenommenen Analyse hat der Schiefer folgende Zusammensetzung:

Kieselsäure	42,55	Natron	0,99
Titansäure	7,11	Kupferoxyd	Spur.
Thonerde	24,22	Kohlensäure	0,02
Eisenoxyd	8,52	Phosphorsäure	0,43
Eisenoxydul	3,48	Chlor	0,02
Manganoxydul	0,70	Schwefelsäure	0,08
Kalkerde	0,46	Schwefel	0,05
Bittererde	3,70	Kohlige Substanz	0,11
Kali	4,99	Wasser	2,61
			100,04.

Das Ergebniss dieser Analyse stimmt, soweit mir bekannt ist, mit keiner Zusammensetzung anderer ähnlicher Schiefer ganz genau überein. Am ähnlichsten verhält sich der sogen. Bündenerschiefer aus dem Unterengadin bei Tarasp.[1]) Es deutet das auf eine grosse Unbeständigkeit in der Zusammensetzung und auf grosse Verschiedenheit der

1) v. Gümbel, Geologisches aus dem Engadin in dem Jahresbericht der naturf. Gesellsch. Graubündens, XXXI, S. 2.

Gesteine, welche man allgemein als **Phyllit** bezeichnet. Auch in Bezug auf die näheren Mineralbestandtheile, welche zu ermitteln durch eine Partialanalyse versucht wurde, zeigt sich wenig Uebereinstimmung mit den Phylliten anderer Gegenden. Ein Schiefer von anscheinend dem allgemeinen Charakter der Kalkphyllite des Brennergebiets entsprechender Beschaffenheit aus dem Eisacktunnel unterhalb Gossensass erwies sich zusammengesetzt aus

A) 1,26 % in ganz verdünnter Salzsäure löslichen Carbonaten

B) 35,84 % in concentrirter Salzsäure in der Wärme zersetzten Gemengtheilen und

C) 62,90 % unzersetztem Rest.

Die Carbonate (A) bestehen aus

Kalkcarbonat	0,900 =	71,43 %
Bittererdecarbonat . .	0,114	9,05 „
Eisencarbonat	0,210	16,66 „
Mangancarbonat . . .	0,036	2,86 „
	1,260	100,00 %

Der durch concentrirte Salzsäure zersetzte Gemengtheil gehört vorwaltend der grünfärbenden Beimengung an. Denn nach der Einwirkung der Säure zeigt der Rückstand eine weissliche Färbung, während der grünliche Farbenton verschwunden ist. Die zersetzte 35,84 %ige grüne Substanz besteht in % berechnet aus

Kieselsäure	20,8500
Titansäure	0,7228
Thonerde	10,7386
Eisenoxyd	20,0160
Eisenoxydul	29,1900
Manganoxydul	2,0850
Kalkerde und Alkalien	Spuren
Bittererde	4,0042
Wasser	12,5100
	100,1166

Unter den vielen grünen, dem Chlorit ähnlichen, jedoch durch Salzsäure zersetzbaren Mineralien scheinen List's Metachlorit und der Thuringit in ihrer Zusammensetzung der des grünen Gemengtheils in dem analysirten Schiefer am nächsten zu kommen. Von Chloritoid kann nach dem Verhalten zur Salzsäure ebensowenig wie nach dem schwachen Dichroismus im polarisirten Lichte die Rede sein. Die Zahlen dürften jedoch nicht genau der wirklichen Zusammensetzung des Minerals entsprechen, weil durch die Säure wohl auch noch andere wenn auch untergeordnete Beimengungen wenigstens theilweise mit zersetzt werden, worauf der beträchtliche Gehalt an Eisenoxyd und Titansäure hinweist. Es ist überhaupt zweifelhaft, ob der grünfärhende Gemengtheil der sog. Phyllite einem einfachen constant zusammengesetzten Mineral entspricht. Ich habe daher für die Bezeichnung dieser grünfärbenden Bestandtheile der Phyllite im Allgemeinen den Namen Chloropit vorgeschlagen.

Der nach der Behandlung mit Salzsäure übrig bleibende, 62,9 % betragende Rest besteht aus

Kieselsäure	50,05
Titansäure	2,20
Thonerde	35,25
Eisenoxyd	2,50
Kalkerde	Spuren
Bittererde	1,08
Kali	5,07
Natron	1,60
Kohlige Theile und H_2O	2,00
	99,75

Es entspricht dies einer mit Quarz vermengten Sericit- oder Glimmer-artigen Substanz. Es ist demnach der Phyllit des Brenners der Hauptsache nach aus einem Glimmer-ähnlichen, einem chloritischen Mineral, aus Quarz und Kalkcarbonat zusammengesetzt.

Wenn man nun auch den durch diese Analysen gewonnenen Zahlen keineswegs den Werth beilegen darf, dass dieselben den mittleren Gehalt der Schiefer genau angeben, so scheint mir doch, dass neben der mikroskopisch-mineralogischen Untersuchung auch die chemische Zerlegung nicht von der Hand gewiesen werden darf, um weitere Hilfsmittel zur Unterscheidung der so verschiedenartigen, aber dem blossen Ansehen nach sehr ähnlichen Thonschiefergebilden zu gewinnen. In diesem Sinne mag dieser kleine Beitrag aufgefasst werden.

Mit diesen Glimmer-ähnlich glänzenden Schiefern, bei welchen zum Unterschied von dem ächten Glimmerschiefer der Glimmer-artige Bestandtheil sich nicht in zusammenhängenden, elastisch biegsamen Blättchen isoliren lässt, sind Einlagerungen von Quarzitschiefer spärlich, solche von grünen chloritischen Schiefern häufiger vergesellschaftet. Bei ersteren ist der Glimmer meist in dünnen weissen Blättchen deutlich entwickelt. Weit öfter stösst man auf grüne Schiefer, welche stellenweise wie im inneren Pflerschthal in hornblendige und dioritische Gesteine verlaufen.

Diese grünen Schiefer besitzen dem Aeusseren nach das Ansehen der Chloritschiefer, setzen jedoch in dieser Gegend keine grösseren Gebirgstheile zusammen, sondern beschränken sich auf schmale Zonen zwischen den Phylliten, aus denen sie allmälig durch Ueberhandnahme des grünen Gemengtheils hervorgehen. Dementsprechend werden sie von Salzsäure in der Kochhitze völlig zersetzt und geben mit Hinterlassung weisser Schüppchen und quarziger Theile eine an Eisenoxydul reiche Lösung. Doch ist der Gehalt an dem färbenden grünen Gemengtheil, der sich wie der Chloropit des Phyllits verhält, ein sehr wechselnder. In dem grünen Schiefer neben einem Quarzitschieferlager zwischen Gossensass und Sterzing finden sich bis 0,25 mm lange und 0,1 mm dicke Turmalinkryställchen von brauner Farbe sehr

häufig, seltener Zirkon in länglich runden Körnchen und Krystallsäulchen, dann Rutil in kleinen Säulchen und in bis 0,2 mm grossen Körnchen, Würfelchen von Eisenkies und Apatit neben weissen glimmerähnlichen Schüppchen und Quarz.

Aehnlich verhält sich der grüne Schiefer im Dorfe Gries. Doch fehlen hier Beimengungen von Rutil und Turmalin, während neben Zirkon metallischglänzende Magneteisenkörnchen, Apatit, Quarz und Kalkspath reichlich vorkommen.

In der Nähe dieses Fundpunktes stehen im Eingang ins Obernberger Thal mächtige Schichten des grünen Schiefers an. Hier herrschen in den Beimengungen Zirkon und Eisenkies neben sehr zahlreichen Körnchen eines wahrscheinlich dem Andalusit angehörigen Minerals vor, dagegen werden Turmalin-, Rutil- und Apatit-Einschlüsse vermisst.

Ein gleichgefärbter Schiefer bei Venaders im Obernberger Thal zeichnet sich durch den reichen Gehalt an eckigen Magneteisenkörnchen aus; daneben kommen auch Kalkspathkörnchen vor; Turmalin, Rutil und Zirkon wurden nicht beobachtet.

Besonders ausgezeichnet ist der grüne Schiefer in der Nähe des Dorfs Obernberg, der so von Epidot vollgespickt ist, dass er zuweilen in Epidotschiefer verläuft.

Aehnliche grüne Schiefer werden bekanntlich in der Nähe von Sterzing an den Gehängen des Pfitscher Thales von Serpentin und Hornblendeschiefer begleitet. Eine gewisse Aehnlichkeit mit den grünen Schiefern der Silvretta-Gruppe, welche ihre Ausläufer bis Nauders und bis zur Strasse bei Finstermünz vorschieben, ist unverkennbar; doch ist die Zone am Brenner nur schwach entwickelt, gleichsam nur angedeutet. Ein weiterer Vergleich mit den Pietre verdi Gastaldi's in den Westalpen liegt nahe.

Eine Reihe von Gesteinen aus diesen Alpentheilen, welche ich der Gefälligkeit des Herrn Prof. Sacco in Turin ver-

dankte, besteht theils aus typischen Glimmerschieferstücken, welchen oft Beimengungen von grünlichem Glimmer einen entsprechenden Farbenton ertheilen, theils aus Chlorit- und Strahlsteinschiefer namentlich aus dem Chialamberto Thale. Ihnen schliessen sich ausgezeichnete Serpentine in Begleitung von Serpentinschiefer, Dioriten und Gablero-artigen Gesteinen an. Grüne Schiefer nach Art der oben erwähnten aus der Brennergegend fanden sich unter dieser Sendung nicht. Sehr eigenthümlich und bemerkenswerth ist dagegen das unter der Bezeichnung Besimaudit von Herrn Sacco gesendete Gestein, welches gleichfalls eine grünliche Färbung besitzt.

Diese Besimaudite (Zaccagna in Boll. d. r. comit. geol. 1887. S. 416) sind aus den West- und ligurischen Alpen bekannt. Unter den Originalexemplaren dieses Gesteins gehören zwei Stücke unzweideutig einem glimmerfreien Quarzporphyr an, zwei Stücke sind aber sehr unseren Zwischenschichten ähnlich. Diese innige Verbindung von Porphyr mit den fast tuffartig ausgebildeten Schiefern spricht sehr zu Gunsten ihrer Gleichstellung mit Permbildungen.

Der eine grünlich gefärbte Porphyr vom Mt. Besimauda in den ligurischen Alpen selbst besteht aus einer äusserst feinkrystallinischen, feldspathig-quarzitischen Grundmasse mit Aggregatpolarisation, in welcher reichlich grünliche Körnchen und Blättchen eines Chlorit-artigen Minerals in streifigen und krystallähnlich umgrenzten Partien eingebettet sind. Ganz vereinzelt finden sich darin stark pleochroitische Nädelchen von Hornblende, Körnchen von Magneteisen und Zirkon. In dieser Grundmasse liegen meist scharf umgrenzte, weisse Orthoklasausscheidungen und nahezu in gleicher Menge meist in Krystallform ausgebildete wasserhelle Quarze voll von Bläschen, häufig von klaffenden Rissen durchzogen, welche wie der Substanz der Grundmasse ausgefüllt sind.

Das spezifische Gewicht des Gesteins beträgt 2,740—2,744

und ist auffallend hoch. Es mag dies von dem beigemengten Magneteisen herrühren.

Der möglichst rein isolirte in grösseren Körnern ausgeschiedene Feldspathbestandtheil besteht nach Analyse I und das Gestein im Ganzen nach Analyse II und ein zweites Vorkommen eines röthlich gefärbten Gesteines von Valle delle Corseglia (III) (Analyse von Ad. Schwager) aus:

	I	II	III
Kieselsäure	68,12	71,25	68,52
Titansäure	—	Spur	Spur
Thonerde	21,24	12,40	14,51
Eisenoxyd	Spur	6,60	5,71
Mangan	Spur	Spur	Spur
Kalkerde	1,26	0,20	1,26
Magnesia	0,62	0,63	0,63
Kali	6,00	5,20	5,24
Natron	3,60	3,02	3,22
Glühverlust	—	0,70	0,91
	100,84	100,00	100,00

Bei dem Feldspathbestandtheile ist der hohe Gehalt an Natron gegen Kali auffällig. Die optische Untersuchung hat jedoch ergeben, dass das Mineral der Orthoklas- und nicht der Plagioklasreihe angehört, wie dies namentlich die beiden Spaltflächen, welche keine Spur einer Parallelstreifung wahrnehmen lassen, bestätigen. Dem Orthoklas gegenüber erweist sich die Thonstein-ähnliche Grundmasse ärmer an Alkalien. Auch hier tritt der Natrongehalt stark hervor.

Das zweite Exemplar vom „Valle delle Corseglia olle Sella della Roschera“ ist ein fleischrothes Gestein von ähnlicher Beschaffenheit wie der oben erwähnte Porphyr, nur dass die Grundmasse keine oder nur selten chloritische Einmengungen besitzt, dagegen deutlich eine Fluidaltextur erkennen lässt. Der Orthoklas ist meist stark zersetzt und zeigt Aggregatpolarisation.

Die beiden Exemplare des schiefrigen Besimaudits aus dem Valle del Pesio der ligurischen Alpen S. von Cuneo, das eine aus dem Anfang des Thales (I), das andere von „Tra valle del Pesio e quelle dell' Ellero“ (II) gleichen, abgesehen von ihrer grünen Färbung, sehr den die Triaskalke der Centralalpen zunächst unterlagernden Gesteinen. Es sind knollig uneben wellig geschichtete Schiefer, in deren grünen chloritischen flasrigen Streifchen reichlich zum Theil grosse rundlich abgegrenzte Ausscheidungen von weissem und fleischrothem Orthoklas und wasserhellem Quarze eingebettet liegen. Die Hauptmasse der Flasern und die Mineralausscheidungen erinnern lebhaft an die oben erwähnten Porphyre vom Monte Besimauda. Die Orthoklasknollen sind stark zerklüftet, oft fast ganz zerstört und durch Hohlräume ersetzt, deren Wände zum Theil mit braunen Eisen- und Mangan-haltigen Quarzüberzügen bedeckt sind.

In Dünnschliffen, welche senkrecht zu den Schichtflächen hergestellt sind, bemerkt man in einander flasrig verlaufende [illegible] des grünen, chloritischen Gemengtheils neben [illegible] Ausscheidungen. Auch hier [illegible] nicht beobachtet. Im [illegible] — abgesehen von ihrer [illegible] jener des Besimaudits [illegible] Änderung diese Schiefer [illegible]

[illegible] nur ganz unbeträcht- [illegible] geringe Bei- [illegible] Der [illegible] unverändert. [illegible] dass die körnig [illegible] die grünen [illegible] [illegible] näher prüfen

kann. In einem Exemplar wurden kleine fadenförmige gekrümmte Nädelchen von Glaucophan beobachtet, der jedoch keine constante Beimengung zu sein scheint, da er in anderen Exemplaren des Schiefers fehlt. Die Bauschanalyse ergab folgende Zusammensetzung der beiden oben unter I und II bezeichneten Schiefer.

	I	II
Kieselsäure	73,50	71,00
Titansäure	0,50	1,25
Thonerde	8,88	10,68
Eisenoxyd (Oxydul?)	6,70	3,50
Manganoxydul	0,40	Spur
Kalkerde	0,50	1,00
Bittererde	0,96	0,40
Kali	3,40	5,50
Natron	5,30	4,80
Glühverlust	0,70	2,00
	100,84	100,13

Die Quarz- und Kalklinsen im Phyllit.

Von allgemeinerem geologischem Interesse ist die sonderbare Art, in welcher die linsenförmigen Ausscheidungen von Kalk und Quarz, indem sie den bizarrsten Biegungen und Faltungen des Phyllits folgen, aufzutreten pflegen. Wollte man annehmen, dass diese Verzerrungen in Folge eines Zusammenschubs durch dislocirende Kräfte oder durch Seitendruck erst entstanden wären, nachdem die ursprünglich mehr oder weniger ebengeschichteten Schiefer bereits verfestigt waren, so könnte dies nicht anders gedacht werden, als dass die oft beträchtlich dicken und dabei in engsten Krümmungen zusammengebogenen Linsen und Streifen von Quarz oder Kalkspath in kleinste Trümmer zerquetscht, zersprengt und zerstückelt worden wären. Demgegenüber erweisen sich diese Ausschei-

dungen, wie wir sie jetzt finden, als ganz compakte Körper, an denen man weder auf glattgeschliffenen und polirten Querschnitten mit der Lupe, noch in quergeschnittenen Dünnschliffen unter dem Mikroskop die Zeichen einer solchen Zertrümmerung wahrnehmen kann. Es zeigen sich nur ganz vereinzelte Querrisse, deren Anzahl in gar keinem Verhältnisse zu dem Grad der Krümmungen und Biegungen stehen. Sollten aber vielleicht die entstandenen Risse und Spältchen nachträglich wieder durch infiltrirte Mineralsubstanz ausgefüllt und dadurch die zerstückelte Masse wieder zu einem compakten Ganzen verkittet, gleichsam verheilt worden sein? Auch in diesem Falle müssten sich die Spuren einer solchen Vernarbung in den Dünnschliffen wahrnehmen lassen, wie man sie so deutlich an den unzweifelhaft durch Gebirgsdruck zusammengefalteten Kalk- und Hornsteinschichten beobachten kann. Die gekrümmten Kalklinsen erweisen sich unter dem Mikroskop so regelmässig krystallinisch-körnig zusammengesetzt, ohne Queradern einer zweiten Kalkspathansiedelung, wie der körnige Kalk der nicht gebogenen Lagen. In den Quarzlinsen erfüllt die Kieselsubstanz nicht gleichmässig den Raum, sondern es wechseln darin sandkornähnliche rundliche Parthien ohne scharfe Abgrenzungen mit opaken, gleichsam eine Grundmasse darstellenden Theilen, wobei in der Vertheilung der helleren Flecken eine gewisse Abhängigkeit von der äusseren Form der Linsen sich zu erkennen giebt, ohne dass jedoch eine concentrisch schalige Anordnung sich bemerkbar macht, wie eine solche bei den durch Lateralsecretion entstandenen Drusenbildungen vorzukommen pflegt. Dieses Verhalten und die Thatsache, dass, soweit meine Beobachtungen reichen, nie in der Mitte der Linsen sich ein Hohlraum, der etwa so, wie es bei Drusen gewöhnlich der Fall ist, mit Krystallen besetzt wäre, vorfindet, lassen den Gedanken nicht aufkommen, dass die Linsen als Ausfüllungen von Hohlräumen, welche etwa erst in Folge der Zusammen-

stauchung der schon verfestigten Thonschieferschichten entstanden wären, unter Vermittlung einer Lateralsecretion angesehen werden dürfen. Damit stimmt auch eine andere bemerkenswerthe Erscheinung, welches sich bei manchen Quarzlinsen wahrnehmen lässt. Es finden sich nämlich in Mitten der Quarzmassen solcher Linsen grössere oder kleinere Ausscheidungen von Kalk- oder Braunspath[1]) theils in Krystallbutzen porphyrähnlich eingesprengt, theils in Streifen eingebettet. Sie sind nicht etwa erst nachträglich auf Spalten oder Klüften des Quarzes entstanden, sondern nach der Art, in welcher sie mit dem Quarz verwachsen sind, ist anzunehmen, dass sie nahezu gleichzeitig mit letzterem gebildet wurden. Nimmt man mit Säuren solche Kalkspaththeile weg, so sieht man in dem entstandenen Hohlraum den Quarz mit vielfachen Zacken und Lamellen vorragen, so dass an den Begrenzungsflächen beide Mineralien mit einander verwachsen, gleichsam verzapft erscheinen. Auch an diesen oft sehr grosskrystallinischen Kalkspathausscheidungen bemerkt man nicht eine Spur einer erlittenen Quetschung und Zersprengung.

Derartige bald mehr linsenförmige, bald mehr streifenartige Ausscheidungen von Quarz und Kalkspath, wie sie im Grossen zwischen den Phyllitlagen eingebettet sind, wiederholen sich in bei vielen untersuchten Stücken bis ins Kleinste gehenden, mit unbewaffnetem Auge kaum unterscheidbaren Zügen, welche immer mit den Falten und Biegungen des Schiefers parallel verlaufen. Man muss wohl annehmen, dass ihre Ausbildung in krystallinischen Massen gleichzeitig mit der Verfestigung der Schiefersubstanzen des Phyllits stattfand so etwa, wie gewisse Hornsteinausscheidungen in Kalkschichten und dass die entsprechenden Faltelungen, Biegungen und Knickungen des Schiefers nicht Folgen erlittenen seit-

1) Die Analyse eines solchen Kalkspaths ergab als dessen Zusammensetzung: $CaCO_3 = 88{,}42$; $MgCO_3 = 3{,}42$; $FeCO_3 = 7{,}26$ und $MnCO_3 = 0{,}90$.

lichen Gebirgsdruckes sind, sondern mit der Ausbildung der krystallinischen Mineraltheilchen und mit ihrem Festwerden in ursächlichem Zusammenhange stehen.

Kalkstein-Ein- und Auflagerungen.

Es ist nicht zu zweifeln, dass auch die mächtigen, in dicken Bänken auftretenden Lagen körnigen Kalkes einem ähnlichen Bildungsprocess ihre Entstehung verdanken. Doch ist es nicht immer leicht, die mit diesen Phyllitschiefern vergesellschafteten krystallinischen Kalke als genetisch zu letzteren gehörige Glieder sicher zu erkennen. Oft gleichen die in diesen Gebieten den älteren Schieferschichten, nicht selten sogar ziemlich gleichförmig aufgesetzten jüngeren Triaskalke ihnen so sehr, dass eine Verwechselung um so leichter stattfinden kann, als die jüngeren Kalke hier vorherrschend hochgradig krystallinisch entwickelt sind und von glimmerartigen und phyllitähnlichen Ein- und Zwischenlagerungen begleitet werden. Dies beweisen die in verschiedenen Zeiten hergestellten geologischen Karten dieses Gebietes, bei welchen mehrfach derartige körnige Kalke bald als jüngere Triasbildungen, bald als zur Schieferbildung gehörige Einlagerungen dargestellt sind. Einem solchen Verhältnisse begegnen wir auch in der Brennergegend, wo z. B. zwischen Brennerpass und Gossensass auf der Ostseite in mehreren Steinbrüchen (auch in der Nähe des Bades) Lagen von körnigem Kalke unzweideutig dem Phyllit angehörig ausstreichen, während auf der Westseite von dem majestätischen Kalkstock des Tribulaun's am nördlichen Gehänge des Pflerschthales eine mächtige Kalkzone bis dicht an die Brennereinsattelung heranreicht, welche in der sonst vortrefflichen Karte des montanistischen Vereins gleichfalls zum älteren krystallinischen Kalk gehörig dargestellt ist, während der Kalk des Tribulauns selbst aber dem jüngeren System zugetheilt erscheint. In neueren Karten ist derselbe Kalkzug im Norden

vom Pflerschthale, den wir kurz Pflerschkalkkeil nennen wollen, als jüngere Bildung aufgefasst. Aehnlich verhält es sich mit dem Kalklager bei Mauls und im Penser Gebirge, das neulich erst durch Ad. Pichler, dann durch Teller als *Gyroporella*-haltiger Triaskalk erkannt wurde.

Solche sicher leitende Versteinerungen wie die *Gyroporellen* sind aber in vielen Kalkzügen viel zu selten, wenn sie nicht ganz fehlen, um zur Unterscheidung beider kalkiger Bildungen benützt werden zu können. Dagegen scheint ein Unterschied in der chemisch-mineralogischen Beschaffenheit zu bestehen, indem das ältere Gestein als Kalk, das jüngere — wenigstens vorherrschend — als Dolomit sich erweist. Dies gilt namentlich vom Brennergebiet. Ob dieses Verhältniss auch sonst für grössere Gebirgstheile gleich bleibt, ist noch nicht nachgewiesen. Doch möchte ich auf dieses Verhalten durch folgende Angaben aufmerksam machen und dasselbe für weitere Untersuchungen empfehlen.

Ich fand nämlich die körnigen Kalke, welche unzweideutig Einlagerungen im Phyllit angehören, zusammengesetzt

1. aus einem Steinbruch oberhalb der ersten Eisackbrücke zwischen Gossensass und Brennerbad;
2. aus einem Steinbruche zunächst an der Villa von Brennerbad;
3. aus einem Lager zwischen Gossensass und Sterzing;
4. aus den grossen Steinbrüchen von Ratschings bei Sterzing:

	1.	2.	3.	4.
Kalkcarbonat	99,628	99,540	99,526	99,350
Bittererdecarbonat	0,007	0,015	0,024	0,050
Eisen- und Mangancarbonat	0,015	Spur	Spur	0,050
Ungelöster Rückstand . . .	0,350	0,445	0,450	0,550
	100,000	100,000	100,000	100,000

Es sind dies demnach ziemlich reine Kalkgesteine.

Dagegen erwiesen sich vermuthlich der Trias angehörige Gesteine von

1. der südlichen Wand des Tribulaun's;
2. vom Stock der Weisswand SW. vom Tribulaun;
3. von den zum Obernberger-Thal abfallenden Wänden des Tribulaun's;
4. vom Schleierberg zwischen Pflersch- und Ridnauerthal;
5. von der Weissspitz zunächst südlich von Hühnerspiel bei Gossensass;

	1	2	3	4	5	6
Kalkcarbonat[1]	66,50	66,24	86,80	73,80	75,30	55,19
Bittererdecarbonat . . .	28,08	29,60	10,58	22,77	21,25	44,02
Fe- und Mn-Carbonat .	0,34	0,41	0,21	0,32	0,07	0,58
Unlöslicher Rest . . .	4,17	3,75	2,25	3,11	3,20	0,21
Summe	99,89	100,00	99,84	100,00	99,82	100,00

Zu dieser Untersuchung wurden besonders solche Gesteine verwendet, welche keine deutlichen Merkmale ihrer Zugehörigkeit zu jüngeren Ablagerungen an sich trugen (den Dolomit von Mauls ausgenommen) und auf den Schichtflächen einige glimmerähnliche Schüppchen oder einen an Phyllit erinnernden zum Theil chloritischen Ueberzug erkennen liessen. Ueber letztere Beimengungen werden noch einige Bemerkungen später beigefügt werden.

Zunächst beweisen die angegebenen Zahlen, dass mehrere der untersuchten Gesteine die Zusammensetzung normaler Dolomite besitzen, andere dagegen zu wenigstens stark dolomitischen Kalken zu rechnen sind. Nur das Gestein der Probe Nr. 15 nähert sich sehr den Phyllitkalken. In der That findet sich dieser Kalk auch an einer Stelle, wo an einer grossartigen Verwerfungsspalte die Phyllitschichten

1) Das Kalkcarbonat wurde meist indirekt bestimmt.

6—14. von 9 verschiedenen Stellen des Pflerschkalkkeils;

15. neben dem aus dem Pflersch- zum Obernberger-Thal führenden Jägersteig;

16. graue, deutlich krystallinische Gesteine von Mauls[1]) mit bestimmt erkennbaren Einschlüssen von *Gyroporellen.*

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
68,34	57,06	53,55	55,64	55,59	53,90	71,00	61,13	92,50	55,32
27,85	42,50	45,16	44,02	43,26	45,16	25,81	36,20	1,06	42 48
0,31	0,09	0,97	0,05	0,75	0,61	0,05	0,42	Spur	1,80
3,15	0,35	0,32	0,29	0,40	0,33	3,21	2,25	5,30	0,40
100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,07	100,00	98,87	100,00

in den Pflerschkalkkeil hineingeschoben erscheinen. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass das Gestein den Phyllitschichten selbst angehört. Jedenfalls empfiehlt es sich, auch in dieser Richtung die Untersuchung der verschiedenen, den centralalpinen Schieferbergen aufgesetzten oder eingefalteten kalkartigen Schichten weiter zu verfolgen, um allgemein gültige Schlüsse zu ziehen, welche jene aus dem Verhalten der Gesteine in der Brennergegend gezogenen, vorläufig nur für diesen Gebirgstheil gültigen Folgerungen entweder bestätigen oder beschränken werden.

Besondere Beachtung verdienen die mit diesen Trias-Dolomiten oder dolomitischen Kalken vergesellschafteten phyllitischen und chloritischen Einlagerungen. Sie erinnern lebhaft an die glänzenden, glimmerähnlichen oder chloritischen Ueberzüge auf den Schichtflächen vieler jüngerer

1) Originalstücke, welche ich der Güte des Herrn Prof. v. Pichler verdanke.

Ablagerungen in den Centralalpen. Ich beobachtete fast die gleichen Gebilde in den tiefsten Schichten des Ortler-Stocks am Marltpass[1]), an den Ueberzügen, mit welchen die Versteinerungen in den Werfener Schichten der grossen Plattenbrüche bei Nona in den Bergamasker Alpen[2]) überkleidet sind, auf den Gleitflächen der Kalkkeile am Gstellihorn in den Schweizer Alpen[3]), in den phyllitartigen Zwischenschichten von Andermatt, in dem sog. Casannaschiefer, ja selbst in dem Glimmerschiefer-ähnlichen Gestein des Nufener Passes mit seinen *Beleminten*-Einschlüssen. Hieher scheinen auch die Gesteine zu gehören, welche Kilian[4]) aus den Savoyer Alpen als Calcaires et Marbres phylliteux bezeichnet.

Ich verdanke der Gefälligkeit des Herrn Kilian mehrere Proben der sog. Schistes lustrés und Calcaires phylliteux aus den Savoyer Alpen. Die Schiefer sind tiefschwarzgrau, halbglimmerig- oder eigentlich fettglänzend mit einzelnen glimmerglänzenden weissen Schüppchen. In Dünnschliffen und i. p. L. zeigen dieselben Aggregetpolarisation und in der körnig schuppigen Hauptmasse kleinste undurchsichtige Stäbchen, welche wohl den Rutilnädelchen des gewöhnlichen paläolithischen Thonschiefers zu entsprechen scheinen, und daneben gleichfalls sehr zahlreiche, etwas grössere, durchsichtige Nädelchen, welche einzeln eine solche Grösse erreichen, dass man u. d. M. deutlich die bräunlichgraue Färbung, die Parallelstreifung der Säulenflächen und die Flächenzuspitzung an beiden Enden der Kryställchen erkennen kann. Diese besitzen in hohem Grade Dichromismus und gehören ohne Zweifel zum Turmalin, wie die ganz ähnlichen Nädelchen im Thonschiefer vom Brenner. Das färbende Princip rührt

1) v. Gümbel in Sitzb. d. bayer. Akad. d. Wiss. 1891. S. 100.

2) Ders., Das. 1880 S. 235.

3) Ders., Geolog. aus dem Engadin in Jahresber. d. r. Gesellsch. Graubündens XXXI S. 40.

4) In Bullet. d. l. soc. Geol. d. France; 3 Ser. 1. XIX p. 589.

von meist in Flocken gruppirten schwarzen Körnchen (nicht Schüppchen) her, welche geglüht ziemlich leicht verbrennen und mit chlorsaurem Kalium und Salpetersäure in der Wärme behandelt Chlor entwickeln und in eine gelbliche Substanz sich zersetzen. Diese kohligen Beimengungen verhalten sich demnach nicht wie Graphit, sondern wie jüngere kohlige Substanzen. Aehnlich verhält sich auch — um dies gleich hier zu bemerken — der schwärzliche Rückstand, welchen neben quarzigen Theilchen die Calcaires phylliteux nach Behandeln mit verdünnter Salzsäure zurücklassen.

Von diesen Kalken wurden zwei Proben näher untersucht. Die eine aus der Gegend von Maurin (B. Alpes) ist fein krystallinisch körnig ausgebildet, lichtgrau gefärbt und mit phyllitischen Theilchen durchwachsen; das zweite Exemplar von Bonneval in Savoyen ist dünngeschichtet, krystallinisch körnig und mit schwarzgrauem Phyllit verflasert. Beide sind körnige Kalke (nicht Dolomite) mit einem nur geringen Gehalte an Magnesium- und Eisencarbonat. Eine Analyse ergab folgende Zusammensetzung:

		I. Val la Noire Queyras	II. Bonneval.
Kohlensaure	Kalkerde	39,00	45,43
„	Bittererde	3,80	0,95
„	Eisenoxydul	1,57	3,62
„	Manganoxydul . . .	Spur	Spur
In verdünnter ClH unzersetzt . .		55,63	50,00
		100,00	100,00

In den Schites lustrés sind auch Stöcke von Serpentin eingelagert und dadurch scheint ein Uebergang in mehr chloritische Schiefer (Schistes verts) angedeutet zu werden.

Man pflegt derartige krystallinische Einlagerungen als Folge metamorphischer Umänderungen aufzufassen und dabei von dem Einfluss des Gebirgsdrucks alles Mögliche oder Unmögliche abzuleiten. Mir scheint die Annahme derartiger unerwiesener Einflüsse bei den in wenig veränderter Lagerung

auf den krystallinischen Schiefern der Centralalpen aufgesetzten Kalkschollen völlig ausgeschlossen und ich sehe darin keine anderen Erscheinungen, als solche, welche analog bei der Umbildung ursprünglich sedimentärer Niederschläge zu verfestigten Gesteinen überhaupt Platz gegriffen haben. Sie sind Folgen diagenetischer Processe und ihre Entstehung aus ursprünglich thonigem Material nicht auffallender und räthselhafter, als die pseudomorphose Umbildung von Glimmer etwa aus Granat oder Andalusit, von Chlorit aus Augit und die auch gegenwärtig noch an verschiedenen seichten Stellen der Meere gleichsam unter unseren Augen sich vollziehende Ausscheidung von Glaukonit in den Kammern der *Foraminiferen.*[1]) Was verhindert anzunehmen, dass die Bildungsprocesse, durch welche später pseudomorphisch aus Orthoklas, Granat, Andalusit u. s. w. Glimmer hervorgegangen ist, unter besonderen Umständen stellenweise auch schon bei der anfänglichen Entstehung solcher Schiefer mit krystallinischer Textur, wie solche in den Alpen in den verschiedensten Horizonten wiederkehren, wirksam waren? Es scheint dies viel besser den unserer direkten Beobachtung zugänglichen und uns bekannten Verhältnissen zu entsprechen, als eine Theorie der umbildenden Druckwirkung, die nicht erwiesen ist. In diese Reihe der Erscheinungen gehören auch gewisse andere krystallinische Mineralbildungen unserer Gegend.

Chlorit-ähnliche, deutlich krystallinisch ausgebildete, bis 5 mm dicke Lagen bedecken die Schichtflächen der tiefsten Triaskalke im inneren Pflerschthale. Diese Mineralsubstanz ist tief lauchgrün gefärbt, deutlich dichroitisch, schmilzt v. d. L. leicht zu schwarzen magnetischen Kügelchen und wird von concentrirter Salzsäure bei Kochhitze unter Hinterlassung von pulveriger Kieselsäure zersetzt. Das spezifische Gewicht

1) v. Gümbel, Ueber die Natur und Bildung des Glaukonits. In den Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. math.-phys. Classe 1886 III S. 417.

beträgt 3,008—3,01. Eine sehr dunkle Varietät (I) und eine etwas lichter gefärbte (II), letztere nach einer Analyse von A. Schwager, besteht aus:

	I.	II.
Kieselsäure	23,25	24,97
Thonerde	14,90	23,07
Eisenoxyd	9,91	—
Eisenoxydul	38,00	28,29
Manganoxydul	0,85	—
Kalkerde	Spur	0,06
Magnesia	1,70	12,91
Kali	} 0,60	0,16
Natron		0,47
Wasser	9,25	10,75
	98,45	100,68

Diese Substanzen zeichnen sich durch den hohen Gehalt an Eisenoxyden aus und schliessen sich eng an den Chlorit an. Ein Theil der Thonerde scheint in diesen beiden Proben durch Eisenoxyd, ein Theil der Magnesia durch Eisenoxydul vertreten zu sein. Sie lassen sich ihrem Zusammensetzung nach mit dem Metachlorit und Aphrosiderit vergleichen.

In ähnlicher Weise, oft mit dem grünen Mineral verwachsen, kommt auch eine Glimmer- oder Sericit-ähnliche Masse als krustenartiger Ueberzug über die Schichtfläche der Triaskalke in vielfach sich wiederholenden Lagen vor.

Die grünlich- bis gelblichweiss gefärbte Masse besitzt eine schuppigkörnige Textur, schmilzt ziemlich schwierig v. d. L. zu einem grünlichweissen, mit Kobaltnitrat sich schön blau färbenden Email, hat ein spezifisches Gewicht von 2,75—2,80 und wird von Schwefelsäure oder Salzsäure nur schwierig und theilweise zersetzt.

Die chemische Analyse hat folgende Zusammensetzung nachgewiesen:

	I.	II.
Kieselerde	44,90	42,72
Thonerde	39,61	39,00
Eisenoxyd	2,12	Spur
Manganoxydul	Spur	—
Kalkerde , ...	Spur	0,40
Magnesia	2,17	7,02
Kali	3,49	5,88
Natron	2,93	5,85
Wasser und Glühverlust .	4,25	—
	99,47	100,87

Mehr vereinzelte Blättchen eines weissen, Glimmer-artigen Minerals, dessen Zusammensetzung die Analyse II anzeigt, kommen theils auf den Schichtflächen der höheren Kalkbänke, theils mitten im Kalk, beziehungsweise Dolomit, eingeschlossen vor. Es scheint dieses Auftreten anzudeuten, dass die krystallinische Ausbildung des Kalks und Dolomits gleichzeitig mit der Entstehung der Glimmerartigen Mineralien und zwar gleich anfänglich, nicht erst durch eine nachträgliche Umbildung in Folge von Gebirgsdruck sich vollzogen hat. Beide Mineralien schliessen sich ihrer Zusammensetzung nach an die Glimmergruppe an, ohne aber mit irgend einer Abänderung derselben völlig übereinzustimmen. Es möchte dies auf eine theilweise erlittene Zersetzung zurückzuführen sein.

Der Kalkkeil am Pflerschthal.

Das Mittel, welches die Zusammensetzung der äusserlich sehr ähnlichen kalkigen Gesteine zu ihrer Unterscheidung in Aussicht stellt, wäre um so erwünschter, je verwickelter die Lagerungsverhältnisse sind, unter welchen die Kalke sich am Aufbau des Gebirgs betheiligen. Ein Beispiel hiervon liefert der Kalkkeil[1]) am Nordrande des Pflerschthales, dessen

1) Die Bezeichnung ist zwar nicht ganz richtig, weil dolomitisches Gestein vorherrscht, aber doch leichter verständlich als Dolomitkeil, was auch nicht ganz zutreffend wäre.

vom Tribulaun-Stock auslaufende, in SO.-Richtung sich allmälich verschmälernde Zunge an dem älteren Schiefergebirge wie bloss angeklebt erscheint, in der That aber zwischen dasselbe eingeschoben sich erweist.[1])



Der Kalkkeil des Pflerschthales.

Die, wie wir gesehen haben, vorwaltend dolomitischen Schichten dieses Keils liegen auf der Nordseite des Pflerschthales sanft nach NO. geneigt auf fast in gleicher Richtung, aber steiler einfallenden krystallinischen Schiefern. Die unmittelbare Auflagerungsfläche ist zwar meist durch Gehängeschutt überrollt und verdeckt. Doch lässt sich an dem Jägersteig vom Pflerschthal zum Obernberger See in der Grenzregion beobachten, dass der quarzitische Glimmerschiefer in St. 12 mit 15° nach N. einschiesst. In einem Steinbruche

1) Vergl. Diener, Der Gebirgsbau der Westalpen 1891, insbesondere S. 11 und 196.

unterhalb dieser Stelle wurde die gleiche Lagerung angetroffen, welche als die durchschnittlich in dem Schiefer unterhalb des Kalkkeils herrschende anzunehmen sein dürfte. Die Grenzfläche der Schieferbasis gegen die kalkigen Schichten senkt sich von dem Westfuss des Tribulaun bei dem Pflerscher Tinkel und Goldkappel gegen Schellenberg oberhalb Gossensass allmälig um etwa 1000 m und schneidet die Schichtenköpfe der krystallinischen Schiefer quer ab. Diese bestehen vorherrschend aus quarzigem Glimmerschiefer, welcher bei Stein Uebergänge in Gneiss zeigt und von Hornblende-führenden Zwischenschichten begleitet wird. Gegen Gossensass hin tritt an die Stelle des Glimmerschiefers Phyllit, der abwärts gegen Sterzing und aufwärts gegen den Brennersattel anhält. Da wo der Steig von Bühel im Pflerschthal über das steile Gehänge zum Obernberger-Thal hinüberführt, dringt der krystallinische Schiefer tief in den Kalkkeil ein und verbindet sich wahrscheinlich mit dem Schiefer des Grubjochs. Es schneidet hier deutlich eine von NO. nach SW. verlaufende grosse Verwerfung durch. Ueber dem in SO.-Richtung rasch an Mächtigkeit abnehmenden Kalkkeil breitet sich auf der ganzen Längenerstreckung von der Nähe der Wildgruben-Alp an bis gegen die Brennerstrasse hin wieder krystallinischer Schiefer aus, so dass die jüngeren Kalkschichten zwischen dem liegenden krystallinischen Schiefer des Pflerschthales und dem hangenden des Höhenzugs (Rothspitz, Geierkragen, hoher Lorenzenberg u. s. w.), welcher nordwärts zum Obernberger Thal abfällt, eingeschlossen sind. Die Schichten des Kalkkeils werden demnach oben von überschobenem krystallinischem Schiefer überdeckt und nach O. zu endlich ganz abgeschnitten. Der starke Contrast zwischen der weissen Farbe des Kalks und Dolomits und der dunklen der Schiefer gestattet leicht, diese Auflagerung schon aus der Ferne mit den Augen zu verfolgen, schwierig dagegen ist es, theils wegen der Steilheit der Felswände, theils wegen Ueberdeckung mit

Gesteinsschutt, an solche Stellen zu gelangen, an welchen man die Contaktverhältnisse unmittelbar beobachten kann. Einen solchen leicht zugänglichen Punkt fand ich an dem von Giggelberg zum Sandjöchel hinaufführenden Alpweg, wo dieser aus dem Walde kommend die Weidfläche berührt und die hier entspringende Quelle zu einer Brunnenleitung gefasst ist. Auf eine Entfernung von wenigen Metern steht gegen unten der stark zerklüftete nahezu horizontal gelagerte Dolomit an, während nach der Höhe zu chloritischer Quarzitschiefer und Phyllit mit schwach nach NO. gerichteter Neigung ausstreicht. Dieses Verhältniss lässt sich nicht anders auffassen, als dass der Dolomit hier von dem überschobenen Schiefer schief abgeschnitten und überlagert wird, ähnlich wie ich dies auch an den Kalkkeilen in der Nähe der Angstalpe unter dem Gstellihorn gesehen habe. Es darf daher mit Recht diese Abzweigung vom Tribulaunstock gegen den Brenner hin als ein Kalk- und Dolomit-Keil zwischen krystallinischen Schieferschichten bezeichnet werden.

Die Schichten dieses Keils bestehen einförmig, wie früher nachgewiesen ist, vorherrschend aus Dolomiten und dolomitischen Kalken ohne erkennbare organische Einschlüsse, soweit wenigstens meine Beobachtungen reichen. Schichten, welche ganz unzweideutig als zu der Werfener Triasstufe oder zum Perm gehörig zu erkennen wären, lassen sich hier nicht wahrnehmen. Doch ist es mehr als wahrscheinlich, dass die unmittelbar dem krystallinischen Schiefer aufgelagerten, zwischen diesem und den mächtigen Kalkstöcken ausgebreiteten, allerdings nur wenig mächtigen Zwischenschichten, welche schon anfänglich in ihrer jetzigen Beschaffenheit auf den die Unterlage bildenden krystallinischen Schiefern abgesetzt und nicht erst in Folge von Dislokationen sekundär in ihre jetzige Stellung gebracht worden sind, die der Ablagerung der Kalk- (Dolomit-) Bildungen zunächst vorausgehenden älteren Perm- und Triasschichten darstellen.

An dem gewaltigen Kalkstock des Tribulaun's sind es die schon früher erwähnten knolligen, Chlorit- und Glimmer-führenden dünn- und uneben geschichteten Lagen, welche die Basis der hohen Sel-Wände und am Goldkappel-Sattel die tiefste Region der jüngeren Triasbildung ausmachen. Aehnlich dürfte es sich an der prachtvollen Felsenpyramide der Weisswandspitz verhalten, welche gleichsam als eine südliche Fortsetzung der Tribulaungruppe mit ihrem schöngeformten, weissen Kalkkegel deutlich auf dem dunkelfarbigen Schiefergestein über einem selbst aus der Ferne leicht kenntlichen terrassenförmigen Absatz aufgesetzt ist. Die gleichen Gesteine bringen auch die Gewässer des Keggrabens und Steinbachs bei Inner-Pflersch und bei Stein von der Höhe herab. Neben den weit vorherrschenden weissen Dolomitstücken finden sich hier auch häufig jene flasrig-knolligen, gelbverwitterten, kalkigen und dolomitischen Gesteine, welche, innig mit sericitischen Flasern verwachsen, unzweideutig an die tiefsten, den krystallinischen Schiefern direkt aufgelagerten Schichten am Marltpass, des Ortlerstocks, der Kalkberge im Unterengadin und am Fusse der Radstädter Tauern, überhaupt an gewisse Casannaschiefer erinnern. Dazu kommen intensiv schwarze schiefrige Kalkplatten mit glimmerähnlich glänzenden Schichtflächen, schwarze weisspunktirte Kalke und streifig gebänderte Kalke ähnlich, wie sich solche auch in den tiefsten Lagen am Ortler und in den diesem benachbarten Kalkbergen vorfinden. Diese Uebereinstimmung in der Gesteinsbeschaffenheit ist eine überraschende und deutet auf eine analoge Ausbildung aller der in dem mittleren Gebiete der Alpen entwickelten Triasschichten, welche man wohl als eine zusammengehörige innere Kalkzone der Alpen zusammenfassen darf.

Ueber die Aufeinanderfolge dieser verschiedenen Gesteine fand ich weiteren Aufschluss im hintersten Theil des Obernberger Thals, da wo dasselbe bei dem Waldbauer in zwei

Seitenthäler sich gabelt, und die Kalkschichten[1]) bis in die Thalsohle herabreichen. Am nördlichen Rand des nach W. abzweigenden Thalastes ganz in der Nähe der Waldbauer-Häuser sind an einem gegen die Wildgrube emporziehenden Alpsteige die auf dem krystallinischen Schiefer gelagerten kalkigen Schichten aufgeschlossen. Sie bestehen aus gelblich weissen mit Hornstein und sericitischen Substanzen durchwachsenen Kalken, ähnlich den erwähnten Gesteinsstücken von Inner-Pflersch und den von Kilian[2]) erwähnten Gesteinsbildungen in den Savoyer Alpen. Grüne Anflüge von Malachit, welche leicht in die Augen fallen, verrathen hier das Vorkommen von Kupfererzen. Als permische Schichten sicher erkennbare Gesteine werden auch hier vermisst; aber das Vorkommen von Kupfererzen erinnert doch sehr an den in seiner geologischen Stellung problematischen Schwazer Kalk des Innthales. Der Steig führt dann höher ganz in das Gebiet der krystallinischen Schiefer, während thalaufwärts von dem steilen Gehänge herabgebrochene graue, schwarze und gebänderte Kalke oder Dolomite das Anstehen der zunächst höher folgenden Schichten wie im inneren Pflerschthale verrathen, bis im innersten Thalkessel fast nur mehr weisse dolomitische Kalke oder Dolomite zu finden sind. In dem nach S. ziehenden Thalzweig gegen den hinteren See ist die hier durchstreichende Grenze zwischen Schiefer und Kalk durch Gehängeschutt überrollt.

Die Bleibergwerke im Pflerschthale.

Als eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit der Glimmerschiefer-artigen Gesteine an der Basis des Kalkkeils im

---

1) Es sei nochmals daran erinnert, dass hier unter Kalkschichten immer die zusammengehörigen Complexe von Kalk und Dolomit zu verstehen sind.

2) Bull. d. s. soc. d. France 3. Ser. t. XIX p. 589.

Pflerschthal verdient das Vorkommen von **Bleierzen** erwähnt zu werden.

Gossensass war in alter Zeit der Hauptsitz eines lebhaften Bergbaubetriebs.[1]) Noch jetzt bezeichnet ein buntgemaltes Bergmannswappen mit zwei Bergknappen und einem zwischen ihnen angebrachten grossen Bleiglanzblock über dem Eingang in das alte Berggerichtsgebäude (dem Gröbner'schen Gasthaus gegenüber) die Bedeutung, welche der Ort vormals in Bezug auf den Tiroler Bergbau[2]) besass. Zahlreiche Berghalden, verbrochene Stollen und Schächte auf beiden Seiten des Pflerschthales nächst Gossensass sind die Ueberreste eines unzweifelhaft grossen Betriebs, welcher als der älteste in Tirol bezeichnet wird. Es sollen einst 300 Bergknappen, die Schuhe mit silbernen Nägeln beschlagen, einen Aufzug im Dorf gehalten haben. In der That steht neben der Hauptkirche ein von den Bergleuten erbautes, der St. Barbara und dem St. Anton geweihtes Knappenkirchlein, dessen Altäre mit Schlägeln und Eisen sowie mit Erzstufen verziert sind. Ueber die näheren Verhältnisse dieses Bergbaues ist sehr wenig bekannt.

Nach einer Beschreibung von P. R. in v. Moll's Jahrbücher der Berg- und Hüttenkunde (Bd. II S. 140) waren um 1798 noch auf beiden Seiten des Pflerschthales zwar nicht mehr betriebene, aber doch noch fahrbare Berggebäude vorhanden. Dieselbe bezeichnet das Erzvorkommen auf der nördlichen Thalseite zunächst Gossensass im Thonschiefer als ein Lager, welches unter dem Namen Hauptgang bekannt sei, in St. 8—9 streichend unter 10° nach NO. einfalle. Der einbrechende Bleiglanz sei grob- und kleinblätterig, von geringem Silbergehalte, zuweilen mit Schwefelkies-Spuren

1) Urkundlich wurde 1479 der Bergbau auf dem Schneeberg dem Berggericht zu Gossensass untergeordnet.

2) Jos. v. Sperges, Tyrolische Bergwerksgeschichte, Wien 1765 S. 60.

verwachsen, von geringer Mächtigkeit, in einem Lager von Thon eingebettet und darin oft nur in Mugeln und Nieren enthalten. Das Erzlager wurde noch bis 50 Klafter unter der Erbstollensohle verfolgt und das Wasser aus dieser Tiefe durch ein Kreuzgestänge gehoben. Die Erze gelangten zur Verhüttung nach Brixlegg im Innthale. Auf der südlichen Seite des Thales war am Breitenberg unter der Schleyerwand das beträchtlich grössere Bergwerk Reifenstuhl angelegt. Die Gebirgsart, in welcher dieselben Erze aufsetzen, ist gleichfalls Thonschiefer mit ziemlich häufigen Lettenklüften. Im Uebrigen verhält sich das sehr unregelmässige Erzlager, welches nicht tief in das Gebirge fortsetzen, sondern meistens nur nach dem Taggehänge sich ausgedehnt haben soll, wie das der nördlichen Thalseite.

Nach einer anderen Nachricht wurden 1691 die Erze aus dem Pflerschthale zur Schmelzhütte Gressstein bei Sterzing geliefert.

Dieser Bergbau war bereits gegen Ende des 18. Jahrhunderts in Verfall gerathen und wurde 1818 ganz auflässig. In neuester Zeit galt ein nur schwacher Versuch der Wiedererhebung dieser alten Berggebäude, wurde aber nach kurzem Bestande wieder aufgegeben. Nach den jetzt noch auf den verschiedenen Halden aufgefundenen Gesteinen und Erzresten ist das Vorkommen im Pflerschthal jenem vom benachbarten Schneeberg gleichzustellen. Das Haupterz war zweifelsohne Bleiglanz, obwohl auf den alten Halden nur spärliche Spuren dieses Minerals anzutreffen sind. Doch dürfte der in dem erwähnten Bergmannswappen eingemauerte, 0,15 m hohe und 0,20 m breite Bleiglanzblock aus den alten Pflerschgruben stammen. Ein davon abgeschlagenes Stück besteht aus grossblättrigem Bleiglanz, begleitet von kleinen Eisenkies- und Zinkblendetheilen und verwachsen mit Granatführenden Glimmerschuppen. Eine von Ass. Ad. Schwager vorgenommene Analyse ergab als seine Zusammensetzung:

Blei	62.78
Eisen	6,46
Zink	5,29
Kupfer	0,84
Mangan	0,39
Silber	0,05
Antimon	0,04
Schwefel	16,66
Kalkerde	0,35
Bittererde	0,86
SiO_2 und A_2O_3	4,60
Kali	0,12
Natron	0,11
Unzersetzter Rest	1,41
	99,96

Es entspricht dies einem Gehalt von 72,5% Bleiglanz. Auffallend gering ist der Silbergehalt, während der Bleiglanz vom benachbarten Schneeberg 60% Blei und nahezu 0,07% Silber enthalten soll. Das Zink stammt aus der Beimengung von Zinkblende, Eisen theils von Schwefelkies, theils von einem Eisencarbonat (Ankerit); Kupfer und Antimon deuten auf eine feine Einsprengung von Kupferkies oder Fahlerz. Im Allgemeinen ist die Mineralvergesellschaftung unverkennbar jener der Schneeberglagerstätte ähnlich oder gleich. Dies wird auch durch die Beschaffenheit der auf den alten Berghalden vorfindlichen Gesteine bestätigt. Es fehlen hier alle Mineralien, welche sonst auf Mineralgängen als miteinbrechende Gangarten vorzukommen pflegen, wie Gangquarz, Kalkspath, Flussspath, Schwerspath u. s. w. Dagegen sind eisenreiche Spathe — Ankerit in Uebergängen zu Spatheisenstein —, welche meist, wenigsters äusserlich in Brauneisenerz umgewandelt sich zeigen, innigst verwachsen mit Titaneisen, Magneteisen und einer Graphit-ähnlichen Substanz, sehr häufig und zwar nicht in Form von Adern oder

Schnürchen ausgeschieden, sondern mit den Gemengtheilen des Granat-reichen Glimmerschiefers innigst verflasert oder linsenförmig eingelagert. Dieses Verhalten weist unzweideutig auf ein Vorkommen der gesammten Erzbildung in Form einer Fahlband-artigen Einlagerung im Glimmerschiefer.

Da die Alten bei dem Betrieb der Bergwerke im Pflerschthale zweifelsohne nur den Bleiglanz behufs der Darstellung von Silber gewonnen haben, die miteinbrechende Zinkblende dagegen zurückgelassen haben, so ist zu vermuthen, dass in den Altungen dieser jetzt verfallenen Bergwerke noch grössere Mengen von Zinkerzen sich vorfinden. Auch die zahlreichen Sensen- und Waffenschmieden, welche jetzt noch in Gossensass selbst und unterhalb gegen Sterzing zu betrieben werden, und wahrscheinlich aus früheren Aufbereitungswerken hervorgegangen sind, deuten auf einen lebhaften Bergwerks- und Hüttenbetrieb, der seit uralter Zeit[1]) in diesem Thale sich angesiedelt hatte.

Die muthmaassliche Aehnlichkeit der Erzformation vom Pflerschthal mit jener vom Schneeberg gab Veranlassung, auch dieser berühmten Lagerstätte einen Besuch abzustatten, weil hier durch den jetzt noch fortdauernden Bergbaubetrieb nähere Aufschlüsse über die Natur der Lagerstätte zu erwarten waren.

Der Erzbergbau auf dem Schneeberg.

Der Bergbau auf dem Schneeberg im Hintergrunde des Ridnauer Thals auf den schneeigen Höhen von über 2200 m zwischen diesem und dem Passeier Thal auf der Abdachung zu letzterem gelegen, zählt gleichfalls zu den ältesten des Landes. Derselbe soll in der Mitte des 15. Jahrhunderts zur Zeit seiner grössten Blüthe 1000 Bergknappen beschäftigt

1) Die Sage leitet die Gründung von Gossensass von einer Colonie Wolf Dietrichs ab.

haben, nahm aber mit dem Vordringen in grössere Tiefe allmälig der Art ab, dass 1792 nur mehr 106 Knappen in Arbeit standen, die sich seit 1771 selbst ausschliesslich mit Auskutten der alten Halden beschäftigten. Bis dahin war nur der silberhaltige Bleiglanz Gegenstand der Gewinnung; die Zinkblende blieb in der Grube oder wurde über die Halde gestürzt. Erst 1871 nahm das k. k. Aerar den Bau energisch wieder auf und hat denselben bis jetzt mit Erfolg fortgeführt, wobei hauptsächlich die Zinkblende den Gegenstand der Gewinnung ausmacht.

Ueber die Natur der Schneeberger Lagerstätte besitzen wir aus neuerer Zeit mehrere Mittheilungen von bergmännischen Autoritäten. Oberberghauptmann C. v. Beust[1]) beschreibt dieselbe zuerst als eine ausgesprochen lagerförmige, weil sie sich conform mit dem Schiefergestein, dem Glimmerschiefer, erstreckt, nennt jedoch gegen Schluss seiner Schilderung dieselbe „einen Lagergang oder deutlicher ausgedrückt ein Pseudolager, dessen Ausfüllung das Resultat eines späteren Eindringens der dasselbe constituirenden Erzmassen sei". Das heisst doch wohl: die Erze kommen zwar thatsächlich auf einem Lagerzug vor, aber theoretisch sind sie wie auf Gängen entstanden. Für diese Annahme werden aber weiter keine Beweise beigebracht, als die Analogie mit anderen sog. Lagergängen. Balling[2]) wiederholt diese Ansicht, indem er anführt, dass die Erze parallel den Schichten des Glimmerschiefers eingelagert auf einem Lagergang — Pseudolager — vorkommen. Posepny[3]) zieht gleichfalls das lagerförmige Vorkommen nicht in Zweifel, glaubt aber dasselbe dadurch erklären zu können, dass er die Bildung der geschwefelten Erze von einer Art Pseudomorphosen-Process ableitet, bei welchem an die Stelle der anfänglich vorhandenen

1) Oesterreich. Zeitschrift f. Berg- u. Hüttenw. 1871. 201.
2) Daselbst Jahrg. 1872. S. 110.
3) Daselbst Jahrg. 1879. S. 106.

Gyps- und Anhydritbeimengungen die Schwefelmetalle getreten seien. Schmidt[1]) endlich spricht sich nicht näher über die Natur der Lagerstätte aus, bezeichnet sie jedoch als Gang. Da die Erze innigst verwachsen mit den Gemengtheilen des Granat-reichen Glimmerschiefers in linsenförmigen Zügen, Streifen und Flasern vorkommen, welche auf eine Länge von nahezu 2000 m und flache Tiefe von über 250 m unter gleichem Steigen und Fallen (mit 40° nach NW.) mit den Schieferschichten fortziehen, dabei weder eine Absonderung der Lagerstätte vom Nebengestein durch ein Salband oder Besteg wahrzunehmen ist, noch Gangarten in Begleitung der Erze auftreten, so kann ich nach meinen Beobachtungen und Auffassungen das Erzvorkommen am Schneeberg nur für ein Fahlband-artiges ursprüngliches Lager halten, dessen Entstehung mit der des dasselbe umschliessenden Glimmerschiefers nahe zusammenfällt.

Die Erze sind ähnlich wie im Pflerschthale vorherrschend Zinkblende und silberhaltiger Bleiglanz, der letztere mehr untergeordnet, auf die Ränder der Erzzüge, namentlich auf die hangenderen Lagerverzweigungen beschränkt und gegen die Tiefe zu sich verringernd. Als seltenere Begleitmineralien finden sich Schwefel-, Arsen- und Kupferkies, dann Magneteisen, Ankerit, Spatheisenstein, Gyps, Anhydrit und der sehr seltene Schneebergit (Antimon-Kalkmineral) u. A. Bemerkenswerth ist, dass das 4—5 m mächtige Haupterzlager zuweilen auf 3—5 Streifen oder Aeste[3]) sich verzweigt, welche durch erzleere Gesteinszwischenschichten geschieden sind, streckenweise sich vereinigen und streckenweise sich wieder vergabeln. Zuweilen sind die Erzmittel auch linsenförmig ausgebildet. Mehrere quer streichende Klüfte

---

1) Oesterreich. Zeitschrift f. Berg- u. Hüttenw. 1883. 94.

2) In rohem Hauwerk durchschnittlich 28 1/2 % Zinkblende und 1 1/2 % Bleiglanz.

3) Oesterreich. Zeitschrift f. Berg- u. Hüttenw. 1879. 100.

oft mit Lettenausfüllung, auf welchen die meisten der überaus zahlreichen Stollen querschlägig auf die Lagerstätte getrieben waren, verwerfen das Lager treppenförmig in NO.-Richtung, wodurch nach Posepny[1]) eine Art Adelvorschub nach W. sich ergiebt. Bis Ende des 18. Jahrhunderts blieb das Vorkommen von Zinkblende unbeachtet. In dem älteren Bericht aus dem Jahre 1798[2]) wird dieses weitaus vorherrschende Erz nicht einmal dem Namen nach erwähnt und erst 1799 führt Senger[3]) an, dass man auch die Zinkblende zu benützen angefangen habe. Alle diese Verhältnisse, welche an der Schneeberger Erzlagerstätte zu beobachten sind, bestätigen die Analogie dieses Erzvorkommens mit dem im Pflerschthal bei Gossensass.[4])

Entstehung der Brennerbad-Quelle.

In welcher Beziehung stehen nun diese geologischen Verhältnisse, welche wir in der Umgegend des Brenners kennen gelernt haben, mit der Therme des Brennerbades?

Man wird ohne nähere Prüfung der Gebirgsverhältnisse wohl geneigt sein, dieses Auftreten mit der Entstehung des Brennerpasses selbst in unmittelbare Beziehung zu bringen. Bestärkt wird man in dieser Annahme, wenn wir den Blick auf eine geologische Uebersichtskarte, wie z. B. auf die vorzügliche geologische Karte v. Hauer's werfen und wahr-

1) Die Bezeichnung „Trümmer" scheint mir für derartige Abzweigungen nicht geeignet.

2) v. Moll's Jahrbücher d. Berg- u. Hüttenkunde 1798. II. S. 117.

3) Beschreibung einer Wanderung nach dem Schneeberg. Daselbst. IV. S. 156.

4) Ob der in der Nähe des Schneebergs an der sog. Seespitz dem Glimmerschiefer aufgelagerte, weisse Kalk analog jenem am Tribulaun und im Pflerschkeil den Triasbildungen zuzurechnen sei, wie es wahrscheinlich ist, muss ich unentschieden lassen, da es mir nicht geglückt ist, Gesteine dieses Vorkommens zu sammeln und zu untersuchen.

nehmen, dass eine der merkwürdigsten und durch die Begrenzung verschiedenen Gesteinsbildungen auf leicht kenntliche Weise bezeichnete Dislokationslinie, die sog. Judicarienspalte, in ihrer Verlängerung nach NO.-Richtung hin ungefähr mit der Einsattelung des Brenners zusammentrifft. Es hat auch bereits Prof. Penck, dem wir eine eingehende Schilderung[1]) der merkwürdigen, tiefsten Quereinbuchtung durch die Centralalpen am Brenner verdanken, darauf hingewiesen. Es wird hier die Entstehung der Brennereinsattelung auf eine grossartige Einsenkung der Gebirgstheile westlich vom Pass in der Richtung des Judicarien-Bruchs zurückgeführt, wobei allerdings noch weiter angenommen wird, dass die ursprünglichen Abbruchsränder durch nachträgliche Wirkungen namentlich von Flüssen und Gletschern sehr vielfach und bedeutend verändert worden sind. Penck beruft sich zur Begründung dieser Annahme unter Anderem auf die ungleiche Meereshöhe, in welcher die jüngeren Kalkschichten dieser Gegend auf dem älteren Schiefergebirge aufgesetzt sind, auf das Fehlen von Strandconglomeraten oder sandigen Schichten an der Basis dieser Kalke, welche nach seiner Ansicht doch vorhanden sein müssten, wenn die Kalke südlich von Innsbruck schon während der Triasperiode in einem schmalen, die Centralalpen kreuzenden Meeresarm abgelagert worden wären. Auch die Verschiedenheit in der Beschaffenheit der die Triasschichten unterlagernden Schieferbildungen zur rechten und linken Seite des Sillthales soll in gleichem Sinn zu deuten sein.

Ist die Annahme eines ursächlichen Zusammenhangs der Brennerpassbildung und des Judicarienbruchs richtig, so müssen sich Spuren der Fortsetzung des letzteren nicht bloss am Brenner selbst, sondern auch in dem Gebirgstheile zwischen diesem und dem Punkte, an welchem die Judicarienspalte in

1) Zeitschrift des Deutsch. u. Oesterr. Alpenvereins Jahrg. 1887 Bd. XVIII S. 7.

ihrem Verlauf nach NO. noch unzweideutig sich bemerkbar macht, nämlich in der Gegend von Meran, erkennen lassen. Doch schon in diesem südlichen Gebiete beginnt vom Ultenthal bei St. Pangraz an in Folge des Hertretens der Granitmassive vom Bannwald und Aichberg eine gewisse Unsicherheit bezüglich der NO.-Fortsetzung des Judicarienbruchs und bei Meran selbst wird derselbe vollends von der hier quer ziehenden grossen Etschthalspalte durchkreuzt. Zwar könnte man die tiefe Neifschlucht im Norden des Etschthales als eine solche Fortsetzung ansehen. In diesem Falle wäre aber die Richtung bereits bedeutend östlich abgelenkt. E. Suess in seinem klassischen Werke „Das Antlitz der Erde"[1]) nimmt dies an und führt unter Bezug auf die Forschungen von Fuchs und Teller wörtlich aus: „Der Judicarienbruch lässt sich durch die Neifschlucht bis Weissenbach im Penserthal verfolgen; hier wendet sich seine Richtung aus NO. mehr und mehr nach O. u. s. w. Das merkwürdigste Ergebniss aus Teller's Untersuchungen ist jedoch der Nachweis der Fortsetzung des Granitstocks bis weit gegen O. hin" u. s. w. Nach dieser Ansicht wäre die Bruchlinie zunächst N. von Meran bereits so weit östlich abgelenkt, dass sie mit dem Brennerpass nicht mehr in Beziehung gebracht werden könnte.

Nimmt man aber an, dass die durch die Neifschlucht zum Penserthal streichende Richtungslinie vielleicht nur einem sich abzweigenden Seitenbruch entspräche und dass das von Meran bis St. Leonhard auffallend gradlinig verlaufende Passeier Thal die wahre Fortsetzung des Hauptbruchs darstellt, so müssten sich in letzterem entsprechende Anzeichen von Gebirgsverschiebungen auffinden lassen. Wir bemerken aber, dass auf dieser Thalstrecke die Schichtenzüge verschiedener Schieferbildungen ohne irgend eine Aenderung ihrer Streichrichtung von einer Thalseite zur andern hinübersetzen.

---

1) Bd. I. S. 321 u. 322.

Ausserdem ist die Richtung dieser Strecke des Passeier Thales so viel weiter gegen NW. gewendet, dass eine Verlängerung derselben weit ab von der Einsattelung des Brenners treffen würde. Lassen sich in diesen südlichen Gebirgstheilen demnach keine deutlichen Spuren des nach dem Brenner fortsetzenden Judicarienbruchs erkennen, so könnten diese hier wohl verwischt sein, aber nordwärts in der Brennergegend wieder zum Vorschein kommen. Meine in dieser Richtung unternommenen Nachforschungen in der Nähe des Brennerpasses waren aber erfolglos.

Zwischen Sterzing und Gossensass setzen die phyllitischen und quarzitischen Schiefer, nur durch die Thalfurche und jüngeren Anschwemmungsablagerungen unterbrochen, beiderseitig gleichmässig fort. An mehreren Stellen ist deutlich zu erkennen, dass festere Gesteinslagen Querriegel von einer Thalseite zur andern bilden, welche, jetzt von einer engen Flussrinne durchnagt, früher eine stufenartige Aufstauung der Gewässer bewirkt haben. An einer Stelle bei Ried liegen hinter einem solchen Felsendamm mächtige zu Nagelflühartigen wohlgeschichteten Conglomeratbänken verfestigte Geröllmassen.

Auch zunächst unterhalb Gossensass streicht ein Felsrücken von quarzreichem Phyllit von Platz gegen Steckholz. Die Eisenbahn musste hier, um sich einen geeigneten Durchzug zu verschaffen, die tiefe Schlucht des Eisackbetts selbst benützen und dieses durch einen in Fels gegrabenen Tunnel seitlich ableiten. Von dieser Felsbarre, nicht von einer Moräne rührt die Wasseranstauung her, welcher das schöne verebnete Becken von Gossensass seine Entstehung verdankt. Der Schutt, mit welchem diese Thalebene ausgefüllt wurde, ist kein glacialer. Ich fand in diesem Geröll der ersten Terrasse über der jetzigen Thalfläche, auf welcher grossentheils das Dorf Gossensass steht, in einer Schottergrube bei dem Brauhaus keine gekritzten oder wirr gelagerten Geschiebe.

Während das Hauptthal dem Pflerschbach folgt, durchbricht der Eisack in einer felsigen Schlucht einen zweiten oberen Felsriegel, auf dem die Kirche des Dorfes steht und durch den die Strasse nach dem Brennerpass neben der Eisack und einer hohen Felswand geführt ist. Auch hier habe ich keinen Moränenwall gesehen. Ueberall streichen die Phyllitschichten gleichartig quer durch die Thalvertiefung hindurch. Gleich oberhalb legt sich ein Kalklager im Phyllit an, in dem ein Steinbruch angesetzt ist. Dann folgen in dem Eisackthal bis zum Brennerbad, in zahlreichen natürlichen und durch den Eisenbahnbau geschaffenen Entblössungen sichtbar, Phyllitschichten mit Kalksteineinlagerungen, welche, abgesehen von örtlichen Biegungen, so ziemlich quer über das Theil streichen. Ein Schichtenbruch oder -Verrückung in dieser Thalrichtung hat sich nicht nachweisen lassen.

Erst am Brennerbad selbst bemerkt man eine längsstreichende Schichtenknickung, die einerseits mit der oberen Abbruchsfläche des Pflerscher Kalkkeil in Beziehung tritt, andrerseits in der Nähe des Wolfendornbergs fortzieht. Diese Bruchlinie in Verbindung mit der weichen Beschaffenheit und leichten Zerstörbarkeit der Phyllitgesteine scheint zusammen bewirkt zu haben, dass die obersten Thalenden der Eisack und der Sill zusammenschneidend zu einer gleichsam gemeinsamen Thal-artigen Vertiefung sich verbunden haben, auf der erst später die beiden Wassergebiete sich abgegrenzt haben. Daraus erklärt sich der so auffallend Thal-ähnliche Charakter der breiten Brennerpass-Einsattelung.

Damit steht nun auch das Auftreten der Therme des Brennerbades nach zwei Richtungen hin im Zusammenhang. Einmal entspringt die Quelle auf dem Sattel in einem tiefen, ein Thal vertretenden Passeinschnitt, wie sonst die Mineralquellen in Thälern zu Tag zu treten pflegen. Der Brennerpass hat in Bezug auf die Therme die Bedeutung

eines breiten und tiefen Thales. Dann aber wird der Austrittspunkt der Quelle in zweiter Linie durch den erwähnten Schichtenbruch bedingt, welcher hier durch diese Vertiefung verläuft und dem Quellwasser den Weg anweist.

Ob das Hervorbrechen der in allen Beziehungen der Brennerbadquelle sehr ähnlichen oder gleichen Kaiserbrunnquelle im hintersten Tuxerthal bei einer Entfernung von nur 20 km durch die Fortsetzung derselben Schichtenknickung bedingt wird, wie wahrscheinlich ist, muss näheren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Was nun schliesslich die Temperatur der Brennertherme anbelangt, welche an sich keine hochgradige ist und wahrscheinlich durch Vermischung mit gewöhnlichem Quellwasser in Folge ungenügender Fassung noch herabgedrückt wird, so führt uns die Thatsache, dass das Wasser nicht mit grösserem Druck aus der Tiefe empordringt, sondern augenscheinlich von oben her sich beizieht, zu der Annahme, dass die Quelle ihre Wärme von den benachbarten höheren Bergen empfängt, in welchen Regen- oder Schmelzwasser auf Klüften und Spalten in das Innere des mächtigen Gebirgsstocks eindringt, daselbst von der dort herrschenden Erdwärme die erhöhte Temperatur empfängt und dann auf der erwähnten Spalte der tiefsten Stelle zufliesst, wo diese von der Erdoberfläche angeschnitten wird. Diese Stelle ist aber am Schnittpunkt der Schichtenbruchlinie mit der Brennereinsattelung, nämlich da, wo die Brennerbadquelle wirklich zum Vorschein kommt.

Auf diese geologischen Momente lässt sich nach meiner Auffassung Ursprungsort und Beschaffenheit der Therme des Brennerbades zurückführen.

Berichtigung.

Seite 91 Zeile 6 v. u.

statt $\left[[A\,B]\,[C\,D]\,E\right]$, $\left[[A\,B]\,[C\,D]\,[E\,F]\right]$ etc.

lies $\left[\left[[A\,B]\,[C\,D]\right]E\right]$, $\left[\left[[A\,B]\,[C\,D]\right][E\,F]\right]$ etc.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 133. Stiftungstages

am 28. Mai 1892.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, leitet die Sitzung mit folgenden Worten ein:

Die kgl. Akademie der Wissenschaften feiert heute ihren 133. Stiftungstag. Am 28. März 1759 erliess der Wittelsbacher Max Josef, Churfürst von Bayern, einen offenen Brief, in welchem er die Gründung der churbayerischen Akademie der Wissenschaften beurkundete. Vorher bestand nur eine schon von seinem Vater Kaiser Karl VII. unterstützte gelehrte Privatgesellschaft unter dem Namen Parnassus boicus. Max Josef wollte der Wissenschaft freie Bahn zu ihrer Fortentwicklung schaffen. In der Urkunde sagt er: „Weil wir überdiess durch Abschaffung aller Hindernisse, die immer dem vorgesetzten Endzweck entgegenstehen könnten, die Ausbreitung nützlicher Wissenschaften und Künste, so viel an Uns ist, zu erleichtern, und deren Ansehen ehrwürdig zu machen gnädigst entschlossen sind, so nehmen wir die Akademie in Unseren churfürstlichen Schutz und wollen aus

besondern Gnaden derselben Protektor sein und heissen dergestalt, dass wir Niemanden über selbe eine Jurisdiktion gestatten, noch geschehen lassen wollen, dass von der akademischen Versammlung für genehm gehaltene Aufsätze einer anderweitigen Censur unterworfen werden."

Auch seine Nachfolger haben dieses Protectorat mit Weisheit und Wohlwollen aufrecht erhalten, und so schauen wir auch gegenwärtig vertrauensvoll und dankbar auf zu unserm Protektor Prinz-Regent Luitpold, des Königreichs Bayern allergnädigstem Verweser.

Es ist üblich, bei der jährlichen Wiederkehr des Stiftungsfestes der im vergangenen Jahre dahingeschiedenen Mitglieder zu gedenken und mit einer Festrede eines activen Mitgliedes, abwechselnd aus den drei Classen der Akademie, zu schliessen. Zuvor noch sei mir gestattet, mitzutheilen, was zwei mit der Akademie verbundene Stiftungen, den Zographosfonds und die Liebig-Stiftung betrifft.

Die kgl. Akademie der Wissenschaften hatte im Jahre 1889 zur Bewerbung um den von Hrn. Christakis Zographos gestifteten Preis zur Förderung des Studiums der griechischen Sprache und Literatur auf Vorschlag der philosophisch-philologischen Classe als Aufgabe gestellt: „Herausgabe des byzantinischen Meloden Romanos, mit einer die handschriftliche Ueberlieferung, die literarhistorische Stellung und die metrische Kunst des Dichters darlegenden Einleitung." — Rechtzeitig ist eine Bearbeitung derselben eingeliefert worden mit dem Motto aus Byrons Manfred:

„By the power which hath broken
The grave which enthrall'd thee,
Speak to him who has spoken
Or those who have call'd thee!"

Der Verfasser derselben hat für eine Ausgabe des Romanos

auserlesenes handschriftliches Material aus den verschiedensten Bibliotheken Europa's zusammengebracht und ist in diesem Theil der Arbeit sogar über das gesteckte Ziel hinausgegangen, als er die Bibliotheken nach Handschriften für die ältere Liturgie der griechischen Kirche überhaupt durchsuchte. Verarbeitet und für den kritischen Apparat der geplanten Ausgabe zurecht gelegt ist das Material noch nicht, aber derart durcharbeitet, dass nach dieser Seite hin die Lösung der gestellten Aufgabe keinen grossen Schwierigkeiten mehr begegnen wird. Auch zu den verlangten Prolegomena hat der Verfasser nur Vorarbeiten geliefert, die noch der Vertiefung und der abschliessenden Redaction bedürfen. Vollständig gelöst ist demnach die Aufgabe noch nicht; aber da die richtigen Grundlagen gewonnen sind und der gewünschte Abschluss wesentlich nur durch die Kürze der Zeit verhindert wurde, so erkennt die Akademie nach dem Antrag der philosophisch-philologischen Classe dem Verfasser dieser Arbeit den vollen ausgesetzten Preis von 2000 M. zu — unter der Voraussetzung, dass die vorbereitete Ausgabe des Textes nebst den Prolegomena nicht lange auf ihr Erscheinen warten lassen. Der Name des Verfassers ist Dr. Karl Krumbacher.

Die Akademie stellt als neue Preisaufgabe, und zwar mit dem Einlieferungstermin bis spätestens am 31. December 1894:

„Polyglotte Ausgabe der Chronik von Morea auf Grund der in verschiedenen Sprachen und Recensionen erhaltenen Texte, nebst einer Untersuchung über das Verhältniss jener Texte zu einander und über das Original der Chronik."

Die Bearbeitungen dürfen nur in deutscher, lateinischer oder griechischer Sprache geschrieben sein und müssen an Stelle des Namens des Verfassers ein Motto tragen, welches an der Aussenseite eines mitfolgenden, den Namen des Ver-

fassers enthaltenden versiegelten Couverts wiederkehrt. Der Preis für die gelöste Aufgabe beträgt 2000 M., wovon die eine Hälfte sofort nach der Zuerkennung, die andere Hälfte aber erst dann zahlbar ist, wenn der Verfasser für die Druckveröffentlichung seiner Arbeit genügende Sicherheit geboten hat.

Das Curatorium der Liebig-Stiftung hat auf Antrag des geheimen Rathes und Professors Dr. Julius Kühn, Director des landwirthschaftlichen Instituts an der Universität Halle und Mitglied des Curatoriums einstimmig beschlossen, unserm Collegen und Secretär der mathematisch-physikalischen Classe Dr. Carl v. Voit in Anerkennung für seine bahnbrechenden Forschungen über Stoffwechsel und Ernährung von Menschen und Thieren die höchste Auszeichnung, die goldene Liebig-Medaille zu verleihen, welche ihm in der Sitzung des Curatoriums vom 8. Februar 1892 überreicht wurde.

Der Präsident hat nun zunächst eines verstorbenen Ehrenmitgliedes zu gedenken:

Dom Pedro II. d'Alcantara, Kaiser von Brasilien.

Im November des verflossenen Jahres wählte unsere Akademie Dom Pedro II., Kaiser von Brasilien, zum Ehren-[illegible] kurz; einige Wochen [illegible] 1891 endigte der Tod das Leben [illegible] aber auch vielgeliebten Fürsten, [illegible] sondern auch die wissenschaft-[illegible] ist.

[illegible] Potentaten nicht schmei-[illegible] Marcus Aurelius, dem besten Kaiser [illegible] Dom Pedro's Lebenslauf bietet des Inte-[illegible] meinem akademischen [illegible]. Das Ganze bleibt [illegible] Politikern überlassen.

Er war geboren zu Rio de Janeiro am 2. December 1825, bestieg am 7. April 1831 noch nicht ganz sechs Jahre alt unter einer Regentschaft den Thron von Brasilien und wurde im Jahre 1840 im Alter von fünfzehn Jahren als volljährig erklärt. Während seiner Regierung, welche sich über ein halbes Jahrhundert erstreckte, hatte er nicht nur Aufstände niederzuwerfen und Kriege zu führen, sondern auch sein grosses Reich und dessen Verwaltung zu organisiren. Daneben fand er immer noch Zeit, sich in den verschiedensten Wissenschaften gründlich zu unterrichten. In den Sprachwissenschaften war er ganz ungewöhnlich bewandert und konnte hierin als gelehrter Fachmann angesehen werden. Er sammelte und übersetzte die hebräischen Kirchenlieder der provençalischen Juden, erforschte die Tupisprache seiner Indianer und liess ein Lexikon dafür ausarbeiten.

Ebenso interessirte er sich für alle Naturwissenschaften. Charles Darwin schrieb im Jahre 1887 an den Botaniker Sir Josef Hooker: „Der Kaiser hat so viel für die Wissenschaft gethan, dass jeder Gelehrte ihm die grösste Hochachtung schuldig ist.“

Als er auf einer Reise aus der neuen in die alte Welt nach München kam und unsre wissenschaftlichen Anstalten besuchte, setzte er auch da durch seine Specialkenntnisse die Fachleute in Erstaunen.

Während seiner Regierung entstanden in ganz Brasilien zahlreiche Schulen, wurde das historische und geographische Institut in Rio de Janeiro, die polytechnische Schule, das Collegium Dom Pedro II., das Observatorium für Astronomie und Meteorologie und Anderes mehr errichtet. Die Universität suchte er ganz nach Muster der besten europäischen Universitäten zu gestalten.

Diese wissenschaftlichen und humanitären Bestrebungen des Monarchen wurden auch in Europa allseitig anerkannt. Er war seit 1874 Mitglied des Instituts von Frankreich, wo

er noch einige Tage vor seinem Tode zu Paris einer Sitzung in Mitte der 40 Unsterblichen beiwohnte. Ferner war er Mitglied der Royal Society in London, der Akademien der Wissenschaften in St. Petersburg, Moskau, Florenz, Berlin und München.

In gleichem Maasse interessirte sich der Kaiser für Fortschritte in Künsten und Gewerben. Es ist bezeichnend für seine Natur, dass er schon im Jahre 1857 dem damals in der alten Welt noch viel verkannten Richard Wagner den Vorschlag machte, für das lyrische Theater in Rio de Janeiro eine Oper zu componiren.

Eisenbahnen und Telegraphen, Schiffahrt, Handel und Ackerbau suchte er in jeder Beziehung zu fördern.

Für seine Person ein gläubiger katholischer Christ, achtete und förderte er auch Andersgläubige und verkehrte freundschaftlich mit Protestanten, Juden und Mohammedanern. In Avignon erscheint eine unter den Israeliten Frankreichs verbreitete Monatsschrift „La famille de Jacob", in welcher im Decemberheft 1891 in einem Artikel über den Tod Dom Pedro II. wörtlich steht: „Er liebte nicht bloss unsere heilige Sprache, er liebte uns selbst; er achtete die Tugenden unserer Race, welche er gegen die gehässigen Angriffe des modernen Antisemitismus vertheidigte, der ihn empörte."

Seine Regierung war eine durchaus liberale, auf constitutionell-monarchischer Grundlage. Für jeden seiner Unterthanen war er zugänglich und wohlwollend.

Da muss man sich fragen, wie ein solcher Monarch plötzlich entthront und des Landes verwiesen werden konnte!

Am 15. November 1889 brach in der Hauptstadt Rio de Janeiro unter Führung des Marschalls Fonseca eine Militärrevolution aus. Anstatt des Kaisers begann ein Dictator zu herrschen. Dom Pedro erklärte, dass er mit keinem Tropfen Blut seiner geliebten Unterthanen die Herrschaft dem Usurpator entreissen wolle. Widerstandslos begab er sich

auf ein Schiff, das unter kaiserlicher Flagge fuhr und in Lissabon, der Heimath seiner Ahnen landete. Seitdem lebte er im Exil in Europa, öfter äussernd: „Wenn sie mich brauchen, kehre ich zurück.“ Fonseca vergoss hintennach allerdings viel brasilianisches Blut, um sich an der Spitze der Regierung, welche man Republik nannte, zu behaupten; — aber umsonst. Dom Pedro erlebte es noch, dass Fonseca wieder gestürzt und die Gewalt einem anderen Parteimanne übertragen wurde. Wie lange das grosse Reich unter solchen Wechselfällen noch leiden wird, ist abzuwarten.

Politiker sind der Ansicht, dass die Militärrevolution in der Stadt Rio fast nur möglich war, weil Dom Pedro ein viel zu milder Friedensfürst und in seinen humanitären Bestrebungen der Culturentwicklung Brasiliens zu sehr vorausgeeilt war. Die Sklavenemancipation, seine schönste Regierungsthat, entfremdete ihm die Sympathien eines grossen Theils der besitzenden, einflussreichen und mächtigen Classen.

Schon 1850, als er einen Negeraufstand beruhigt hatte, verbot er den Sklavenhandel und neue Einfuhr von Sklaven, womit die Aufhebung der Sklaverei vorbereitet wurde. Es gab ja grosse Districte in Brasilien, welche viel mehr Sklaven als Freie zählten. Im Jahre 1871 setzte er im Parlament ein Decret durch, welches das allmähliche Verschwinden des Sklaventhums bewirkte, und 1888 wurde die Sklaverei in Brasilien als erloschen erklärt.

Wie Sokrates für und wegen seiner Philosophie den Giftbecher trinken musste, so musste Dom Pedro, der von englischen und französischen Schriftstellern oft Kaiser-Philosoph genannt wird, für seine Humanität Scepter und Krone niederlegen. Er that es auch mit philosophischer Ruhe und schloss auf seinem Sterbebette in Paris in sein letztes Gebet noch sein geliebtes Brasilien ein, für das er um eine glückliche Zukunft flehte.

Auch unsre Akademie der Wissenschaften wird Dom Pedro d'Alcantara stets bewundern und ihm ein dankbares Angedenken bewahren.

Der Classensecretär Herr C. v. Voit gedachte sodann der seit dem vorigen Stiftungstage gestorbenen Mitglieder der mathematisch-physikalischen Classe.

Die Classe hat in dem verflossenen Jahre die ungewöhnlich grosse Anzahl von elf Mitgliedern durch den Tod verloren, darunter solche, welche die Wissenschaft in neue, vorher nicht betretene Bahnen gelenkt haben und zu den ersten Meistern in ihrem Fache zählten.

Zu diesen gehörte das am 10. Mai 1891 im 74. Lebensjahre dahier gestorbene ordentliche Mitglied der Classe, Carl Wilhelm von Nägeli, welcher allgemein als der vielseitigste und geistreichste unter den Botanikern der neueren Zeit galt. Er war ausgerüstet mit den umfassendsten Kenntnissen in der Morphologie und Physiologie der Pflanzen, aber auch in der Physik und Chemie; zugleich war er ein ungemein scharfer Beobachter und folgerichtiger Denker. Namentlich in den letzten Jahren seines Lebens hat er sich noch den schwierigsten Problemen seiner Wissenschaft zugewandt und mit philosophischem Geiste das Beobachtete bis in die letzten Consequenzen durchzudenken geliebt.

Ich hebe nur einige seiner hauptsächlichsten Arbeiten hervor, um dem Nichtfachmann ein annäherndes Bild seiner Thätigkeit zu geben.

Zunächst erwähne ich seine ausgedehnten Beobachtungen über die Zellenbildung und das Zellenwachsthum in den pflanzlichen Organismen; dann die grosse Monographie über die Stärkekörner, in welcher er die Lehre von dem Wachsthum durch Intussusception entwickelte und bis zu dem molekularen Aufbau dieser Gebilde vorzudringen wagte:

ferner seine Bearbeitung der Frage der Varietäten- und Bastardbildung; die Systemattk der Hieracien; die Untersuchungen über das Leben der niederen Pilze, bei denen er zwar irrthümlich keine feste Speciesabgrenzung, sondern nur allmähliche Uebergänge annahm, jedoch zuerst die Wirkungen dieser kleinsten Organismen auf die Gewebe als Krankheitserreger und Ursachen der das Menschengeschlecht verheerenden Infektionskrankheiten näher erörterte; seine molekülarphysikalische Theorie der Gährung als Beitrag zur Erklärung der Ursachen der mannigfaltigen Zersetzungsvorgänge in den Zellen; sein Eingreifen in die Darwin'sche Lehre von der Entstehung der Arten durch die natürliche Zuchtwahl und den Kampf um's Dasein durch seine mechanisch-physiologische Theorie der Abstammungslehre, in der er die Zuchtwahl nur unzweckmässig gewordene Formen verdrängen, aber nicht neue Formen bilden lässt, dagegen als mechanische Ursache die Anpassung und Vervollkommnung aufstellt und sich zugleich Vorstellungen über den Aufbau des wesentlichen Trägers der erblichen Eigenschaften der Organisation, des sogenannten Idioplasmas, sowie über die Anordnung der in demselben enthaltenen Elementartheile, der Micellen, bildet; endlich seine bei der hiesigen Naturforscherversammlung im Jahre 1877 gehaltene geistvolle Rede über die Schranken der naturwissenschaftlichen Erkenntniss, worin er dem Ignoramus und Ignorabimus des grossen Physiologen für alle endlichen Erscheinungen, soferne sie in das Bereich der sinnlichen Wahrnehmung fallen, seinen tröstlicheren Ausspruch: „wir wissen und wir werden wissen" entgegenstellte.

Alle diese Arbeiten Nägeli's sind ebensoviele Marksteine der botanischen Wissenschaft geworden. Wenn er dabei auch, im felsenfesten Vertrauen auf die Schärfe seines Denkens, in seinen weitgeführten logischen Schlüssen hie und da geirrt hat, weil es bei den so unendlich complicirten Lebenserscheinungen unmöglich ist, alle die mannigfaltigen dabei

mitwirkenden Ursachen zu überblicken, so haben seine Ideen doch in hohem Grade anregend und befruchtend gewirkt.

Ich habe heute an dieser Stelle nur dem gerechten Stolze Ausdruck zu verleihen, dass ein so bedeutender Forscher so lange Zeit unserem Kreise angehörte, und zu beklagen, dass er uns entrissen wurde; von sachkundiger Seite werden Nägeli's Verdienste um die Wissenschaft in einer besonderen Denkrede eingehende Würdigung erfahren.

Von auswärtigen und correspondirenden Mitgliedern der Classe sind folgende gestorben:

Das auf den Vorschlag von J. Liebig gewählte correspondirende Mitglied Don Ramon Torres Munoz de Luna, Professor der Chemie an der Universität zu Madrid, ist am 10. November 1890 in Malaga aus dem Leben geschieden. Luna war längere Zeit einer der thätigsten und wirksamsten Chemiker Spaniens; er hat namentlich durch die Entdeckung ausgedehnter Phosphoritlager bei Cocierés in Estramadura, dann durch seine Arbeit über den Einfluss der phosphorsauren Erden auf die Vegetation und deren Anwendung zur Erhöhung der Getreideproduktion, sowie durch seine Schrift über die Zukunft der Agrikultur in Spanien einen sehr nützlichen Einfluss auf den Feldbau der pyrenäischen Halbinsel ausgeübt.

Dr. med. Joseph Leidy, Professor der Anatomie an der Pensylvania-Universität und am Swarthmore-College in Philadelphia, ist am 30. April 1891 im 68. Lebensjahre gestorben. Er war ein sehr verdienter Forscher auf dem Gebiete der Zoologie und Paläontologie, von umfassenden Kenntnissen. Seine wissenschaftlichen Untersuchungen erstrecken sich über weit aus einander liegende Gebiete der Zoologie. In zahlreichen Publikationen beschäftigte er sich mit der amerikanischen Süsswasserfauna, worüber er namentlich eine umfangreiche, von prächtigen Abbildungen begleitete

Monographie der Süsswasserrhizopoden lieferte, in welcher er das Vorkommen zahlreicher europäischer Arten in Amerika feststellte und viele neue Formen beschrieb. Er untersuchte ferner die entoparasitischen Protozoen und Würmer und die Pflanzenthiere, von denen er besonders den feineren Bau der Lucernarier einer eingehenden Prüfung unterwarf. Osteologische Arbeiten über recente Wirbelthiere führten ihn auf das Gebiet der Paläontologie; er beschrieb in zahlreichen Abhandlungen die merkwürdigen fossilen Wirbelthiere Nordamerikas, vor Allem die von Nebraska, wodurch er sich um die Paläontologie grosse Verdienste erworben hat.

In Göttingen ist am 24. Juni 1891 einer der bedeutendsten und geistvollsten Physiker aller Zeiten, Wilhelm Weber, 87 Jahre alt verschieden. Das von ihm noch in jugendlichem Alter mit seinem Bruder Ernst Heinrich veröffentlichte classische Werk über die Wellenlehre, seine Entdeckung der elastischen Nachwirkung, seine akustischen und optischen Arbeiten, die mit seinem Bruder herausgegebene Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, ferner die in Gemeinschaft mit Gauss im Dienste ihrer erdmagnetischen Forschungen ausgeführte Herstellung des ersten elektromagnetischen Telegraphen, dessen Verwendbarkeit im Grossen wir dem erfinderischen Geiste unseres Steinheil verdanken, wären genügend, um seinem Namen eine hervorragende Stelle in der Geschichte der Physik zu sichern. Den höchsten und ihm allein gebührenden Ruhm aber hat er sich auf dem Gebiete der Elektricität erworben. In der Reihe von Abhandlungen „Elektrodynamische Maassbestimmungen“ hat er sich durch das bewunderswerthe absolute elektrische Maasssystem, welches Stromstärke, elektrometrische Kraft und Widerstand auf die Grundeinheiten Länge, Zeit und Masse zurückführt, ein unvergängliches Denkmal gesetzt, welches unerschüttert bleibt, wenn auch der internationale elektrische

Mineralog eine höchst anregende Lehrthätigkeit aus. Seine geologischen Hauptarbeiten beschäftigen sich mit dem rheinischen Schiefergebirge, dem Teutoburger Wald, der Weserkette, dem schlesischen Lande und dem norddeutschen Diluvium; sie sind Muster sorgfältiger Beobachtung und lichtvoller Darstellung. Als Paläontologe war er in fast allen Theilen des Thierreichs erfolgreich thätig und galt in Deutschland unbestritten als erste Autorität für paläozoische Organismen. Während einer $1^1/_2$ jährigen Reise nach Nordamerika hatte Römer überdies die erste Grundlage für die Geologie von Texas geschaffen. Der Verlust des verdienstvollen und hervorragenden Gelehrten wird in der Wissenschaft schmerzlichst beklagt.

Der am 29. December 1891 verstorbene Berliner Mathematiker Leopold Kronecker war am 7. December 1823 zu Liegnitz in Schlesien geboren worden. Ein Schüler von Kummer, Dirichlet und Jacobi hat er gleich mit dem Beginne seines mathematischen Schaffens sich einen Platz in der ersten Reihe der Mathematiker der Gegenwart erworben. Er ist der Schöpfer von fundamentalen zahlentheoretischen Arbeiten, von welchen ausgehend er weiterhin insbesondere die arithmetische Seite der Algebra, der Funktionentheorie und der Geometrie in wichtigen und weittragenden Untersuchungen gefördert hat. Einen Zeitraum von 40 Jahren hindurch war er bis zu seinem Ende in erstaunlicher Vielseitigkeit und Fruchtbarkeit thätig, durch seine Arbeiten in alle Zweige mathematischen Wissens eingreifend, und so hinterlässt sein vorzeitiger Tod eine nicht zu ersetzende Lücke in der mathematischen Welt.

Sir George Bidell Airy (geboren am 27. Juli 1801 in Alnwick in Northumberland, gestorben am 2. Januar 1892 in Greenwich) gehört zu den bedeutendsten englischen Astronomen dieses Jahrhunderts, er hat in nahezu 70 Jahre an-

dauernder rastloser Thätigkeit seiner Wissenschaft grosse Dienste geleistet. Seine Arbeiten haben nicht nur die theoretische Astronomie, die mathematische Geographie und durch sehr bedeutende optische Untersuchungen, wobei er der Entdecker des Astigmatismus des menschlichen Auges wurde, die Physik gefördert, sondern auch die astronomische Praxis, namentlich in England, ganz wesentlich beeinflusst. Als Royal Astronomer von England und Direktor der grossen Sternwarte in Greenwich hat er eine besonders segensreiche Thätigkeit entfaltet. Die Beobachtungs- und Rechnungsmethoden, welche an dieser Anstalt seit Jahrzehnten im Gebrauch sind, entsprechen vollkommen den bis in's Detail ausgearbeiteten Vorschlägen Airy's. Es ist sein grosses Verdienst die mit so reichen Mitteln ausgestattete Sternwarte in Greenwich nicht nur in ihrer so erfolgreichen Thätigkeit für Astronomie und Nautik erhalten, sondern derselben einen neuen und glänzenden Aufschwung ertheilt zu haben.

Am 7. Januar 1892 ist in Wien der weitberühmte Professor der Physiologie Ernst v. Brücke nach einem rastlos thätigen und für die Wissenschaft überaus fruchtbaren Leben im Alter von 73 Jahren entschlafen. Brücke stand mit Du Bois-Reymond, Helmholtz und Ludwig an der Spitze der Physiologen der Gegenwart; er ist wie diese seine Freunde aus der Schule von Johannes Müller hervorgegangen, welcher vor Allen die Biologie in Deutschland aus den Banden der Naturphilosophie befreit und sie zu einer experimentirenden und erklärenden Naturwissenschaft erhoben hatte. Seine Schüler haben die von ihm gewiesenen Wege der Forschung, die der mühsamen Beobachtung und des genauen Versuches, weiter verfolgt und in vorher ungeahnter Weise die Beweise gehäuft, dass bei den Vorgängen im Thier und in der Pflanze nur die Kräfte der anorganischen Natur unter den in der Organisation gegebenen Bedingungen wirken. Es ist nicht

zum Wenigsten der ungemein scharfen Beobachtungsgabe und der geschickten Experimentirkunst Brücke's zu verdanken, wenn eine grosse Anzahl von früher ganz unerklärlichen Vorgängen im Organismus unserem Verständniss erschlossen worden sind. Man kann wohl sagen, dass Brücke unter seinen Fachgenossen der vielseitigste war, denn er bediente sich zur Erforschung der Lebenserscheinungen mit derselben Sicherheit und dem gleichen tiefen Verständniss des Mikroscops, der Methoden der Physik und Chemie und er war in fast allen Gebieten der Physiologie der Thiere und der Pflanzen thätig. Das Gefundene hat er, frei von jeglichem Vorurtheil und unsicherer Spekulation, nüchtern und ohne Ausschmückung berichtet. Es ist unmöglich, in wenig Worten ein Bild von Brücke's wissenschaftlicher Thätigkeit zu entwerfen, da seine sehr zahlreichen Arbeiten auf den verschiedensten Gebieten liegen; es bleibt nichts übrig als die hauptsächlichsten derselben kurz zu skizziren. — Als er in die Physiologie eintrat, hatten kurz vorher Schleiden und Schwann in den Zellen die Elementargebilde der Pflanzen und Thiere aufgefunden und war man daran gegangen, das Mikroscop zur Aufklärung der Lebensvorgänge an den organisirten Formen zu benützen. Brücke widmete einen grossen Theil seiner Thätigkeit der Untersuchung der feineren Struktur der Theile mittelst des Mikroscops und er hat so für die Physiologie derselben eine sichere Grundlage geschaffen. Ich erwähne davon nur die Entdeckung des Binnenmuskels des Auges, welche zur Erkenntniss des Mechanismus der Accomodation des Auges in die Nähe führte; die Bestimmung der Durchmesser der Stäbchen und Zapfen der Netzhaut, welche mit dem Abstande der eben getrennt wahrnehmbaren Bildchen übereinstimmen, wodurch es wahrscheinlich wurde, dass diese Gebilde die lichtperzipirenden sind; die Auffindung der Muskeln der Darmzotten, wodurch der merkwürdige Mechanismus der Resorption im Darm klar gelegt wurde; die

Kenntniss der Struktur der Darmfollikel, die dazu führte, diese Drüsen zu den Lymphdrüsen zu rechnen; den ersten Nachweis des Ursprungs der Lymphgefässe in den Lücken der Gewebe, durch den er die Bedeutung der Lymphe erkannte; die Untersuchung der Struktur der Blutkörperchen und seine berühmte Abhandlung über die Elementarorganismen, die ihn zum Mitbegründer der heutigen Zellentheorie machte. — Viele seiner Untersuchungen beschäftigen sich mit der Physiologie des Auges und mit optischen Problemen. Er brachte die erste Beobachtung über die Reflexion des Lichtes am Augenhintergrunde durch die Wahrnehmung des Augenleuchtens, womit er die Erfindung des Augenspiegels durch Helmholtz vorbereitete; daran reihten sich wichtige Versuche über die Erscheinungen der Nachbilder, über intermittirende Netzhautreizung, über Farbenempfindungen, über subjektive Farben und Contrastfarben, binokulare Farbenmischung, das stereoscopische Sehen, die Ursache des Nichtsehens der überrothen und übervioletten Strahlen. Dazu kamen noch rein physikalische Arbeiten über den Metallglanz, über die Farben trüber Medien im auf- und durchfallenden Lichte; dann seine Untersuchungen über die Ursachen der Färbung thierischer Gebilde und den merkwürdigen Farbenwechsel der Haut mancher Thiere, besonders des Chamäleon, sowie die wichtigen Beobachtungen der Muskelm im polarisirten Lichte, durch welche die feinere Struktur des Muskels und die Veränderung desselben bei der Contraktion zuerst genauer erkannt wurde. — Nicht minder erfolgreich waren seine chemischen Arbeiten über die Gerinnung des Blutes, die Todtenstarre des Muskels, welche er zuerst als die Gerinnung eines Eiweissstoffes bezeichnete, dann die über die Veränderungen des Eiweisses und des Stärkemehls bei der Verdauung, die Darstellung der Verdauungsfermente, die Methode der quantitativen Bestimmung des Glykopens in der Leber. Besonders hervorzuheben sind noch seine Theorie

der Osmose und die Studien über die Mechanik der Bewegungen der Blätter der Mimosa pudica. — Von grösster Tragweite waren seine Bemühungen, das Zustandekommen der Sprachlaute, besonders der Consonanten, zu verstehen. In seinem Werke: „Die Grundzüge der Physiologie und Systematik der Sprachlaute für Linguisten und Taubstummenlehrer" schuf er eine physiologische Lautlehre, indem er die Bewegungen der Sprachwerkzeuge bei dem Aussprechen der Laute der verschiedenen Sprachen genau beobachtete und beschrieb; die Sprachforschung und der Unterricht der Taubstummen hat daraus den grössten Nutzen gezogen. Er veröffentlichte dann eine neue Methode der phonetischen Transcription der Sprachlaute, wobei er für jeden Laut ein bestimmtes Schriftzeichen erfand, das die zur Erzeugung desselben nothwendigen Bewegungen der Theile anzeigt, so dass Jeder des Zeichens Kundige diesen Laut, auch einer ihm völlig unbekannten Sprache, richtig zu sprechen vermag. Indem er auf diese Weise zuerst die Sprache sichtbar machte, war eine Grundlage für weitere Bestrebungen in dieser Richtung gewonnen. Er begnügte sich jedoch nicht mit der Gestaltung der einzelnen Laute, sondern suchte auch zu ergründen, wie letztere zu Silben und Worten zusammengefügt werden; so gelang es ihm in seinem Buche über die physiologischen Grundlagen der neuhochdeutschen Verskunst die beim Rezitiren von Versen stattfindenden Schallerscheinungen und Sprachbewegungen zu erfassen und aus solchen physiologischen Beobachtungen bestimmte Regeln für die Verskunst abzuleiten. — Die Studien über die physiologische Optik und die Farben führten den mit feinem Kunstsinn und tiefem Kunstverständniss begabten Physiologen zum Nachdenken über das Wesen der bildenden Kunst; als Mitglied des Curatoriums des österreichischen Museums für Kunst und Industrie schrieb er für die Zwecke des Kunstgewerbes die „Physiologie der Farben", worin er die Ursache der Harmonie und

Disharmonie der Farben ermittelte, so wie man die der Töne gesucht hatte. Für das Verständniss der Werke der bildenden Kunst von hoher Bedeutung waren seine anatomischen und physiologischen Erläuterungen: „Die Bruchstücke aus einer Theorie der bildenden Künste" und „Die Schönheiten und Fehler der menschlichen Gestalt". Dem für alles Wahre und Schöne begeisterten Manne, dem echten Gelehrten, welchem es heiliger Ernst mit der Wissenschaft war, werden die Vielen, welche aus seinen Werken Belehrung und Anregung geschöpft haben und noch schöpfen werden, stets dankbar sein.

Am 12. Januar d. J. starb zu Paris Jean Louis Armand de Quatrefages de Bréau, Professor der Anatomie und Ethnologie am Musée d'histoire naturelle und Mitglied des Instituts, 82 Jahre alt. Er hat sich zuerst durch äusserst gediegene Untersuchungen über die Lebensweise, den inneren Bau und die Entwicklungsgeschichte der wirbellosen Thiere ausgezeichnet, welche unsere Kenntnisse über die niedere Thierwelt beträchtlich erweiterten und ihn zu einem der geachtetsten Zoologen erhoben. Seine wichtigsten Arbeiten in dieser Richtung erstrecken sich auf den Stamm der Würmer; besonders waren seine Forschungen über die Strudelwürmer grundlegend für die Anatomie dieser Thiere, ebenso seine sorgfältigen Darstellungen vom Blute, dem Blutkreislauf und Athemapparat, vom Nervensystem und den Sinnesorganen, sowie der Entwicklungsgeschichte der Ringel- und Sternwürmer. Seine Untersuchungen über die Krankheiten der Seidenraupen griffen nützlich in das praktische Leben ein. In den letzten Jahrzehnten hat er sich jedoch mehr und mehr der Anthropologie zugewendet und sich dadurch einen weithin bekannten Namen gemacht. Ihm ist es mit zu verdanken, wenn diese Wissenschaft sich zu einem Zweige der Naturwissenschaft umgestaltet hat. Er war bestrebt die Entstehung der Menschenrassen, ihre Verbreitung auf der Erde

und ihre physischen und psychischen Unterschiede klar zu legen, besonders in seinem sämmtliche Völker der Erde umfassenden Werke, Crania ethnica, in welchem allerdings die heut' zu Tage als nothwendig erachteten Schädelmessungen noch nicht berücksichtigt sind. Mit Darwin's Lehre von der Entstehung der Arten durch natürliche Zuchtwahl konnte er sich nicht befreunden; er bekämpfte die Lehre von der Abstammung des Menschen vom Affen, vertheidigte die Auffassung von der Einheit des Menschengeschlechts, dessen Wiege er im nördlichen Asien suchte, und er lebte der Ueberzeugung, dass der Mensch sich vom Thier strenge durch das Geistige, durch das Vorhandensein moralischer und religiöser Ideen unterscheide. Die von dem sonst nüchternen Forscher in patriotischer Erregung geschriebene unglückliche Abhandlung: La race prussienne, welche er später wohl selbst beklagt hat, wollen wir Deutsche, in Anbetracht seiner sonstigen grossen Verdienste um die Wissenschaft, vergessen. Quatrefages stand in seinem Vaterlande in höchstem Ansehen als Vertreter der biologischen Fächer, namentlich bei wissenschaftlichen Versammlungen im In- und Auslande, wobei er durch seine ungewöhnliche Beredsamkeit und persönliche Liebenswürdigkeit unterstützt wurde.

Mit dem am 20. Februar d. J. im Alter von 75 Jahren in Heidelberg verstorbenen hervorragenden Chemiker Hermann Kopp ist ein mit unserem unvergesslichen Präsidenten Justus v. Liebig sowie mit den Erfolgen des Giessener Laboratoriums enge verbundener Forscher aus dem Leben geschieden. Er war ein anspruchsloser Gelehrter, von dem erstaunlichsten bis in die ersten Anfänge seiner Wissenschaft sich erstreckenden Wissen, von schärfster Beobachtungsgabe, durchdringendem Verstande und ungewöhnlicher Schaffenslust. Er hat vom Anfang seiner Thätigkeit an als einer der ersten [illegible] das für die theoretische Chemie so wichtige Grenzgebiet der

Physik und Chemie zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht, wodurch er die merkwürdigen Beziehungen der physikalischen und chemischen Eigenschaften der Stoffe enthüllte und so die physikalische Chemie schuf. Wir verdanken ihm vor Allem die Entdeckung der Beziehung des specifischen Gewichtes zu der chemischen Zusammensetzung, ferner die Ermittelung der Volumenverhältnisse, nach welchen die Körper sich zu den chemischen Verbindungen vereinigen, wobei sich zeigte, dass einer gleichen Differenz in der chemischen Zusammensetzung gewisser flüssiger organischer Verbindungen auch eine gleiche Differenz der specifischen Volumen entspricht, dann die Auffindung der Beziehung des Siedepunktes vieler Flüssigkeiten zu ihrem specifischen Gewicht und zu ihrer chemischen Constitution, sowie viele Bestimmungen der specifischen Wärme der Körper. Ausser durch seine werkthätige Betheiligung an dem grossen Jahresberichte der Chemie und den Annalen der Chemie ist Kopp noch besonders bekannt geworden als der unübertreffliche Geschichtsschreiber der Chemie, wozu er wie kein Anderer vor ihm durch sein Wissen befähigt war; seine Geschichte der Chemie in vier Bänden ist ein durch Gründlichkeit und Fülle der Kenntnisse einzig dastehendes Werk, welches dem Chemiker zum ersten Male eine weitere Einsicht in die Entwicklung seiner Wissenschaft eröffnete, seinem Verfasser aber in der Geschichte der Chemie einen unvergesslichen Namen gemacht hat.

Möchten der kommenden Generation zum Segen der Wissenschaft solche Männer wie die, welche uns in diesem Jahre entrissen worden sind, nicht fehlen.

Sitzung vom 7. Mai 1892.

1. Herr WALTHER DYCK legt eine Abhandlung des Herrn Professor ALFRED PRINGSHEIM: „zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Convergenzbereich" vor.

2. Herr GUSTAV BAUER überreicht eine von dem auswärtigen Mitgliede, Herrn Professor AUREL VOSS in Würzburg, eingesandte Abhandlung: „über die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie."

3. Herr NIKOLAUS RÜDINGER übergiebt den von ihm zusammengestellten Katalog der anthropologischen Sammlung der hiesigen anatomischen Anstalt, welcher einen Theil der auf Anregung der deutschen anthropologischen Gesellschaft herausgegebenen Verzeichnisse des in Deutschland vorhandenen anthropologischen Materials darstellt.

Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich.

Von Alfred Pringsheim.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Im 15. Bande der Acta Mathematica[1]) theilt Herr Mittag-Leffler die folgende von Herrn Fredholm aufgefundene Reihe:

$$\sum_{0}^{\infty} {}_{\nu}\, a^{\nu} \cdot x^{\nu^2} \quad (|a| < 1)$$

als erstes Beispiel einer Function mit, welche über einen gewissen Bereich (den Einheitskreis um den Nullpunkt) nicht analytisch fortgesetzt werden kann, d. h. für keine Stelle auf der Grenze dieses Bereiches nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar ist, obschon sie daselbst mit sämmtlichen Ableitungen stetig ist.

Die Reihe ist in der That wegen ihrer ausserordentlichen Einfachheit bemerkenswerth: dagegen scheint mir dieselbe keineswegs etwas principiell neues darzubieten und in dieser Hinsicht von Herrn Mittag-Leffler einiger-

1) „Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm." A. a. O. p. 279.

maassen überschätzt zu werden. Denn abgesehen davon, dass wohl Niemand, der sich mit der Theorie der Taylor'schen Reihe etwas näher beschäftigt hat, an der Existenz derartiger Functionen den geringsten Zweifel haben konnte, so möchte ich Herrn Mittag-Leffler nicht einmal darin beistimmen, dass solche Functionen bisher überhaupt noch nicht studirt worden seien.[1])

Die principielle Frage, um die es sich hierbei einzig und allein handelt, ist doch lediglich die: Giebt es Functionen, die auch nur an irgend einer einzigen Stelle endliche Differentialquotienten[2]) jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind? Denn aus einer Function, die eine derartige Singularität an einer Stelle besitzt, lassen sich ja dann nach bekannten Methoden — etwa mit Hilfe des von Herrn Cantor angegebenen Condensations-Principes[3]) — leicht solche bilden, bei denen die nämliche Singularität in allen Punkten einer beliebigen abzählbaren unendlichen Menge auftritt.

Nun hat aber im Gegensatz zu Lagrange, welcher geradezu die Ansicht aussprach,[4]) dass die Endlichkeit von $f^{(\nu)}(x)$ für jedes endliche ν die Gültigkeit der Entwicklung:

1) Es heisst a. a. O.: Autant que je sache, toutes les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et qui ont été étudiées jusqu'ici, cessent d'exister, parce que les fonctions elles mêmes ou leurs dérivées deviennent discontinues sur la frontière.

2) Selbstverständlich handelt es sich hierbei im Falle einer complexen Variabeln nicht um Differentialquotienten nach allen möglichen Richtungen, sondern nur nach einem Theil dieser Richtungen.

3) Math. Ann. Bd. XIX. p. 588.

4) Théorie des Fonctions. Chap. V. Art. 30 (Oeuvres complètes. T. IX p. 65). — Leçons sur le Calcul des Fonctions. Leç. III (Oeuvres compl. T. X. p. 72.)

$$f(x+h) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^\nu$$

(und damit eo ipso auch die Convergenz der betreffenden Reihe) nach sich ziehe, Cauchy schon in seinen ersten „Leçons sur le Calcul infinitésimal" vom Jahre 1823 ausdrücklich die Bemerkung gemacht,[1]) dass nicht einmal die Convergenz der Taylor'schen Reihe hinreiche, um daraus die Gültigkeit der obigen Beziehung zu folgern. Und obschon sich gegen das einzige zum Belege seiner Behauptung angeführte Beispiel gewisse, nicht recht zu widerlegende Einwände erheben lassen (wovon weiter unten noch die Rede sein wird), so ist doch die sachliche Richtigkeit jener Cauchy'schen Bemerkung, die sich auch in zahlreichen besseren Compendien der Differentialrechnung reproducirt findet,[2]) meines Wissens von neueren Mathematikern niemals bestritten worden,[3]) mag dieselbe auch diesem oder jenem mathematischen Schriftsteller vielleicht gänzlich entgangen sein.[4])

1) a. a. O. p. 152. Auch in den „Leçons sur le Calcul différentiel" vom Jahre 1826: p. 105, und den „Leçons sur le Calcul différentiel et intégral" von Cauchy-Moigno: T. I. p. 71.

2) z. B. Hermite, Cours d'Analyse, T. I. p. 203. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, T. I. p. 152. — Houël, Calcul infinitésimal, T. I. p. 286.

3) Nur der Vollständigkeit halber möchte ich als einzig mir bekannte Ausnahme ein Buch mit dem viel versprechenden Titel: „Le Calcul infinitésimal fondé sur des Principes rationnels" von P. H. Fleury (Paris 1879) anführen. Was aber der Verfasser dort auf p. 234—236 vorbringt, enthält nur ein Körnchen Wahrheit, soweit er sich gegen die besondere Form des Cauchy'schen Beispiels wendet. Alles übrige sind theils nichtssagende, theils geradezu absurde Redensarten.

4) z. B. Hankel, der in seiner bekannten Abhandlung über die unendlich oft unstetigen Functionen (1870) gelegentlich noch ganz den Lagrange'schen Standpunkt vertritt: cf. Math. Ann. Bd. XX. p. 102.

Immerhin bin auch ich der Ansicht, dass jenes Cauchy'sche Beispiel nicht ausreicht, um die Existenz einer nicht entwickelbaren Function mit lauter stetigen Differential-Quotienten schlechthin evident zu machen. Dies wird nun aber thatsächlich vollständig geleistet durch ein von Du Bois Reymond im Jahre 1876 publicirtes Beispiel einer Function,[1]) welche an einer gewissen Stelle endliche und stetige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzt, während die mit diesen Differentialquotienten gebildete Taylor'sche Reihe $\sum_{0}^{\infty}\nu \frac{f^{\nu}(x)}{\nu!} h^{\nu}$ für jedes noch so kleine h divergirt, woraus dann mit Leichtigkeit folgt, dass $f(x+h)$ in der Umgebung dieser Stelle x überhaupt nicht nach Potenzen von h entwickelt werden kann. Und da Du Bois Reymond es auch unternommen hat, aus dieser Function durch „Condensation" eine andere abzuleiten, welche die fragliche Eigenschaft in unendlich vielen, überall dicht liegenden Punkten einer Linie hat, so scheint mir eben die oben citirte Bemerkung des Herrn Mittag-Leffler nicht recht zutreffend.

Auf der anderen Seite hätte ich gegen die von ihm mitgetheilte Reihe des Herrn Fredholm, deren elegante Einfachheit ich nochmals ausdrücklich anerkenne, vom didaktischen Standpunkte mancherlei einzuwenden. Zunächst scheint mir schon der Beweis dafür, dass jene Reihe die fragliche Eigenschaft besitzt, nicht elementar genug: er beruht auf einem, keineswegs mehr den Elementen der Functionen-Theorie angehörigen Kowalewski'schen Satze über die Integrale partieller Differential-Gleichungen. Zweitens aber bietet diese Methode der Herleitung den grossen Nachtheil, dass wir von der Art und Weise des Zustandekommens einer solchen, doch immerhin merkwürdigen Singularität auch nicht die geringste Anschauung erhalten.

1) In den Abh. der b. Akad. Desgl. Bd. XXI dieser Zeitschrift. p. 109 ff.

Da mir dies nun aber gerade wünschenswerth erschien, so habe ich vor allem versucht, die schon von Du Bois Reymond befolgte Methode, die in mancher Beziehung der Ergänzung geradezu bedarf, in anderer der Erweiterung fähig ist, derartig zu vervollkommnen, dass es möglich wird, auf dem Wege einer zielbewussten Synthese völlig einwandfreie Beispiele von Functionen der gedachten Art zu erzeugen.

Zu diesem Behufe untersuche ich zunächst nochmals genau die Möglichkeiten, unter denen trotz der Endlichkeit aller Ableitungen von endlicher Ordnung die Entwickelbarkeit nach der Taylor'schen Reihe für eine bestimmte Stelle ausgeschlossen erscheint, und belege dieselben durch einfache, vermittelst directer Rechnung zu controlirende Beispiele (§ 1). Sodann werden allgemeine Bedingungen aufgestellt, unter denen es möglich ist, derartige singuläre Stellen in unendlicher Anzahl beliebig zu condensiren, ohne fürchten zu müssen, dass dieselben sich etwa gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben könnten (§ 2). Auf Grund dieser Bedingungen werden darauf Reihen construirt, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, auf dem Einheitskreise durchweg beliebig oft differenzirbar und daselbst dennoch nirgends entwickelbar zu sein.

Die auf diese Weise erzeugten Reihen sind natürlich minder einfach als die von Herrn Mittag-Leffler mitgetheilte, aber sie geben uns, wie gesagt, offenbar eine deutliche Vorstellung von einer der Möglichkeiten, wie derartige Singularitäten zu Stande kommen können.

Im übrigen aber bin ich auch, abgesehen von diesen Betrachtungen, im Stande, Reihen von ganz ähnlicher Einfachheit wie die des Herrn Fredholm anzugeben, bei denen sich die fragliche Eigenschaft ganz elementar beweisen lässt, indem man durch einfache Rechnung erkennen kann, dass die Taylor'sche Entwickelung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen auf dem Einheitskreise divergiren muss (§ 4).

§ 1.

Für das Innere eines gewissen Bereichs der complexen Variablen x sei $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ durch irgendwelche analytische Ausdrücke als eindeutige reguläre analytische Function definirt — z. B. durch gleichmässig convergirende Reihen von der Form $\Sigma f_\nu(x)$ bezw. $\Sigma f_\nu^{(n)}(x)$, wo die $f_\nu(x)$ in dem gedachten Bereiche reguläre algebraische oder transscendente Functionen bedeuten.

Auf der Begrenzung dieses Bereiches befinde sich eine Stelle α, für welche $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n noch eindeutig bestimmt, endlich und stetig sei. Wenn dann eine für irgendwelche Umgebung von $x = \alpha$ convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - \alpha)$ existirt, dergestalt dass die Beziehung:

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - \alpha) \tag{1}$$

besteht für denjenigen Theil des Convergenz-Bezirkes von $\mathfrak{P}(x - \alpha)$, welcher in den ursprünglichen Definitions-Bereich von $f(x)$ hineinfällt, so hat dieselbe sicher die Form:

$$\mathfrak{P}(x - \alpha) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (x - \alpha)^\nu. \tag{2}$$

Daraus folgt aber, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ im Punkte α gemachten Voraussetzungen zwei und nur zwei Möglichkeiten denkbar sind, unter denen keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - \alpha)$ von der gedachten Beschaffenheit existiren kann, nämlich:

1. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (x - \alpha)^\nu$ für $|x - \alpha| < \varepsilon$ divergirt, wie klein man auch die positive Grösse ε annehmen möge.

2. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ zwar für irgend welche Umgebung der Stelle α convergirt, aber ihre Summe nicht den Werth $f(x)$ hat, dort, wo ihr Convergenz-Bezirk noch in den Definitions-Bereich von $f(x)$ hineinfällt.

Die erste dieser beiden Möglichkeiten bietet für unsere Vorstellung auch nicht die geringste Schwierigkeit dar. Da nämlich $f^{(n)}(\alpha)$, wenn auch für jedes endliche n endlich, mit unendlich wachsendem n geradezu in der Regel gleichfalls in's Unendliche wachsen wird[1]) (andernfalls würde ja die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^n$ beständig convergiren, also ihre Summe eine ganze transscendente Function darstellen, was doch nur ein ganz specieller Fall wäre; das gleiche findet selbst dann noch statt, wenn $f^{(n)}(\alpha)$ mit n so unendlich wird, wie die n^{te} Potenz einer beliebig grossen endlichen Zahl), so liegt absolut keine Veranlassung dazu vor, an der Existenz von Functionen zu zweifeln, bei welchen für irgend welche Werthe $x=\alpha$ die Zunahme von $f^{(n)}(\alpha)$ für wachsende n so stark ist, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ für keinen noch so kleinen Werth von $|x-\alpha|$ convergirt.

---

1) Dieser Umstand ist thatsächlich von manchen mathematischen Autoren völlig übersehen worden, indem sie die für die Existenz der Taylor'schen Reihe nothwendige Bedingung von der „Endlichkeit sämmtlicher Ableitungen" dahin missverstanden, als müsse $f^{n}(\alpha)$ für jedes noch so grosse n unter einer festen endlichen Grenze bleiben. Auf diesem Missverständnisse beruht z. B. eine völlig irrthümliche Bemerkung des Herrn Mansion über den Rest der Taylor'schen Reihe und speciell über das oben erwähnte Beispiel von Du Bois Reymond. (Note sur quelques principes fondamentaux d'analyse" Art. III. — Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1879.) Desgleichen ein unzulänglicher Beweis des Taylor'schen Satzes von F. König. (Nouvelle démonstration du théorème de Taylor. Nouv. Annales, 2[de] Série, T. XIII p. 270.)

Und es lassen sich auch mit Leichtigkeit **hinreichende** Bedingungen für die Art des Unendlichwerdens von $f^{(n)}(a)$ für $n = \infty$ aufstellen, welche die **Convergenz** der obigen Reihe für jede noch so kleine Umgebung der Stelle a **definitiv ausschliessen.**

So folgt z. B. aus dem Cauchy'schen Fundamental-Kriterium zweiter Art, dass die Reihe für kein noch so kleines $|x - a|$ convergiren kann, wenn für $\nu = \infty$

$$\lim \left\{ \frac{|f^{(\nu-1)}(\alpha)|}{(\nu-1)!} : \frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \right\} = \lim \left\{ \nu \cdot \left| \frac{f^{(\nu-1)}(\alpha)}{f^{(\nu)}(\alpha)} \right| \right\} = 0$$

wird, oder anders geschrieben:

$$\left| \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)} \right| \succ \nu$$

eine Bedingung, die sicher erfüllt ist, wenn von einer beliebigen Stelle $\nu \geqq n$ ab:

$$(3) \qquad \left| \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)} \right| = \nu \cdot \psi(\nu)$$

ist, wo $\psi(\nu)$ eine positive Grösse bedeutet, die mit ν — wenn auch **beliebig langsam** in's Unendliche wächst.

Geht man, statt von dem Cauchy'schen Kriterium, von der Bemerkung aus, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^{\nu}$ sicher beständig divergirt, wenn für jedes noch so kleine positive ε und für $\nu \geqq n$ die Beziehung besteht:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \cdot \varepsilon^{\nu} > 1$$

so gelangt man statt der Bedingung (3) zu der folgenden:

$$(4) \qquad \frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} > (\psi(\nu))^{\nu}$$

welche, wegen $\nu! < \nu^{\nu}$, a fortiori erfüllt ist, falls für $\nu > n$:

$$(5) \qquad |f^{(\nu)}(a)| \geqq (\nu \cdot \psi(\nu))^{\nu}$$
$$\geqq e^{\nu}\{lg\,\nu + \varphi(\nu)\}$$

wobei $\varphi(\nu) = lg\,\psi(\nu)$ gleichfalls eine mit ν beliebig langsam in's Unendliche wachsende positive Grösse bedeutet.

Ich will nun zunächst ein überaus einfaches und, wie ich glaube, in jeder Hinsicht tadelfreies Beispiel[1]) einer Function mit der eben besprochenen Eigenschaft angeben. Es werde gesetzt:

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{a^{-\nu} + x}$$

wo a eine positive Zahl > 1 bedeutet. Diese Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für die ganze x-Ebene mit Ausschluss einer beliebig kleinen Umgebung der Stellen $x = -a^0, -a^{-1}, -a^{-2} \cdots$. Sie convergirt insbesondere auch noch für $x = 0$ und zwar gleichmässig für jeden

---

1) Bei der a. a. O. von Du Bois Reymond angegebenen Reihe die mit der hier betrachteten formal sehr verwandt ist, nämlich:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu)!} \frac{x^{2\nu}}{x^2 + a_{\nu}^2}$$

(wobei $a_{\nu}^2 > 0$, $\lim a_{\nu} = 0$) sind, wie man auf den ersten Blick erkennt, die Differential-Quotienten n^{ter} Ordnung so complicirt, dass ihre explicite Aufstellung äusserst umständlich erscheint. Diese wird nun a. a. O. in der That auch gar nicht geliefert, vielmehr wird nur gezeigt, dass $|f^{(n)}(x)|$ für jedes endliche n unter einer gewissen mit n endlich bleibenden Grenze liegt. Zur Bildung von $f^{(n)}(0)$ wird sodann die gliedweise Entwickelung der obigen Reihe nach Potenzen von x benützt, was einerseits eine unnöthige Weitläufigkeit der Rechnung zur Folge hat, andererseits aber auch den Nachtheil mit sich bringt, dass die Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ an der kritischen Stelle $x = 0$ wohl aus allgemeinen Principien geschlossen, aber nicht *ad oculos* demonstrirt werden kann, wie es doch bei einem derartigen Beispiele wünschenswerth erscheint.

Bereich, welcher den Punkt $x=0$ auf der Begrenzung enthält einschliesslich dieser Begrenzung, sofern nur keine weitere Stelle der Strecke $\overline{0(-1)}$ im Innern oder auf der Begrenzung jenes Bereiches liegt. Denn in der That wird für alle solchen Werthe x der absolute Betrag von $\frac{1}{a^{-\nu}+x}$ eine Grösse von der Form $\lambda\cdot a^{\nu}$ (wo λ endlich) nicht übersteigen, woraus dann ohne Weiteres die gleichmässige Convergenz der Reihe in dem behaupteten Umfange resultirt.

Das gleiche gilt von jeder Reihe, die sich durch n malige Differentiation aus der obigen ergiebt, sodass also auch:

$$(7) \qquad f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{(a^{-\nu}+x)^{n+1}}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt aber für $x=0$:

$$(8) \begin{cases} f(0)=\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}a^{\nu}=e^{a} \\ f^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot n!\sum \frac{1}{\nu!}a^{\nu(n+1)}=(-1)^n\cdot n!\,e^{a^{n+1}} \end{cases}$$

also für hinlänglich grosse Werthe von n sicher:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}>(e^{n})^{n}$$

woraus auf Grund der oben aufgestellten Bedingung (4) sofort erkannt wird, dass die Reihe $\sum\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^{\nu}$ für jedes noch so kleine x divergirt, obschon $f(x)$ für $x=0$ mit sämmtlichen Ableitungen von jeder endlichen Ordnung endlich und ausser in der Richtung der negativen reellen Axe auch durchweg stetig ist.

Man bemerkt, dass bei der eben betrachteten Reihe die auf der negativen reellen Axe gelegenen Punkte $-a^{0}$, $-a^{-1}$,

$-a^{-2}\cdots$, welche die Häufungs-Stelle 0 haben, singuläre tellen für die einzelnen Glieder sind. Verlegt man diese tellen in die negative oder positive imaginäre Axe, indem an in (6) $a^{-\nu}$ durch $\pm a^{-\nu}i$ ersetzt, so kann man durch ereinigung der conjugirten Glieder auch eine Function mit ırchweg reellen Coefficienten herstellen, welche mit allen bleitungen in der Umgebung der Nullstelle auf der reellen xe vorwärts und rückwärts stetig ist, und für welche e Mac Laurin'sche Reihe dennoch divergirt. Man erhält ıf diese Weise:

$$(9)\qquad f(x) = \frac{i}{2}\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{\nu!}\left\{\frac{1}{a^{-\nu}i+x} + \frac{1}{a^{-\nu}i-x}\right\} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{\nu!}\frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu}+x^2}$$

so:

$$(10)\quad f^{(n)}(x) = \frac{i}{2}\,n!\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{\nu!}\left\{\frac{(-1)^n}{(a^{-\nu}i+x)^{n+1}} + \frac{1}{(a^{-\nu}i-x)^{n+1}}\right\} = (-1)^n\cdot n!\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{\nu!}\frac{g_n(x)}{(a^{-2\nu}+x^2)^{n+1}}$$

o:

$$g_n(x) = \frac{1}{2i}\left\{(x+a^{-\nu}i)^{n+1} - (x-a^{-\nu}i)^{n+1}\right\}$$

Da hier:

$$(11)\quad |f^{(2m-1)}(0)| = 0 \qquad |f^{(2m)}(0)| = (2m)!\,(-1)^m e^{a^{2m+1}}$$

erkennt man wiederum ganz direct (also ohne irgendwie ınctionentheoretische Gesichtspunkte zu Hülfe zu nehmen) ıss die Mac Laurin'sche Reihe für jedes noch so kleine x vergirt, und es dürfte daher dieses Beispiel insbesondere eeignet sein, auch im Rahmen einer gewöhnlichen Vorlesung ber Differential-Rechnung die Möglichkeit dieses Vorkomm-ısses zu illustriren.

Was nun die zweite der oben erwähnten Eventualitäten betrifft, dass nämlich die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ zwar convergiren, aber ihre Summe von $f(x)$ verschieden sein könne, so scheint man, soviel ich weiss, bis zum heutigen Tage nicht über das von Cauchy a. a. O. gegebene Beispiel:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

nicht hinausgekommen zu sein. Indessen fehlt demselben aus zwei Gründen die rechte Beweiskraft: einmal (was auch Du Bois Reymond in dem citirten Aufsatze ausdrücklich hervorhebt), weil hier $f(0)$ und $f^{(n)}(0)$ nicht „eigentlich" definirt sind, d. h. nicht durch directes Einsetzen von $x = 0$ aus einer der Definitionen:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}\frac{1}{x^{2\nu}} \quad \text{oder:} \quad e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!}\frac{1}{x^{2\nu}}\right)^{-1}$$

berechnet werden können, sondern lediglich als $\lim f(\pm \varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ eine feste Bedeutung gewinnen;[1]) zweitens aber nach meinem Dafürhalten auch deshalb, weil das so definirte $f(0)$ mit allen Ableitungen den besonderen Werth Null hat, sodass von einer convergirenden Mac Laurin'schen Reihe auch wiederum nur cum grano salis die Rede sein kann, da dieselbe formal eigentlich gar nicht existirt — ein Mangel, der durch Einführung einer Function von der Form $f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ (wo $\varphi(x)$ entwickelbar) zwar verdeckt, aber in seinem Wesen doch nicht gehoben wird.

Man erhält nun aber völlig einwandfreie Beispiele dieser Art, wenn man in den oben betrachteten Reihen (6) und (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ ersetzt. Auf diese Weise entsteht aus (6):

---

1) Dieser Einwand wird auch durch das Raisonnement des Herrn Hermite (Cours d'Analyse, T. I. p. 203) nicht entkräftet.

$$(12)\quad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{a^{-\nu} + x} \quad \text{also: } f(0) = e^{-a}$$

woraus:

$$(13)\quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \sum_0^\infty {}^\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{(a^{-\nu} + x)^{n+1}}$$

$$\text{also: } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n e^{-a^{n+1}} = (-1)^n \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{n+1}}$$

Hier erkennt man aber, dass die Reihe:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{\nu+1}} x^\nu$$

geradezu beständig convergirt. Dass sie aber nicht mit $f(x)$ übereinstimmen kann, geht daraus hervor, dass $f(x)$ wegen der in unmittelbarer Nachbarschaft der Nullstelle sich häufenden singulären Stellen $x = -a^{-\nu}$ für keine noch so kleine Umgebung der Nullstelle nach Potenzen von x entwickelt werden kann (wie sich mit aller Strenge aus den Betrachtungen des folgenden Paragraphen ergiebt).

Will man statt der eben betrachteten Function, welche bei reell veränderlichen x an der Stelle $x = 0$ mit sämmtlichen Differentialquotienten nur vorwärts stetig ist, wiederum eine solche construiren, für welche das Gleiche sowohl vorwärts als rückwärts stattfindet, so braucht man nur in (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ zu ersetzen. Alsdann ergiebt sich:

$$(14)\quad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu} + x^2} \quad \text{also: } f(0) = e^{-a}$$

und daraus:

$$(15)\quad f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad f^{(2m)}(0) = (2m)!\,(-1)^m \cdot e^{-a^{2m+1}}$$

Die Mac Laurin'sche Reihe würde auch hier wiederum beständig convergiren, stellt aber nicht die Function $f(x)$ dar. Bezeichnet man ihre Summe mit $S(x)$, sodass also:

$$(16) \qquad S(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu+1}} \cdot x^{2\nu}$$

so stimmt $S(x)$, $S^{(n)}(x)$ nur für $x = 0$ mit $f(x)$, $f^{(n)}(x)$ überein. Bildet man daher:

$$(17) \qquad F(x) = f(x) - S(x)$$

$$= \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \left\{ \frac{1}{\nu!} \frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu} + x^2} - \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu+1}} \cdot x^{2\nu} \right\}$$

so liefert dieselbe ein Beispiel — und, wie ich glaube, das erste bekannte Beispiel — einer Function, welche für alle endlichen reellen x incl. $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen endlich und stetig und auch noch für $x = 0$ eigentlich definirt ist, dabei aber (gleichwie die für $x = 0$ nicht eigentlich definirte Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$) die Eigenschaft besitzt, in beliebiger Nähe der Nullstelle nicht zu verschwinden, obschon sie für $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet. Damit erscheint aber die von Lagrange im 5. Capitel seiner Théorie des Fonctions[1]) geäusserte Ansicht, dass eine stetige Function, welche für irgend einen Werth der Variablen mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet, identisch verschwinden müsse, nunmehr endgültig widerlegt.

§ 2.

Der allgemeine Typus der im vorigen Paragraphen betrachteten Reihen lautet offenbar:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$

---

1) Oeuvres complètes, T. IX, p. 68.

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots$ eine abzählbare Punktmenge bedeutet,[1]) welche (mindestens) einen nicht zur Menge gehörigen Grenzpunkt α besitzt: gerade dadurch, dass die Stelle $x = \alpha$ für kein einzelnes Glied der $f(x)$ definirenden Reihe eine sinläre ist, entsteht an der Stelle $x = \alpha$ für $f(x)$ jene besondere Singularität, welche $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ endlich und nach allen Richtungen stetig sein lässt, in denen nicht unendlich viele Punkte der Menge (α_ν) liegen. Es fragt sich aber, ob auch wirklich in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ sein muss. Dies ist nämlich keineswegs selbstverständlich: denn wenn auch in jeder noch so kleinen Umgebung von α unendlich viele Punkte α_ν liegen, welche für je ein Glied der obigen Reihe singuläre Stellen sind, so wäre es gerade wegen der Unbegrenztheit ihrer Anzahl möglich, dass sie sich zusammengenommen in ihrer Wirkung annulliren.[2])

1) Ich bemerke, dass die folgenden Betrachtungen auch Gültigkeit behalten für Reihen von der etwas allgemeinen Form:

$$\sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{m_\nu}}$$

wo die m_ν auch negativ gebrochene oder beliebige rationale positive Zahlen bedeuten.

2) Gerade in dieser Hinsicht enthält der oben erwähnte Versuch von Du Bois Reymond, durch Condensation eine Function der fraglichen Art herzustellen eine Beweislücke. Es wird nämlich eigentlich nur gezeigt, dass man eine Function bilden kann, welche die betreffende Singularität in einer beliebig grossen endlichen Anzahl (n) von Punkten eines gewissen Intervalles besitzt, und dass die Function auch noch für $n = \infty$ einen bestimmten Sinn behält. Alsdann aber heisst es (a. a. O. p. 617): „Es wäre freilich noch direct zu zeigen, dass die (bei dem eben erwähnten Grenzübergange resultirende) Function $F(x)$ nicht entwickelbar ist, doch wollen wir hier diese Rechnung nicht anstellen.“ — Ich halte es für sehr zweifelhaft, ob sich das hier überhaupt auf dem Wege blosser Rechnung erweisen lässt.

Es sei nun irgend ein einfach zusammenhängendes von einer Curve C begrenztes Flächenstück gegeben, welches keinen Punkt der abzählbaren Menge (a_ν) im Innern oder auf der Begrenzung enthält, während auf der letzteren der eine Grenzpunkt a (aber kein weiterer, falls solche vorhanden) sich befinden soll. Ist dann $\Sigma |c_\nu|$ convergent, so stellt nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass die obige Reihe eine innerhalb C reguläre analytische Function dar. Dies gilt aber auch noch für jeden Punkt x' auf der Curve C — mit eventueller Ausnahme des einen Punktes a. Denn da nach Voraussetzung x' weder der Menge (a_ν) angehören, noch ein Grenzpunkt derselben sein kann, so existiert stets eine gewisse Umgebung von x', innerhalb deren kein Punkt der Menge (a_ν) liegt, sodass also $f(x)$ für diese Umgebung wiederum regulär bleibt.

Um nun das Verhalten von $f(x)$ für die Stelle $x = a$ zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass allemal, wenn man der Punkt a durch einen der Menge selbst angehörigen [illegible] a_ν [illegible] dieser sicher eine singuläre [illegible] gleichgültig, ob a_ν ein Grenz[illegible] Menge [illegible]. Man erkennt dies, wie [illegible] ordnen man die obige Reihe [illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] $\sum$ [illegible] < 1 wird.

[illegible] möglich ist.

[illegible]

Alsdann ist $f_2(x)$ regulär für eine gewisse Umgebung der Stelle α_0, während $f_1(x)$ in α_0 eine singuläre Stelle besitzt, welche durch $f_3(x)$, wie mit Hülfe der Bedingung:

$\sum_{n+1}^{r} |c_\nu| = \vartheta \cdot c_0$ leicht zu ersehen ist, nicht annullirt werden kann.

Tritt sodann an die Stelle des einen Punktes α_0 eine unendliche Anzahl solcher Punkte, welche auf der Curve C oder irgendwelchen Bögen derselben überall dicht liegen, so lässt sich weiter folgern, dass jeder solche Bogen eine singuläre Linie für $f(x)$ sein muss, sodass also für keinen Punkt α' eines solchen Bogens eine Reihe $\mathfrak{P}(x-\alpha')$ existirt, welche innerhalb C mit $f(x)$ übereinstimmt.

Die obige Schlussweise beruht nun aber wesentlich darauf, dass der Term $\frac{c_0}{x-\alpha_0}$ wirklich in $f(x)$ vorkommt, während in dem hier zu betrachtenden Falle die Existenz eines Gliedes von der Form $\frac{c}{x-\alpha}$ gerade ausgeschlossen ist, da ja α der Menge der α_ν nicht angehören sollte.

Es lässt sich indessen zeigen, dass auch in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ ist, sofern man nur die Menge (α_ν) der einzigen Beschränkung unterwirft, dass in jeder Nähe von α solche α_ν vorhanden sind, die höchstens in Linien (aber nicht in Flächentheilen) oder überhaupt nicht überall dicht liegen.[1])

Angenommen nämlich $f(x)$ wäre für die Stelle α regulär, so müsste das Gleiche für alle Stellen innerhalb eines

1) Damit ist nicht ausgeschlossen, dass ein Theil der Menge (α_ν) in der Nähe von α auch in Flächentheilen überall dicht liegt. Der Beweis behält sogar noch seine Gültigkeit, wenn die Menge (α_ν) in der Nähe von α ausschliesslich aus Punkten besteht, welche in Flächentheilen überall dicht liegen, sofern nur irgendwo auf der Begrenzung derselben in jeder Nähe von α stets auch Punkte α_ν (nicht bloss Grenzpunkte) liegen.

gewissen um a zu beschreibenden Kreises der Fall sein. Dies ist aber in Folge der über die Vertheilung der a_ν gemachten Voraussetzung unmöglich, da nach dem angeführten Satze innerhalb jenes Kreises stets singuläre Punkte oder Linien von $f(x)$ liegen müssen.

Die Möglichkeit dieser Schlussweise bleibt aber unverändert bestehen, wenn an die Stelle des einen Grenzpunktes a eine beliebige Anzahl solcher Punkte tritt, die auch auf C oder irgend einem Bogen von C überall dicht liegen dürfen, sofern nur die Punkte a_ν in der Umgebung **jedes solchen** Punktes a der oben angegebenen Bedingung genügen, und es gilt somit der folgende Satz:

Befinden sich auf der geschlossenen Curve C beliebig viele Grenzpunkte a der durchweg ausserhalb des Bereiches (C) gelegenen Punktmenge (a_ν), so ist für die innerhalb (C) reguläre analytische Function:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{a_\nu - x} \qquad \left(\text{wo } \sum_0^\infty {}^\nu |c_\nu| \text{ convergent}\right)$$

jeder Punkt a ein singulärer Punkt und jeder Curvenbogen von C, auf dem Punkte a überall dicht liegen, eine singuläre Linie, sofern in beliebiger Nähe jedes Punktes a stets Punkte a_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien (nicht in Flächentheilen) überall dicht liegen.

Beispiele solcher Punktmengen sind:

$$a_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad a_{\mu,\nu} = p_\mu \varepsilon^\nu \quad \begin{pmatrix}\nu = 1, 2, 3 \ldots \\ \mu = 1, 2, 3 \ldots\end{pmatrix}$$

wo p_ν positiv und für jedes endliche $\nu > 1$, dagegen $\lim_{\nu=\infty} p_\nu = 1$ (z. B. $p_\nu = 1 + \frac{1}{\nu}$, $p_\nu = 1 + \frac{1}{2^\nu}$, $p_\nu = e^{\frac{1}{\nu}}$ etc.), während ε eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1,

aber keine Einheitswurzel sein soll, also $\varepsilon = e^{2s\pi i}$, wo s eine Irrationalzahl bedeutet. Die Punkte ε^{ν} ($\nu = 0, 1, 2 \cdots$ liegen dann auf dem Einheitskreise überall dicht, während die Punkte $\alpha_{\nu} = p_{\nu} \cdot \varepsilon^{\nu}$, $\alpha_{\mu,\nu} = p_{\mu} \cdot \varepsilon^{\nu}$ durchweg ausserhalb des Einheitskreises liegen, aber alle Punkte desselben zu Grenzpunkten haben. Dabei nähern sich mit wachsendem ν die Punkte $\alpha_{\nu} = p_{\nu} \cdot \varepsilon^{\nu}$ in spiralartiger Anordnung dem Einheitskreise und liegen nirgends (auch auf keiner Linie) überall dicht, während die Punkte $\alpha_{\mu,\nu} = p_{\mu} \cdot \varepsilon_{\nu}$ auf allen um den Nullpunkt concentrischen Kreisen mit den Radien p_{μ} ($\mu = 0, 1, 2 \cdots$), aber nicht in irgendwelchen Flächentheilen überall dicht liegen.

§ 3.

Auf Grund der im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtung sind wir nunmehr im Stande, Reihen zu construiren, welche im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches — etwa des Einheitskreises um den Nullpunkt — durchweg endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch in beliebig vielen, auch unendlich vielen auf dem Kreise überall dicht liegenden Punkten α nicht nach Potenzen von $(x-\alpha)$ entwickelbar sind, also in dem zuletzt genannten Falle eine analytische Fortsetzung über den Einheitskreis hinaus nicht zulassen.

Es seien also ausserhalb des Einheitskreises unendlich viele Punkte α_{ν} gegeben, welche auf der Peripherie desselben beliebig viele Grenzpunkte α besitzen sollen. Man hat alsdann für jedes endliche ν: $|\alpha_{\nu}| > 1$, während für $\nu = \infty$ entweder geradezu $\lim |\alpha_{\nu}| = 1$ ist oder wenigstens die untere Unbestimmtheitsgrenze von α_{ν} den Werth 1 haben muss (mit anderen Worten: es können die Punkte α_{ν} auch noch ausserhalb des Einheitskreises beliebig viele Grenzpunkte besitzen).

$$\sum_n^\infty {}^\lambda \lambda\cdot(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)\,|A_\lambda|$$

$$\ldots\cdot(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)\sum_0^\infty {}^\nu \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu|^{\lambda+1}}$$

$$\ldots_\nu\cdot\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^{n+1}\sum_0^\infty {}^\lambda (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^\lambda$$

$$= n!\sum_0^\infty {}^\nu \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^{n+1}}$$

Nun lassen sich aber die c_ν geradezu so fixiren, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m}$$

nicht nur für irgend ein bestimmtes (und dann eo ipso für jedes kleinere) m, sondern geradezu für jedes noch so grosse m (ohne obere Grenze) convergirt.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(4)\qquad \frac{1}{|\alpha_\nu|-1} = q_\nu \qquad \text{d. h. } |\alpha_\nu| = 1 + \frac{1}{q_\nu}$$

wo also q_ν wesentlich positiv und für $\nu=\infty$: $\lim q_\nu = \infty$ oder die obere Unbestimmtheitsgrenze von q_ν unendlich wird, so hat man identisch:

$$(5)\qquad \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m} = |c_\nu|\cdot q_\nu^m = |c_\nu\cdot r_\nu|\cdot\frac{q_\nu^m}{r_\nu}$$

und wenn daher r_ν positiv und so gewählt wird, dass für jedes noch so grosse:

$$(6)\qquad \lim_{\nu=\infty}\frac{q_\nu^m}{r_\nu} = \lim\frac{(e^m)^{lg\,q_\nu}}{r_\nu} = 0$$

wird — was z. B. für $\lim q_\nu = \infty$ stets der Fall ist, wenn man setzt:[1])

$$(7) \qquad r_\nu = b^{-q_\nu} \qquad (b < 1)$$

oder auch:

$$(8) \quad r_\nu = [lg\, q_\nu]! \quad \text{(wo } [x] \text{ die grösste in } x \text{ enthaltene ganze Zahl)}$$

so genügt es nach Gleichung (5) für den gewünschten Zweck in jedem Falle, wenn sodann:

$$(9) \qquad |c_\nu| \cdot r_\nu = |c'_\nu| \quad \text{also:} \quad c_\nu = \frac{c'_\nu}{r_\nu}$$

genommen wird, wo $|c^1_\nu|$ das Glied einer convergenten Reihe bedeutet. Wenn aber hierbei schon $\frac{q^m_\nu}{r_\nu}$ für jedes noch so grosse m das Glied einer convergenten Reihe bildet, was z. B. stets der Fall ist für $q_\nu \gtrsim \nu$ und $r_\nu = b^{-q_\nu}$, ebenso für $q_\nu \lesssim a^\nu$ $(a > 1)$ und $r_\nu = \nu!$), so reicht es schon hin, wenn man setzt:

$$(10) \qquad |c_\nu|\, r_\nu = 1 \quad \text{also:} \quad |c_\nu| = \frac{1}{r_\nu}$$

Hiernach ergiebt sich aber in Verbindung mit dem Satze des § 2 das folgende Resultat:

Besitzt die durchweg ausserhalb des Einheitskreises gelegene abzählbare Menge (α_ν) auf dem

1) Wäre nur die obere Unbestimmtheitsgrenze von $q_\nu = \infty$ so würde man der Forderung beispielsweise genügen können, indem man setzt:

$$r_\nu = b^{-\nu \cdot q_\nu}$$

oder:

$$r_\nu = \nu . [lg\, q_\nu]!$$

Einheitskreise beliebig viele Grenzpunkte, so lassen sich auf mannigfache Weise unendliche Reihen von Grössen c_ν stets so bestimmen, dass die Reihen:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \qquad f^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$$

nicht nur im Innern, sondern auch **auf der Peripherie** unbedingt und gleichmässig convergiren und in die eben daselbst unbedingt und gleichmässig convergirenden Potenzreihen:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty{}^\nu A_\lambda x^\lambda \\ f^{(n)}(x) &= \sum_n^\infty{}^\nu \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+)\cdot x^{\lambda-n} \end{aligned}\right\} \text{ wo: } A_\lambda = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden können.

Bedeutet dann α einen auf der Peripherie befindlichen Grenzpunkt der α_ν von solcher Beschaffenheit, dass in jeder Nähe von α stets Punkte α_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien, nicht aber in Flächentheilen, überall dicht liegen, so existirt keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ derart dass die Gleichung $f(x) = \mathfrak{P}(x-\alpha)$ besteht für Punkte in beliebiger Nähe von α, die im Innern oder auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Wenn also solche Punkte α auf der Peripherie überall dicht liegen (sodass schliesslich jeder Punkt der Peripherie als ein Grenzpunkt der Menge (α_ν) anzusehen ist), so existirt für $f(x)$ keine analytische Fortsetzung über die Peripherie des Einheitskreises hinaus, obschon $f(x)$ mit sämmt-

lichen Ableitungen jeder endlichen Ordnung dort noch endlich und stetig ist.

Der Vollständigheit halber sei hierzu noch bemerkt, dass der Convergenzbezirk der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$ in Folge der den Punkten α_ν auferlegten Beschränkung mit dem Einheitskreise noch nicht erschöpft sein wird, sondern je nach der Wahl der α_ν noch aus einem oder mehreren (eventuell auch unendlich vielen) Stücken ausserhalb des Einheitskreises bestehen muss. Alsdann stellt also auf Grund der von Herrn Weierstrass gegebenen Begriffsbestimmung der analytische Ausdruck $\sum \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$ in verschiedenen Gebieten verschiedene analytische Function dar.

Um mit Hülfe des oben ausgesprochenen allgemeinen Satzes bestimmte Beispiele von Functionen zu construiren, die trotz der Endlichkeit der Ableitungen über den Einheitskreis nicht fortgesetzt werden können, mögen etwa die am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführten Punktmengen benützt werden. Sei also:

$$\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad (\text{wo } \varepsilon = e^{2s\pi i},\ s \text{ eine Irrationalzahl})$$
$$p_\nu > 1,\ \lim p_\nu = 1$$

so kann man setzen:

$$f(x) = \sum_1^\infty {}_\nu \frac{b^{\frac{1}{p_\nu - 1}}}{p_\nu \varepsilon^\nu - x} \qquad (b < 1)$$

Setzt man speciell:

$$p_\nu = 1 + \tfrac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3 \cdots)$$

so wird:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\varepsilon^\nu}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\varepsilon^\nu - x} = \sum_0^\infty{}_\lambda A_\lambda x^\lambda$$

$$\text{wo } A_\lambda = \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{\nu}{\varepsilon^\nu(\nu+1)}\right)^{\lambda+1} \varepsilon^\nu$$

Nimmt man $p_\nu = e^{\frac{1}{\nu}}$, also $\frac{1}{p_\nu - 1} < \nu$, so ergiebt sich, wenn man für ε seinen Werth einsetzt:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\varepsilon^\nu}{e^{\frac{1}{\nu}+2\nu\pi\vartheta i} - x} = \sum_0^\infty{}_\lambda A_\lambda x^\lambda$$

$$\text{wo } A_\lambda = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\varepsilon^\nu}{e^{\left(\frac{1}{\nu}+2\nu\pi\vartheta i\right)(\lambda+1)}}$$

Diese Reihen convergiren dann auch noch gleichmässig für das ganze Gebiet ausserhalb des Einheitskreises mit Ausschluss der unmittelbaren Umgebung der Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \varepsilon^\nu$, welche ausserhalb des Einheitskreises keine weiteren Grenzpunkte besitzen. Zwischen den Werthen der Reihen $f(x)$ im Innern und ausserhalb des Einheitskreises existirt jedoch kein „analytischer" Zusammenhang.

Es werde ferner gesetzt:

$$\alpha_{\lambda,\nu} = p_\lambda \varepsilon^\nu$$

wo etwa wiederum $p_\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda}$ oder $p_\lambda = e^{\frac{1}{\lambda}}$ $(\lambda = 1, 2, 3 \ldots)$ und ε gleichfalls die frühere Bedeutung hat. Bildet man alsdann:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}_\lambda \sum_1^\infty{}_\nu \frac{c_{\lambda,\nu}}{p_\lambda \varepsilon^\nu - x}$$

so erkennt man leicht, dass die gleichmässige Convergenz von $f(x)$ und $f^{(m)}(x)$ auf der Peripherie wiederum erhalten bleibt, wenn man etwa setzt:

$$c_{\mu,\nu} = b^{\mu+\nu}$$

Alsdann ergiebt sich:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^\mu \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^{\mu+\nu}}{p_\mu \varepsilon^\nu - x} = \sum_0^\infty{}^\lambda A_\lambda x^\lambda$$

wo:

$$A_\lambda = \sum_1^\infty{}^\mu \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^{\mu+\nu}}{(p_\mu \varepsilon^\nu)^{\lambda+1}} = \sum_1^\infty{}^\mu \frac{b^\mu}{p_\mu^{\lambda+1}} \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^\nu}{\varepsilon^{(\lambda+1)\nu}}$$

$$= \frac{b}{\varepsilon^{\lambda+1} - b} \sum_1^\infty{}^\mu \frac{b^\mu}{p_\mu^{\lambda+1}}$$

Der Convergenz-Bereich von $f(x)$ besteht hier — abgesehen von dem Innern des Einheitskreises — aus dem ganzen Ebenenstücke ausserhalb des Kreises mit dem Radius p_1 (wobei für die oben getroffene specielle Wahl $p_1 = 2$ bez. $p_1 = e$ ist), sodann aus unendlich vielen concentrischen Ringen, welche begrenzt werden von Kreisen mit den Radien p_μ und $p_{\mu+1}$ ($\mu = 1, 2, 3 \cdots$). Auf allen diesen Kreisen liegen die Punkte $\alpha_{\mu,\nu}$ überall dicht, sodass also die Reihe $f(x)$ in diesen sämmtlichen Stücken ihres Convergenzbereiches lauter verschiedene analytische Functionen darstellt. Jedoch besitzt sie nur auf dem Einheitskreise die Eigenschaft mit allen Ableitungen endlicher Ordnung endlich und stetig zu sein, während sie auf den sämmtlichen übrigen Begrenzungen divergirt.

Will man Functionen construiren, welche in der einen Halbebene — z. B. der oberen — einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen stetig und dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind, so braucht man nur das Innere des Einheitskreises mit Hülfe der Substitution:

$$x = \frac{z - i}{z + i}$$

auf die obere z-Halbebene abzubilden.

§ 4.

Ich gehe nun dazu über, einen weiteren Typus von Reihen anzugeben, welche auf der Grenze eines gewissen Bereiches noch mit allen Ableitungen endlich und stetig, dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind. Obschon dieselben mit den Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen nicht in unmittelbarem Zusammenhange stehen, so liefern sie doch eine sehr brauchbare Illustration zu den im § 1 entwickelten Principien, indem sie bei ausserordentlicher formaler Einfachheit auf dem Wege ganz elementarer Rechnung deutlich erkennen lassen, warum die Entwickelbarkeit auf jener Grenzlinie vollständig aufhört: nämlich, weil die Ableitungen n^{ter} Ordnung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen mit n so stark zunehmen, dass die Taylor'sche Reihe nicht mehr convergirt.

Es werde gesetzt:

$$(1) \qquad \psi(t) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu ti} = \sum_0^\infty{}^\nu u_\nu$$

wo a eine positive ganze Zahl > 2, $t = \tau_1 + \tau_2 i$ eine complexe Variable bedeutet. Um den Convergenzbereich dieser Reihe zu erkennen, hat man:

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{a^\nu (a-1) ti}$$
$$= \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{-a^\nu (a-1) . \tau_2} . e^{a^\nu (a-1) \tau_1 i}$$

und daher für $\nu = \infty$:

$$\lim \left| \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \right| = \lim \frac{e^{-a^\nu (a-1) . \tau_2}}{\nu+1} \begin{cases} = 0, \text{ wenn } \tau_2 > 0 \\ = \infty, \text{ wenn } \tau_2 < 0 \end{cases}$$

d. h. die Reihe convergirt absolut für alle t mit nicht-negativem imaginärem Bestandtheil, also innerhalb der oberen

Halbebene einschliesslich der reellen Axe. Das Gleiche gilt auch für sämmtliche Ableitungen von $\psi(t)$. Man hat nämlich:

$$\text{(2)} \qquad \psi^{(n)}(t) = i^n \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu t i}$$

und daher insbesondere für reelle t:

$$\sum_0^\infty {}^{\nu} \left| \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu t i} \right| = \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} = e^{a^n}$$

sodass also die Reihe für $\psi^{(n)}(t)$ auch auf der ganzen reellen Axe absosut convergirt. Es stellt hiernach $\psi(t)$ für die obere Halbebene eine analytische Function von t dar, welche noch auf der Grenze dieses Bereiches, nämlich der reellen Axe, mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Nichtsdestoweniger lässt sich leicht zeigen, dass $\psi(t)$ über diesen Bereich nicht analytisch fortgesetzt werden kann.

Setzt man zunächst in (2) $t = 2\varkappa\pi$ $(\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$, so folgt:

$$|\psi^{(n)}(2\varkappa\pi)| = e^{a^n}$$

und ebenso für $t = (2\varkappa + 1)\pi$:

$$|\psi^{(n)}((2\varkappa + 1)\pi)| = e^{a^n} \text{ bezw. } = e^{a^n} - 2 \text{ (ersteres, wenn } a \text{ ungerade, letzteres, wenn } a \text{ gerade).}$$

Daraus erkennt man aber zunächst, dass die Taylor'sche Reihe für sämmtliche Stellen $t = \mu\pi$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ divergirt (cf. § 1, Gl. (5)).

Das Gleiche findet nun aber statt für alle Stellen $t = \frac{\mu\pi}{a^p}$, wenn p eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Setzt man nämlich $\psi^{(n)}(t)$ in die Form:

$$\psi^{(n)}(t) = i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_p^{\infty} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i}$$

$$= i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_0^{\infty} {}_\nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} e^{a^{p+\nu} t i}$$

so ergiebt sich zunächst für $t = \frac{2\varkappa\pi}{a^p}$ $(\varkappa = \pm 1, \pm 2 \cdots)$:

$$(3) \quad \psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) = i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^{\nu-p} \cdot 2\varkappa\pi i} + i^n \cdot \sum_0^{\infty} {}_\nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!}$$

$$= i^n \left\{ C_{p,n} + e^{a^n} \right\}$$

wo:

$$C_{p,n} = \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} \left\{ e^{a^{\nu-p} \cdot 2\varkappa\pi i} - 1 \right\}$$

Nun ist aber:

$$(4) \quad | C_{p,n} | < 2 \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu a^{n\nu} < 2 \cdot \frac{a^{pn} - 1}{a - 1} < 2 \cdot a^{pn}$$

folglich wird, wie gross man auch p annehmen mag, n stets so gross genommen werden können, dass der in (3) vorkommende Term e^{a^n} beliebig viel grösser ist als $| C_{p,n} |$: dies gilt selbst dann noch, wenn man p über alle Grenzen wachsen lässt, sobald man nur $n > p$ nimmt. Somit folgt aus (3) und (4), dass für unendlich wachsende n

$$(5) \qquad \psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) \sim e^{a^n}$$

wird, und das Nämliche ergiebt sich auf analoge Weise auch für $\psi^{(n)}\left(\frac{(2\varkappa+1)\pi}{a^p}\right)$. In Folge dessen muss aber die Taylor'sche Reihe für $\psi(t)$ an allen Stellen $t = \frac{m\pi}{a^p}$ divergiren.

wie gross man auch p nehmen mag, und da diese Stellen auf der reellen Axe überall dicht liegen, so ergiebt sich in der That, dass $\psi(t)$ für keinen einzigen reellen Werth t_0 nach Potenzen von $t - t_0$ entwickelt werden kann.

Die Reihe (1) ist aber auch noch in einer weiteren Beziehung lehrreich, insofern man daran erkennen kann, dass auch die zweite der beiden in § 1 erörterten Möglichkeiten, nämlich die Convergenz der Taylor'schen Reihe

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t - t_0)^\nu$$

aber ohne die Gültigkeit der Beziehung

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t - t_0)^\nu = \psi(t)$$

geradezu in unendlich vielen Punkten jedes noch so kleinen Intervalles stattfinden kann.

Angenommen nämlich, es sei jetzt speciell a eine ungerade Zahl von der Form $4k + 3$ $(k = 0, 1, 2 \cdots)$. Alsdann bemerke man zunächst, dass alle ungeraden Potenzen von a gleichfalls von der Form $4k + 3$, dagegen alle geraden von der Form $4k + 1$ sind, sodass also:

$$e^{\frac{1}{2}a^{2\nu-1}\pi i} = -i \qquad e^{\frac{1}{2}a^{2\nu}\pi i} = +i$$

wird. Setzt man daher in (2) $t = (m + \frac{1}{2})\pi$, so ergiebt sich:

$$\psi^{(n)}((m + \tfrac{1}{2})\pi) = i^n \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{ma^\nu \pi i} \cdot e^{\frac{1}{2}a^\nu \cdot \pi i}$$

$$= (-1)^m \cdot i^{n+1} \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{a^{n\nu}}{\nu!}$$

also:

$$(6) \qquad |\psi^{(n)}((m + \tfrac{1}{2})\pi)| = e^{-a^n}$$

sodass die Taylor'sche Reihe zunächst an allen Stellen $t_0 = (m + \frac{1}{2})\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ für jedes noch so grosse $(t - t_0)$ convergirt.

Man findet nun aber ganz analog wie oben Gl. (3), dass

$$(7) \qquad \left| \psi^{(n)}\left(\frac{m+\frac{1}{2}}{a^p}\pi\right) \right| \leq C'_{p,n} + e^{-a^n}$$

wo:

$$(8) \qquad C'_{p,n} < a^{pn}$$

und da, wie gross man auch p nehmen möge, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $\frac{1}{n!}\left\{a^{pn} + e^{-a^n}\right\} r^n$ für jedes noch so grosse r convergirt, so folgt, dass die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu$ für alle Stellen $t_0 = \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{a^p}$ d. h. schliesslich für unendlich viele, überall dicht liegende Punkte der reellen Axe convergirt und zwar sogar beständig convergirt. Da aber in beliebiger Nähe jeder solchen Stelle andere liegen, für welche nach dem zuvor gesagten die Taylor'sche Reihe divergirt, so kann sie nicht die Summe $\psi(t)$ haben.

Hieran knüpft sich naturgemäss die Frage, ob es denkbar wäre, dass die Taylor'sche Reihe für alle Stellen eines gewissen Intervalles convergirte oder genauer gesagt, ein Convergenz-Intervall besitzt, dessen Ausdehnung unter eine bestimmte angebbare Grösse nicht herabsinkt, und dass ihre Summe nichtsdestoweniger mit der erzeugenden Function nicht übereinstimmte?

Diese Frage ist aber zu verneinen. Angenommen nämlich, es convergire die Reihe:

$$\sum_0^\infty \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} \cdot r^\nu$$

für $t_0 < t < t_1$ und $r < r_1$, so hat man sicher für alle Werthepaare (t, r) aus dem angegebenen Bereiche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t)}{n!} r^n = 0$$

und daher insbesondere, wenn ϱ die kleinere der beiden Grössen $(t_1 - t_0)$ und r_1 bezeichnet:

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t_0 + \vartheta\varrho)}{n!} \cdot \varrho^n = 0 \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

Nun gilt aber mit Benützung der Lagrange'schen Restform die Entwickelung:

$$(10) \qquad \psi(t_0 + h) = \sum_0^{n-1} {}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu + \frac{\psi^{(n)}(t_0 + \vartheta h)}{n!} h^n$$

und man erkennt aus Gl. (9), dass dieses Restglied für $h \leqq \varrho$ mit unendlich wachsenden n verschwindet, sodass also in der That die Beziehung gilt:

$$(11) \qquad \psi(t_0 + h) = \sum_0^{\infty} {}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu \quad \text{für } h \leqq \varrho.$$

Damit ist also bewiesen, dass die Taylor'sche Reihe nicht für alle Stellen eines beliebigen kleinen Intervalles einen Convergenzbereich von angebbarer Grösse besitzen kann, ohne dort auch die betreffende Function darzustellen. Mithin gilt der Satz:

> Wenn die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu$ für irgend einen bestimmten Werth t_0 der reellen Variablen t und für $h \leqq \varrho$ convergirt, ohne die Summe $\psi(t_0 + h)$ zu besitzen, so müssen entweder in jeder beliebigen Nähe von t_0 Stellen t' existiren, sodass $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t')}{\nu!} h^\nu$ für jedes noch so kleine h divergirt, oder es muss zum mindesten die untere Grenze für die Convergenzradien aller möglichen Reihen: $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu$ für Werthe t in der Nähe von t_0 den Werth Null haben.[1])

1) Da der Convergenzradius von $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu$ in dem vorliegen-

Der Satz gilt offenbar auch für den Fall einer complexen Variablen t. Denn man kann die Gesammtheit der Stellen, welche auf irgend einer im Punkte t_0 beginnenden geradlinigen Strecke liegen, durch eine ganze lineare Substitution auf ein Stück der reellen Axe congruent abbilden und sodann wieder die oben benützte Schlussweise anwenden.

Bei dem oben betrachteten Beispiel:

$$(1) \qquad \psi(t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu t i}$$

tritt also — wenn $a = 4k + 3$ — thatsächlich der Fall ein, dass in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen liegen, für welche der Convergenz-Radius der Taylor'schen Reihe unendlich gross ist (nämlich für $t = \frac{(m + \frac{1}{2})\pi}{a^\mu}$), und ebenfalls solche, für welche dieselbe gleich Null ist (nämlich für $t = \frac{m\pi}{a^\mu}$).

Ersetzt man in (1) t durch $(-t)$, so wird die Reihe:

$$(12) \qquad \psi(-t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} e^{-a^\nu t i}$$

eine analytische Function darstellen, welche nur für die untere Halbebene einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen existirt, und es ergeben sich durch Addition und Subtraction von $\psi(t)$ und $\psi(-t)$ (wobei, wie man leicht erkennt, die fraglichen Singularitäten sich nicht etwa herausheben können), die Reihen:

$$(13) \qquad \psi_1(t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\cos a^\nu t}{\nu!} \qquad \psi_2(t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\sin a^\nu t}{\nu!}$$

---

den Falle offenbar eine unstetige Function von t ist, so brauchte in der That keine bestimmte Stelle t' zu existiren, wo derselbe wirklich $= 0$ wird.

als Beispiele von Functionen, welche für alle reellen t mit sämmtlichen Ableitungen jeder noch so grossen endlichen Ordnung endlich und stetig sind, und dennoch nicht in das complexe Gebiet der Variablen t fortgesetzt werden können.

Setzt man schliesslich in (1) noch $e^{ti} = x$, so folgt, dass die Function:

$$(14) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} x^{a^{\nu}}$$

nicht über den Einheitskreis hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, obschon sie noch auf der Peripherie derselben mit allen Anleitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Der allgemeine Typus derartiger Reihen lautet offenbar:

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} c_{\nu} \cdot x^{m_{\nu}}$$

wo die m_{ν} positive ganze Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass der grösste gemeinsame Theiler von m_{ν}, $m_{\nu+1}$, $m_{\nu+2}$, ... mit ν selbst in's Unendliche wächst, während die Coefficienten c_{ν} so beschaffen sein müssen, dass die Reihe:

$$\sum {}^{\nu} c_{\nu} m_{\nu}^{n} = S_{n}$$

für jedes endliche n zwar convergirt, aber ihre Summe mit n so stark zunimmt, dass:

$$\sum {}^{n} \frac{S_{n}}{n!} \varrho^{n}$$

für jeden noch so kteinen Werth ϱ divergirt.

Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

Von A. Voss in Würzburg.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Die Gruppe der Formeln, durch welche seit Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas die Eigenschaften einer krummen Fläche dargestellt werden, erhalten ihr eigenthümliches Gepräge durch die Art und Weise, wie dieselben auf die bei der Biegung unveränderlichen Coefficienten des Längenelementes bezogen sind. Man scheint aber bisher weniger darauf geachtet zu haben, dass in diesen Formeln nur in analytischer Weise die bei der Biegung unveränderlichen Elemente eingeführt sind, während gerade in geometrischer Hinsicht die Einführung von Biegungsinvarianten rein geometrischen Characters in den Vordergrund zu treten hat, wenn man den Gedankengang, der Gauss geleitet zu haben scheint, verfolgt.

Es ist die Absicht der folgenden Bemerkungen, die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie so darzustellen, dass, soweit wie überhaupt möglich, nur geometrische Biegungsinvarianten[1]) in denselben auftreten, insbesondere auch in allgemeinster Weise das Krümmungsmaass als Function solcher auszudrücken.

---

1) Ueber die Unterscheidung zwischen analytischen und geometrischen Biegungsinvarianten vergl. unten Nr. 4.

Die Form, welche die allgemeinen Gleichungen der Flächentheorie in Folge dessen annehmen, steht zwar in naher Beziehung zu den von Aoust und Codazzi[1]) eingeführten Gleichungen, durch welche eine gerade für die Anwendungen sehr wichtige geometrische Interpretation derselben erreicht wird, unterscheidet sich aber eben durch den vorhin angeführten principiellen Gesichtspunkt von denselben.

In Beziehung auf orthogonale Curvensysteme auf einer Oberfläche hat übrigens neuerdings Herr Knoblauch[2]) in einer Arbeit, deren Tendenz sich, soweit sie das Krümmungsmaass betrifft, mit der vorliegenden berührt, an die Bonnet'sche Formel erinnert, welche das Krümmungsmaass durch die geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien ausdrückt.

Nr. 1. Bezeichnet man mit e, f, g die Coefficienten des Längenelementes auf einer Fläche, so ist nach Gauss das Krümmungsmaass K nur abhängig von den Grössen e, f, g, den ersten Differentialquotienten derselben nach den unabhängigen Parametern u, v und den zweiten Differentialquotienten e_{vv}, f_{uv}, g_{uu}. Aus dieser analytischen Thatsache folgt für zwei isometrisch[3]) auf einander bezogene Flächen die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses.

---

1) Diese Formeln geben bekanntlich die Fundamentalgleichungen in einer für die Anwendungen ausserordentlich wichtigen Gestalt (vgl. namentlich das grundlegende Mémoire von Bonnet, Journal de l'École Polyt. Bd. 25 und 26, sowie die Théorie générale des surfaces von Ribaucour, Journ. v. Liouville Ser. IV, tom. 7), insofern nur geometrische Grössen, nämlich die normale und geodätische Krümmung, sowie die geodätische Torsion der Coordinatenlinien in denselben auftreten, entfernen sich aber eben durch die Einführung dieser grösstentheils nicht invarianten Elemente von der Beziehung auf das Längenelement.

2) Ueber die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen, Acta Mathematica Bd. 15 S. 249.

3) Der Kürze wegen nenne ich zwei auf einander abwickelbare Flächen isometrisch auf einander bezogen oder isometrisch.

Für diesen fundamentalen Satz der Flächentheorie giebt es nun eine Reihe verschiedener Darstellungen, welche denselben in mehr oder minder anschaulicher Weise durch geometrische Betrachtungen begründen, die sich auf invariante Elemente bei der Isometrie beziehen. Zu erwähnen ist hier zunächst die Gauss'sche Definition des Krümmungsmaasses als Grenzwerth des Quotienten des sphärischen Bildes eines Flächenstückes durch den Inhalt des letzteren selbst, welche, wie Minding[1]) gezeigt und auch Herr Sturm neuerdings wieder in Erinnerung gebracht hat,[2]) leicht so gefasst werden kann, dass die Invarianz von K dabei unmittelbar hervorgeht.

Auf eine andere Art hat Herr Natani das Krümmungsmaass mittelst eines Winkelexcesses durch den folgenden Satz[3]) ausgedrückt:

„Wird eine Fläche durch zwei Curvenschaaren in Vierecke und diese wieder durch eine dritte Curvenschaar in je zwei Dreiecke getheilt, so ist die Krümmung gleich dem Unterschied der um einen Schnittpunkt herumliegenden sechs Dreieckswinkel von 2π dividirt durch den Inhalt des anstossenden Viereckes."

Dieser Satz, welcher auf der Auffassung der Fläche als Grenze eines Polyeders mit dreiseitigen ebenen Flächen be-

---

Diese Ausdrucksweise dürfte sich auch dadurch rechtfertigen, dass es sich bei den meisten die Abwickelbarkeit der Flächen auf einander betreffenden Untersuchungen nicht um die wirkliche Ausführung der Abwickelung, die hinsichtlich ihres Umfanges jedesmal von der speciellen Natur der Gleichungen abhängt, handelt, sondern nur um die durch die Erhaltung der metrischen Verhältnisse bedingte Möglichkeit derselben.

1) Journal v. Crelle, Bd. 19.

2) Mathematische Annalen Bd. 21 S. 380—382.

3) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung von F. Joachimsthal, 2. Aufl. bearb. von L. Natani, 1881 S. 233.

ruht, bei dessen Deformation der Excess der Kantenwinkel an den Eckpunkten ungeändert bleibt, liefert eine mit dem geometrischen Character der Fläche im engsten Zusammenhang stehende Deutung für den Zähler des Krümmungsmaasses. Aehnliche Ueberlegungen finden sich indessen auch in Herrn Sturm's Note, in der auf Grund Steiner'scher Betrachtungen die Fläche als Grenze eines Polyeders aufgefasst und der Begriff der Ecken und Kantenkrümmung desselben eingeführt wird.

Nr. 2. Während bei diesen Untersuchungen allerdings die gehäufte Betrachtung infinitesimaler Beziehungen nicht wohl zu vermeiden ist, so namentlich in der Natani'schen Darstellung, der man wohl in mehrfacher Beziehung eine strengere Form wünschen möchte,[1]) bringen andere Formeln in analytischer Darstellung, aber in directer Beziehung auf geometrisch invariante Elemente, die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses zum Ausdruck.

So besteht nach Bertrand und Puiseux für den Excess E der Länge einer hinreichend kleinen geodätischen den Flächenpunkt umgebenden Kreislinie mit dem Radius s über die Peripherie einer ebenen Kreislinie mit demselben Radius, dividirt durch die $\frac{3}{2}$ Potenz des Inhaltes J jenes geodätischen Kreises die Formel

$$\lim \left(\frac{E}{J^{\frac{3}{2}}}\right)_{s=0} = -\frac{K}{3\sqrt{\pi}} \quad {}^{2})$$

welche K direct durch den Grenzwerth des Verhältnisses zweier bei der Biegung invarianter Grössen ausdrückt.

Nach Beltrami[3]) gilt für den Bogen ϱ einer von einem

1) Eine solche wurde mir übrigens unlängst durch Herrn Finsterwalder mitgetheilt.

2) Vgl. Monge, Applications, Ausg. v. Liouville, S. 583 u. f. Der Satz selbst ist dort freilich auf andere Art ausgedrückt.

3) Beltrami, Zur Theorie des Krümmungsmaasses, Math. Annalen Bd. I, S. 580. Die Beltrami'sche Darstellung von K durch

beliebigen Punkte der Fläche ausgehenden Linie die merkwürdige Formel

$$\lim \left[\Delta_2 \log \left(\frac{1}{\varrho} \right) \right]_{\varrho = 0} = \frac{K}{3}$$

welche K durch den an der geometrischen Invariante ϱ auszuführenden invarianten Differentialprocess Δ_2 ausdrückt.[1])

Nr. 3. Die flächentheoretischen Fundamentalgleichungen d. h. die Relationen zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung und die partiellen Differentialgleichungen der Fläche selbst, besitzen dagegen an und für sich keine Form, aus welcher sich ihr invarianter Character in geometrischer Hinsicht unmittelbar erkennen liesse. Denn die Coefficienten e, f, g des Längenelementes sind nur analytische Biegungsinvarianten, sie haben aber an und für sich keine geometrische Bedeutung, da sie von der Bestimmungsweise der Variabeln u, v selbst abhängig sind und sich ändern, sowie diese durch Functionen je einer neuen unabhängigen Variabeln u', v' ersetzt werden.

Allerdings haben die Gauss'schen Relationen zwischen den Fundamentalgrössen und die partiellen Differentialgleichungen der Fläche durch die Codazzi'schen Formeln, namentlich in der kinematischen Deutung, welche Herr

---

den integrirenden Factor der Differentialgleichung der Linien von der Länge Null kommt wegen ihres rein analytischen Characters hier nicht in Betracht.

1) Die Erörterungen in Nr. 1. und 2. beabsichtigen nicht, eine Darlegung aller auf das Krümmungsmaass bezüglichen geometrischen Betrachtungen zu geben. Mit Ausnahme der Puiseux'schen Formel, welche dasselbe als Grenzwerth eines von einer Variabeln abhängigen Quotienten darstellt, aber die Construction geodätischer Kreise erfordert, unterliegen alle dem Umstande, dass es sich um das Verhältniss zweier von zwei unabhängigen Variabeln abhängenden infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung handelt, welcher meines Erachtens die geometrische Anschaulichkeit beeinträchtigt.

Darboux[1]) ausführlich in seiner Théorie générale des surfaces dargelegt hat, eine sehr bemerkenswerthe Interpretation erfahren.

Herr Darboux denkt sich in Verbindung mit der Fläche ein rechtwinkeliges Raumcoordinatensystem — trièdre trirectangle — dessen z-Axe die Normale des Flächenpunktes ist, und dessen x-Axe in der Tangentenebene der Fläche einen Winkel m mit der Curve u bildet. Schreitet man auf der letzteren fort, so geht dasselbe in eine benachbarte Lage über. Ist nun $r\,du$ die Rotationscomponente um die z-Axe, welche, abgesehen von einer geeigneten Translation, in Verbindung mit zwei anderen analogen partiellen Rotationen $p\,du$, $q\,du$ um die Axen x und y jenes System aus der ursprünglichen Lage in die zweite überführt, und bezeichnet man mit $r'\,dv$ die dem Fortschreiten auf der Curve v entsprechende Rotationscomponente, so ergiebt sich für den Ausdruck

$$K \sin \alpha \sqrt{e g}$$

— unter α den Winkel der Coordinatenlinien u, v verstanden die elegante Formel[2])

$$K \sin \alpha \sqrt{e g} = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r'}{\partial u}$$

Nun hängen freilich die Rotationen r und r', sowie auch die von Herrn Darboux eingeführten Translationscomponenten des Trieders nur vom Längenelemente ab. Sie sind aber nur analytische Invarianten, wie auch schon aus dem Anblick der für K angeführten Formel hervorgeht, welche neben den Differentialquotienten nach u, v auch noch die Coefficienten e, g enthält, während die übrigen in Darboux'

1) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Tom. I, Tom. II S. 361—387.

1) a. a. O. S. 364.

Theorie auftretenden vier Rotationen überhaupt keinen invarianten Character besitzen.

Nr. 4. Als geometrische Invarianten von wesentlicher Bedeutung kennt man die geodätische Krümmung einer beliebigen auf der Fläche gezogenen Linie, insbesondere die geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien u, v,[1]) mittelst deren allein sich nach Bonnet das Krümmungsmaass in Bezug auf jedes orthogonale Curvensystem auf der Fläche darstellen lässt, wie dies Herr Knoblauch neuerdings wieder hervorgehoben hat.[2]) Bei allgemeiner Wahl des Coordinatensystems reichen aber diese beiden Invarianten nicht mehr aus.

Es ist jedoch leicht, noch andere geometrische Invarianten aufzustellen, welche ebenso wie die geodätischen Krümmungen nur von den e, f, g und den ersten Differentialquotienten derselben abhängen. Eine solche muss nämlich eine Function dieser Grössen sein, welche bei einer Transformation von der Form

$$u = F(u')$$
$$v = \Phi(v')$$

ihre Gestalt nicht ändert, denn nur dann ist sie von der Wahl der Variabeln unabhängig, so lange die Coordinatenlinien nicht geändert werden.

Bezeichnet man nun die Werthe, welche die e, f, g vermöge dieser Transformation annehmen durch e', f', g' und in analoger Weise die Differentialquotienten e_u, $\cdots$ g_v durch $e'_{u'}$ $\cdots$ $g'_{v'}$, so erhält man, wenn die Differentialquotienten der F, Φ durch Striche bezeichnet werden,

---

1) Als Curve $u(v)$ soll hier immer diejenige bezeichnet werden, längs welcher $u(v)$ variabel ist.

2) Vgl. Knoblauch, a. a. O., Darboux, Théor. générale, Tom. III, S. 130.

$$e' = e F^2$$
$$f' = f F \Phi$$
$$g' = g \Phi^2$$
$$f'_u = f_u F^2 \Phi + f F' F \Phi$$
$$f'_v = f_v F \Phi^2 + f \Phi' \Phi F$$
$$e'_u = e_u F^3 + 2 e F' F$$
$$e'_v = e_v F^2 \Phi$$
$$g'_u = g_u F \Phi^2$$
$$g'_v = g_v \Phi^3 + 2 g \Phi' \Phi$$

Aus diesen neun Gleichungen lassen sich durch Elimination der vier willkürlichen Grössen F, Φ, F', Φ' nur fünf von einander freie Gleichungen zwischen den e f g und ihren Differentialquotienten herleiten, welche die Transformationsbedingungen im Arnhold'schen Sinne darstellen. Beschränkt man sich daher auf solche Verbindungen, welche höchstens erste Differentialquotienten der e, f, g enthalten, so lassen sich nur fünf Invarianten bilden. Es sind dies die folgenden

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{1}{2\sqrt{H'}}\frac{e'_{v'}}{\sqrt{e'}}=\frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{e_v}{\sqrt{e}}=j,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{H'}}\frac{g'_{u'}}{\sqrt{g'}}=\frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{g_u}{\sqrt{g}}=j_1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f'}{\sqrt{e'}}}{\partial u'}=\frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f}{\sqrt{e}}}{\partial u}=\varkappa,$$

$$\frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f'}{\sqrt{g'}}}{\partial v'}=\frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\frac{f}{\sqrt{g}}}{\partial v}=\varkappa_1.$$

wobei $H=eg-f^2$, $H'=e'g'-f'^2$ gesetzt ist. Die erste dieser Gleichungen stellt das Quadrat des Cosinus des Winkels α der Coordinatenlinien vor; in den übrigen erkennt man sofort die Bestandtheile, aus denen die geodätischen Krümmungen γ, γ_1 der Coordinatenlinien u, v sich zusammensetzen, denn es ist bekanntlich

$$\gamma=\varkappa-j,$$
$$\gamma_1=\varkappa_1-j_1.$$

Es ist nun zu vermuthen, dass sich aus diesen fünf Invarianten,[1]) zu denen allerdings noch die Bogenlängen der Coordinatenlinien selbst hinzuzunehmen sind, die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie aufbauen lassen werden, wie im folgenden seine Bestätigung finden wird.

Es erweist sich indessen nicht als zweckmässig, jene Invarianten direct einzuführen. Vielmehr wird es sich empfehlen, die bereits definirten Krümmungen γ, γ_1 beizubehalten und diesen diejenigen beiden Biegungsinvarianten hinzuzufügen, welche ich bereits in meiner Arbeit über die

---

1) Dieselben sind indessen nicht von einander unabhängig. Man vergleiche weiter unten Nr. 6. die Gleichungen 10a und 1.

Krümmung der Flächen, allerdings in anderer Richtung, betrachtet hatte.[1])

Nr. 5. Bezeichnet man das Längenelement der Fläche, welche auf zwei willkürliche Curvensysteme u, v bezogen ist, durch

$$1)\qquad ds^2 = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$$

und die Differentialquotienten der e, f, g sowie der Coordinaten x, y, z, wie in Nr. 4, durch angehängte Indices, so hat man bekanntlich die Gleichungen

$$2)\qquad \begin{aligned} x_{uu} &= A\,x_u + A_1\,x_v + E\,p, \\ x_{uv} &= B\,x_u + B_1\,x_v + F\,p, \\ x_{vv} &= C\,x_u + C_1\,x_v + G\,p \end{aligned}$$

nebst den analogen für y, z und q, r, wobei E, F, G, die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, p, q, r die Richtungscosinus der Normale bedeuten, und die characteristischen Coefficienten A; A_1; B, B_1; C, C_1 durch die Gleichungen

$$3)\qquad \begin{aligned} 2\,A\;\,H &= q\,e_u - 2\,f\,f_u + f\,e_v \\ 2\,A_1\,H &= 2\,e\,f_u - e\,e_v - f\,e_u \\ 2\,B\;\,H &= g\,e_v - f\,g_u \\ 2\,B_1\,H &= e\,g_u - f\,e_v \\ 2\,C\;\,H &= 2\,g\,f_v - g\,g_u - f\,g_v \\ 2\,C_1\,H &= 2\,g_v - 2\,f\,f_v + f\,g_u \end{aligned}$$

in denen

$$c\,g - f^2 = H$$

gesetzt ist, definirt sind. Dabei finden zwischen den characteristischen Coefficienten die Gleichungen

---

1) Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Klein, Annalen 39. S. 200.

$$B + C_1 = \frac{\partial\, l \sqrt{H}}{\partial v}$$

$$B_1 + A = \frac{\partial\, l \sqrt{H}}{\partial u}$$

4) $$A_1 \frac{f}{e} = B_1 - \frac{\partial\, l \sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial u}$$

$$C \frac{f}{g} = B - \frac{\partial\, l \sqrt{\frac{H}{g}}}{\partial v}$$

statt, und zugleich hat man für die Differentialquotienten der p, q, r die Gleichungen

5) $$\begin{aligned} p_u &= L\, x_u + L_1\, x_v \\ p_v &= M\, x_u + M_1\, x\,. \end{aligned}$$

in denen

6) $$\begin{aligned} L\ \ H &= F f - g E \\ L_1\, H &= E f - F e \\ M\ \ H &= G f - F g \\ M_1\, H &= F f - G e \end{aligned}$$

ist. Die geodätischen Krümmungen γ, γ_1 der Curven u, v sind alsdann

7) $$\gamma = \frac{A_1 \sqrt{H}}{e \sqrt{e}},\ \gamma_1 = \frac{C \sqrt{H}}{g \sqrt{g}}$$

ihre reciproken Werthe sind die Radien der geodätischen Krümmung der Parameterlinien. Ich denke mir ferner im Punkte $P\,(x, y, z)$ der Fläche die Tangente an die Curve u gezogen. Die Coordinaten eines um r_1 von P entfernten Punktes auf derselben sind

$$8)\qquad \begin{aligned} X &= x + \frac{r_1 x_u}{\sqrt{e}} \\ Y &= y + \frac{r_1 y_u}{\sqrt{e}} \\ Z &= z + \frac{r_1 z_u}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

und diejenige Normalebene der Fläche, welche jene Tangente in sich enthält, hat die Gleichung

$$N = \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ p & q & r \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$N = (X - x,\ p,\ x_u) = 0.$$

Hieraus ergibt sich für die unendlich benachbarte Normalebene $N + d\,N_v$, welche dem Fortschreiten auf der Curve v entspricht, die Gleichung

$$N + [(X - x, p, x_{uv}) + (X - x, p_v, x_u) - (x_v, p, x_u)]\,dv = 0.$$

Trägt man in die letztere die Ausdrücke 8) an Stelle von $X - x, \cdots$ ein, so ergibt sich für die Entfernung, in welcher die Tangente der Curve u von der benachbarten Normalebene längs der Curve v geschnitten wird, die Formel

$$9)\qquad r_1 = -\frac{\sqrt{e}}{B_1}$$

und ebenso erhält man für den analogen Werth r die Gleichung

$$r = -\frac{\sqrt{g}}{B}.$$

Allerdings sind diese „Radien", welche für isometrische Flächen ungeändert bleiben, bisher wie es scheint in der Flächentheorie nicht beachtet worden. Die

folgenden Bemerkungen werden indessen erkennen lassen, dass sie zugleich mit den angegebenen Normalebenen durch die Tangenten der Curven u, v bei vielen Untersuchungen auftreten.

Wie man sieht ist die Construction dieser Radien genau dieselbe, welche die geodätischen Krümmungsradien definirt, in welche sie geradezu übergehen, wenn der Coordinatenwinkel α ein rechter ist. Denn das Centrum der geodätischen Krümmung der Curve v ist, wie man leicht erkennt, derjenige Punkt auf der Normale der Curve v, in der Tangentenebene der Fläche, in dem diese Normale von der unendlich benachbarten Normalebene der Curve v geschnitten wird. Man könnte daher die reciproken Werthe von r und r_1, die fortan durch ϱ, ϱ_1 bezeichnet werden sollen,[1] auch die „nach den Richtungen der Coordinatenlinien gemessenen geodätischen Krümmungen" der letzteren nennen. Freilich ist nicht sofort geometrisch evident, dass diese Krümmungen ϱ und ϱ_1 für isometrische Flächen ungeändert bleiben. Aber eine solche unmittelbare Evidenz besteht auch nicht für die geodätischen Krümmungen γ und γ_1; man erkennt ihre Invarianz aber leicht mit Hülfe der Liouville'schen Definition der geodätischen Krümmung durch den geodätischen Contingenzwinkel. In derselben Weise aber kann man durch eine infinitesimale Betrachtung sehr einfacher Art nachweisen, dass r und r_1 Biegungsinvarianten sind. Es möge genügen, was diesen Punkt betrifft, auf die Formeln 10^a) zu verweisen, deren geometrische Deutung auf der Hand liegt, und aus denen jener invariante Character für r und r_1 sich unmittelbar ergibt.

---

1) Nach der Bezeichnung in Nr. 4 ist

$$\varrho = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha\, j - j_1),$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha\, j_1 - j).$$

Eine besonders anschauliche Bedeutung gewinnen die Endpunkte der Strecken r, r_1 für ein conjugirtes Coordinatensystem auf der Fläche; sie sind dann die Durchschnittspunkte der consecutiven Tangenten der Curven u (v) längs der Curven v (u). Bei einer isometrischen Beziehung entspricht nun freilich einem conjugirten Coordinatensystem nicht wieder im allgemeinen ein solches; doch mag hier bemerkt werden, dass zwei isometrisch auf einander bezogene Flächen positiver Krümmung immer auch reell so auf einander bezogen werden können, dass einem System conjugirter Curven wieder ein solches entspricht, während für Flächen negativer Krümmung dieses System auch imaginär werden kann.[1])

Die Normalebenen N längs der Curve v erzeugen eine abwickelbare Fläche. Ist nun ϱ_1 beständig gleich Null, so laufen die Erzeugenden derselben den Tangenten der Curven u in den Punkten der Curven v parallel. Sind beide Krümmungen ϱ und ϱ_1 beständig gleich Null, so ist das Curvensystem u, v ein äquidistantes, denn alsdann hönnen e und g gleich Eins gesetzt werden.

Es möge hier noch darauf hingewiesen werden, dass auch die Entfernungen s, s_1, in denen die Normale der Fläche von den consecutiven Normalebenen N der Curven u, v geschnitten wird, eine einfache Bedeutung besitzen. Setzt man nämlich in der Gleichung $N + dN_v = 0$ für $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ die Grössen $s_1 p$, $s_1 q$, $s_1 r$ ein, so ergiebt sich

$$s_1 (p\, p_v\, x_u) - (x_v\, p\, x_u) = 0$$

1) Für dieses besondere Coordinatensystem gehen dann durch die Biegung gleichzeitig die aus den Tangenten der Curven u, v gebildeten zwei Schaaren Developpabeln in einander über. Dagegen können die geodätischen Krümmungsradien einer Curve nur dann eine Developpable bilden, wenn dieselbe eine Krümmungslinie ist.

oder wenn man für p_0 seinen Werth aus 5) substituirt

$$\frac{1}{s_1} = \frac{eG - fF}{eg - f^2}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{gE - fF}{eg - f^2}$$

Daher ist $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}$ für jeden Punkt der Fläche unveränderlich und gleich der Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien,[1]) während für conjugirte Coordinatensysteme noch ausserdem

$$\frac{1}{ss_1} = \frac{K}{\sin^2 \alpha}$$

wird.

Nr. 6. Die vier Biegungsinvarianten $\gamma\ \gamma_1\ \varrho\ \varrho_1$ sollen nun im folgenden zur Bildung des Krümmungsmaasses verwandt werden. Hierzu sind zunächst einige weitere Formeln zu entwickeln.

Setzt man nämlich

$$\cos \alpha = \frac{f}{\sqrt{eg}}$$

so erhält man leicht mit Hülfe der Gleichungen 3)

$$-\sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{eCH + B_1 gH}{eg\sqrt{eg}}$$

oder

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{C\sqrt{H}}{g} + \frac{B_1\sqrt{H}}{e}$$

und wenn man hier γ_1 und ϱ_1 einführt

1) Für orthogonale Systeme gehen s und s_1 in die Normalkrümmungen über, und man erhält den bekannten Satz über die Krümmungen zweier zu einander rechtwinkligen Normalschnitte.

$$10)\quad \begin{aligned} -\frac{\partial \alpha}{\partial v} &= \sqrt{g}(\gamma_1 - \varrho_1 \sin \alpha) = \sqrt{H}\left(\frac{C}{g} + \frac{B_1}{e}\right) \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial u} &= \sqrt{e}(\gamma - \varrho \sin \alpha) = \sqrt{H}\left(\frac{A_1}{e} + \frac{B}{g}\right) \end{aligned}$$

oder, wenn man die Bogenelemente $ds = \sqrt{e}\,du$, $ds_1 = \sqrt{g}\,dv$ einsetzt

$$10^*)\quad \begin{aligned} -\frac{\partial \alpha}{\partial s} &= \gamma - \varrho \sin \alpha \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} &= \gamma_1 - \varrho_1 \sin \alpha \end{aligned}$$

Die vier Grössen $\varrho, \varrho_1, \gamma, \gamma_1$ sind indessen noch durch eine weitere Gleichung mit einander verbunden. Man erhält dieselbe durch Bildung der Integrabilitätsbedingung der Gleichungen 10). Aus den Gleichungen 9) oder

$$\varrho = -\frac{B}{\sqrt{g}}, \quad \varrho_1 = -\frac{B_1}{\sqrt{e}}$$

folgt nämlich mit Hülfe der in 3) gegebenen Ausdrücke für B und B_1

$$11)\quad \begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} &= \varrho + \varrho_1 \cos \alpha \\ -\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} &= \varrho_1 + \varrho \cos \alpha \end{aligned}$$

also, wenn man die Gleichungen 10) nach u und v differentiirt und die Ausdrücke 11) auf der rechten Seite substituirt,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v \sqrt{eg}} &= \frac{\partial \gamma_1}{\partial s} - \frac{\partial \varrho_1}{\partial s}\sin\alpha + (\varrho_1\gamma - \varrho\gamma_1)\cos\alpha - \varrho_1\gamma_1 + \varrho_1^2 \sin\alpha \\ &= \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} - \frac{\partial \varrho}{\partial s_1}\sin\alpha - (\varrho_1\gamma - \varrho\gamma_1)\cos\alpha - \varrho\gamma + \varrho^2 \sin\alpha \end{aligned}$$[1].

1) Sind zwei Flächen so auf einander bezogen, dass der Coordinatenwinkel α und die vier Grössen $\varrho, \varrho_1, \gamma, \gamma_1$ in correspondirenden

Setzt man zur Abkürzung

$$12)\qquad \frac{\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho_1 = k_1, \quad \frac{\gamma}{\sin\alpha} - \varrho = k$$
$$\gamma \operatorname{cotg}\alpha + \varrho_1 = l_1, \quad \gamma_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 + \varrho = l$$

so kann man diese Identität in der folgenden Form

$$\text{I)}\qquad \frac{\partial k_1}{\partial s} - k_1 l_1 = \frac{\partial k}{\partial s_1} - k l$$

schreiben, deren beide Seiten nach 10*) verschwinden, wenn der Winkel α constant ist.

Nr. 7. Ich gehe nun von dem bekannten Ausdrucke[1]) für das Krümmungsmaass K aus,

---

Punkten gleiche Werthe haben, so sind sie isometrisch. Denn aus den Gleichungen 10a) folgt zunächst die Gleichung der Bogenelemente, also

$$\sqrt{e} = \sqrt{e'}$$
$$\sqrt{g} = \sqrt{g'}$$

und somit auch $f = f'$, falls man die Coefficienten des Längenelementes auf den beiden Flächen durch Indices unterscheidet. Hierbei muss aber vorausgesetzt werden, dass α nicht constant ist. Denn in diesem Falle sind die Grössen ϱ, ϱ_1 von den geodätischen Krümmungen γ, γ_1 nur um einen constanten Factor verschieden. Es ist aber leicht zu sehen, dass aus der Gleichheit der geodätischen Krümmungen bei constantem Coordinatenwinkel keineswegs die Gleichheit der Längenelemente sondern nach 11) nur die Relationen folgen:

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial l\sqrt{g}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e'}}\frac{\partial l\sqrt{g'}}{\partial u}$$
$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial l\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{\partial l\sqrt{e'}}{\partial v}.$$

Ist dagegen α eine Function von v allein, so ergiebt sich zunächst $\sqrt{g} = \sqrt{g'}$ und dann nach 11) auch $\sqrt{e} = \sqrt{e'}$, so dass in diesem Falle die Flächen wieder isometrisch sind.

1) Darboux, a. a. O. Tom II p. 364.

$$K\sqrt{H} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} - \cos\alpha \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}}{\sqrt{e}\sin\alpha}\right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \cos\alpha \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}}{\sqrt{g}\sin\alpha}\right)$$

den man vermöge der Gleichungen 3) in die Form

$$\text{II)} \quad K\sqrt{H} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_1 \sqrt{H}}{e}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B\sqrt{H}}{g}\right)$$

oder auch, wenn man die Formeln 10) einführt in die Gestalt

$$\text{II')} \quad K\sqrt{H} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C\sqrt{H}}{g}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_1 \sqrt{H}}{e}\right)$$

bringen kann. Durch Addition ergiebt sich der von dem zweiten partiellen Differentialquotienten von α nach u und v befreite Ausdruck

$$\text{II'')} \quad 2K\sqrt{H} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C}{g} - \frac{B_1}{e}\right)\sqrt{H} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_1}{e} - \frac{B}{g}\right)\sqrt{H}\,^{1)}$$

Nun findet man leicht nach 7) und 9)

$$\frac{C}{g} - \frac{B_1}{e} = \left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1\right)\sqrt{\frac{1}{e}}$$

$$\frac{A_1}{e} - \frac{B}{g} = \left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho\right)\sqrt{\frac{1}{g}}$$

---

1) Die Formeln II, II' lassen unmittelbar die bekannten Eigenschaften der Curvatura integra von Flächenstücken, die von geodätischen oder von äquidistanten Linien begrenzt sind, erkennen. Formel II'' ist nichts anderes als der von Herrn Weingarten für das Krümmungsmaass bemerkte Ausdruck. (Festschrift der Technischen Hochschule, Berlin 1884; Knoblauch, Theorie der krummen Flächen, S. 177).

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial u}=\frac{\partial\sqrt{g}}{\sqrt{eg}\,\partial u}+\operatorname{cotg}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial s}=-(\varrho_1+\operatorname{cotg}\alpha\,\gamma)$$

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial v}=\frac{\partial\sqrt{e}}{\sqrt{eg}\,\partial v}+\operatorname{cotg}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial s_1}=-(\varrho+\operatorname{cotg}\alpha\,\gamma_1)$$

und somit durch Substitution in die Formel II'')

$$2K=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha}+\varrho_1\right)+\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha}+\varrho\right)$$

$$-\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha}+\varrho_1\right)(\varrho_1+\operatorname{cotg}\alpha\gamma)-\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha}+\varrho\right)(\varrho+\operatorname{cotg}\alpha\gamma_1)$$

oder mit Benutzung der unter 12) eingeführten Bezeichnung sowie der folgenden

$$\frac{\gamma_1}{\sin\alpha}+\varrho_1=h_1,\quad\frac{\gamma}{\sin\alpha}+\varrho=h$$

$$\text{III)}\qquad 2K=\frac{\partial h_1}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial s_1}-h_1l_1-hl.$$

In dieser Form, der man durch die mittelst der Formel I mögliche Elimination des Winkels α, solange dieser nicht constant ist, auch eine solche Gestalt geben kann, dass K nur von den γ, ϱ und γ_1, ϱ_1, sowie den ersten Differentialquotienten dieser Grössen bezüglich nach v und u abhängig erscheint, erhält nun der Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses seinen unmittelbarsten Ausdruck im analytisch geometrischen Sinne, da K nur durch geometrische Biegungsinvarianten dargestellt ist. Ebenso merkwürdig ist aber die andere aus der bekannten Bedeutung von K als reciprokes Product der Hauptkrümmungshalbmesser fliessende Eigenschaft, der zufolge die rechte Seite von III für alle Coordinatensysteme auf der Fläche für jeden Punkt einen unveränderlichen Werth hat,

und die Gleichungen 10[a]), I, III stellen nichts anderes vor, als ganz allgemeine Theoreme, die von jedem beliebigen Coordinatensysteme auf einer Oberfläche gelten.

Ist insbesondere der Winkel α constant, so wird nach 10[a])

$$\varrho = \frac{\gamma}{\sin\alpha}, \; \varrho_1 = \frac{\gamma_1}{\sin\alpha}$$

mithin

$$h_1 = 2\varrho_1, \qquad h = 2\varrho$$
$$l = \varrho + \varrho_1 \cos\alpha, \; l_1 = \varrho_1 + \varrho\cos\alpha$$

also in diesem Falle

$$\text{III}') \quad K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} + \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - (\varrho_1^2 + \varrho^2 + 2\varrho\varrho_1\cos\alpha)$$

welche Formel für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die bekannte Bonnet'sche übergeht.[1])

Nr. 8. Ich schliesse hieran noch einige Bemerkungen, die sich aus der Form der Gleichungen I und III ergeben.

Sind die Curven u, v geodätisch, so folgt durch Combination von I und III

$$K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} - \varrho_1^2 = \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - \varrho^2$$

Bei constanter negativer Krümmung $K = -c^2$ wird daher

---

1) Will man das Krümmungsmaass nur durch die geodätischen Krümmungen und den Winkel α darstellen, so findet man aus II'

$$K = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{eg}} + \frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s_1} - (g_1^2 + g^2 + 2\cos\alpha\, g g_1)$$
$$- \frac{g_1}{\sin\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s_1} - \frac{g}{\sin\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s}$$

falls $\gamma = \sin\alpha\, g$, $\gamma_1 = \sin\alpha\, g_1$ gesetzt wird. Wie man sieht, ist dies aber keine Darstellung durch geometrische Invarianten, da die Differentiation nach u und v sich nicht beseitigen lässt.

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\varrho_1^2 - c^2}} = \sqrt{e}$$

oder, wenn man bei constanten v integrirt

$$\frac{\varrho_1 + c}{\varrho_1 - c} = e^{2sc}\,\psi(v)$$

und analog

$$\frac{\varrho + c}{\varrho - c} = e^{2s_1c}\,\chi(u)$$

Bei constanter positiver Krümmung $K = + c^2$ findet man dagegen

$$\varrho_1 = c\,\mathrm{tg}\,(c s \;+ f\,(v))$$
$$\varrho \;= c\,\mathrm{tg}\,(c s_1 + \varphi\,(u))$$

welche Formeln in sehr einfacher Weise die Aenderungen von ϱ_1 (und ϱ) beziehungsweise längs der geodätischen Linien u (und v) darstellen.

Ein ganz ähnliches Resultat ergiebt sich für ein System von Curven, in Bezug auf das $\gamma = 0$, $\varrho = 0$ ist. Man erhält dann aus I und III

$$K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} - \varrho_1^2$$

und damit bei constantem K eine ganz ähnliche Gleichung für ϱ, wie vorhin, während γ_1 nun durch die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial u} = \sqrt{e}\,(\gamma_1\,\varrho_1 + \sin\alpha\,K)$$

in der überdies nach 10[a]) α nur von v abhängig ist, characterisirt ist, deren Lösung sofort hingeschrieben werden kann.

Dagegen können γ und ϱ_1 nur bei developpabelen Flächen gleich Null sein. Denn die Combination der Gleichungen I und III liefert hier sogleich $K = 0$.

Ferner ergiebt sich aus III der Satz:

Eine reelle Fläche, auf der ein System von Coordinatenlinien constanter geodätischer Krümmung[1]) existirt, die sich überall unter constantem Winkel α schneiden, ist eine Fläche constanter negativer Krümmung, den man als Verallgemeinerung eines bekannten Liouville'schen Theorem's betrachten kann.

Sollen z. B. die geodätischen Krümmungen der Curven u und v eines **Orthogonalsystems** constant und gleich c und c_1 sein, so hat man nach Nr. 5), 7) die Gleichungen

$$\frac{e_v}{e\sqrt{g}} = 2c, \quad \frac{g_u}{g\sqrt{e}} = 2c_1$$

deren Lösungen

$$\sqrt{e} = -\frac{\vartheta'(u_1)}{\vartheta(u_1) + \chi(v_1)}, \quad \sqrt{g} = -\frac{\chi'(v_1)}{\vartheta(u_1) + \chi(v_1)}$$

sind, wenn $cv = v_1$, $c_1 u = u_1$ gesetzt wird. Das Längenelement wird demnach

$$ds^2 = \frac{\frac{d\,[illegible]^2}{c_1^2} - \frac{dv^2}{c^2}}{[illegible]}$$

wenn [illegible] gesetzt wird. Mit Hülfe der Identität

$$[illegible] - \frac{\left([illegible] - \frac{c_1}{c}\,d\,[illegible]\right)^2}{c^2 - c_1^2}$$

[illegible]

1) [illegible] allerdings zu Gegen-[illegible] geodätische [illegible] so dürfte [illegible] empfehlen, die [illegible] zu nennen.

$$U + V = U', \quad \frac{c}{c_1} U - \frac{c_1}{c} V = V'$$

gewinnt dasselbe die Gestalt

$$ds^2 = \frac{d\,U'^2 + d\,V'^2}{U'^2 (c_1^{\,2} + c^2)}$$

in welcher man sofort das Längenelement der auf ihre Meridiane und Parallelkreise bezogenen Rotationsfläche der Tractrix erkennt. In ähnlicher Weise lässt sich übrigens auch der Fall eines beliebigen constanten α behandeln.

Nr. 9. Die Formel III Nr. 7. für das Krümmungsmaass enthält neben den Invarianten h und h_1 noch die Differentialquotienten derselben nach v und u. Nur für eine gewisse Klasse von Coordinatensystemen auf einer krummen Fläche wird man daher K durch die Invarianten allein darstellen können, so, dass dann K nur aus den geometrischen Grössen ϱ, ϱ_1, γ, γ_1, α zusammengesetzt ist. Es sind dies diejenigen, für welche h und h_1 Functionen von u und v allein werden, oder mit unwesentlicher Aenderung

$$\sin^2\alpha\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho\right), \quad \sin^2\alpha\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1\right)$$

d. h.

$$\frac{1}{e\sqrt{g}}\left[f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{g}{e}}{\partial u}\right], \quad \frac{1}{g\sqrt{e}}\left[f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{e}{g}}{\partial v}\right]$$

von u und v allein abhängig sind. Da diese beiden Ausdrücke bei einer Transformation von der Form

$$u' = \varphi(u), \quad v' = \psi(v)$$

absolute Invarianten sind, so erscheinen die Coordinatensysteme dieser Art durch die folgenden beiden Gleichungen characterisirt,

$$\frac{1}{g\sqrt{e}}\left(f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{e}{g}}{\partial v}\right) = \alpha v + \beta$$

$$\frac{1}{e\sqrt{g}}\left(f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{g}{e}}{\partial u}\right) = \alpha_1 u + \beta_1$$

in denen α, α_1, β, β_1 Constanten bedeuten, die man gleich Null oder Eins setzen kann, je nachdem die linken Seiten constant oder variabel sein sollen. Die Differentialgleichungen, auf deren Lösung die Bestimmung der Coordinatensysteme beruht, für welche die angegebene Eigenschaft besteht, sind allerdings nicht ganz einfach, und ich werde sie hier nicht weiter untersuchen. Eine einfache Lösung ergiebt sich aber in dem Falle, wo man sämmtliche Constanten gleich Null setzt, der freilich nur bei einer developpabelen Fläche auftreten kann. Alsdann kommt die bezeichnete Aufgabe auf die folgende hinaus:

Alle Curvensysteme in der Ebene zu bestimmen, für die die beiden Ausdrücke

$$f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{e}{g}}{\partial v}, \quad f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{g}{e}}{\partial u}$$

verschwinden.

Setzt man demgemäss

$$e = x_u^2 + y_u^2, \quad f = x_u x_v + y_u y_v, \quad g = x_v^2 + y_v^2$$

so erhält man durch einfache Umformungen an Stelle dieser beiden Bedingungen die Gleichungen

$$13) \quad \begin{cases} x_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{x_v}{x_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial v} + y_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{y_v}{y_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial v} = 0 \\[2ex] x_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{x_v}{x_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial u} + y_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{y_v}{y_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\frac{x_v}{x_u}\sqrt{\frac{e}{g}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{y_u}{x_u}\right)^2}{1+\left(\frac{y_v}{x_v}\right)^2}} = p$$

$$\frac{y_v}{y_u}\sqrt{\frac{e}{g}} = \frac{\frac{y_v}{x_v}}{\frac{y_u}{x_u}}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{y_u}{x_u}\right)^2}{1+\left(\frac{y_v}{x_v}\right)^2}} = q$$

und

$$z = \frac{y_u}{x_u}, \quad z' = \frac{y_v}{x_v}$$

so folgt aus dem nach 13) erforderlichen Verschwinden der Functionaldeterminante

$$\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}$$

dass p nur von q abhängig ist, oder

$$\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z'^2}} = \Phi\left(\frac{z'}{z}\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z'^2}}\right)$$

oder auch

$$z' = F(z)$$

sein muss, wo F eine noch zu bestimmende Function bedeutet. Die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{1+z^2}{1+(Fz)^2}}\right) + z^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{1+z^2}{1+(Fz)^2}}\right) = 0$$

auf welche sich die beiden 13) reduciren, verwandelt sich durch Ausführung der Differentiation und nach einigen Vereinfachungen in

$$[z - F(z)]\left[\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+(Fz)^2}\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0$$

Da nun die Gleichung

$$z - F(z) = \frac{y_u x_v - y_v x_u}{x_u x_v} = 0$$

nicht bestehen kann, weil sonst y eine Function von x sein würde, so ergibt sich nur

$$\frac{dz}{1+z^2} + \frac{dF}{1+F^2} = 0$$

oder

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z + \operatorname{arc} \operatorname{tg} z' = \text{const.}$$

Zwischen den Winkeln α und β, welche die Curven u, v in jedem Punkte mit der x-Axe bilden, muss daher die Gleichung

$$\alpha + \beta = \text{const}$$

erfüllt sein. **Man erhält also alle Systeme der verlangten Art, wenn man die eine Schaar von Curven beliebig annimmt und zu derselben eine zweite so bestimmt, dass die Winkelhalbirende des von den Curven beider Schaaren in jedem Punkte gebildeten Winkels eine constante Richtung hat.**

Allerdings ist in der vorhergehenden Betrachtung vorausgesetzt, dass x_u und y_u nicht Null sind. Ist aber z. B. x_u gleich Null, so kann nicht zugleich y_u gleich Null sein, da sonst eine Gleichung zwischen x und y bestände. Der Fall $x_u = 0$ kann aber stets durch eine Coordinatentransformation beseitigt werden und ist daher in der vorigen Untersuchung schon enthalten.

Nr. 10. Durch das vorstehende haben zugleich die Coefficienten A_1, C, B, B_1 in den Formeln 1) der Nr. 5 ihre geometrische Bedeutung erhalten. Die Coefficienten A und C_1 haben dagegen überhaupt keine geometrische Bedeutung,

und es wird sich daher empfehlen, sie ganz aus diesen Formeln zu entfernen, was vermöge der Gleichungen[1])

$$\frac{A}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} = -\gamma \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\frac{C}{\sqrt{g}} - \frac{1}{g}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial v} = -\gamma_1 \operatorname{cotg} \alpha$$

zu geschehen hat. Alsdann treten in den Gleichungen 2) nicht mehr die Differentialquotienten der x, y, z, sondern nur die Richtungscosinus der Coordinatenlinien

$$\cos\lambda = \frac{x_u}{\sqrt{e}},\quad \cos\mu = \frac{y_u}{\sqrt{e}},\quad \cos\nu = \frac{z_u}{\sqrt{e}}$$

$$\cos\lambda' = \frac{x_v}{\sqrt{g}},\quad \cos\mu' = \frac{y_v}{\sqrt{g}},\quad \cos\nu' = \frac{z_v}{\sqrt{g}}$$

auf. Sie erhalten nach einfacher Umrechnung, wenn zugleich wie bisher statt der Differentiale $\sqrt{e}\,du$, $\sqrt{g}\,dv$ die Bogenelemente ds, ds' geschrieben und statt der nunmehr in diese Formeln eingehenden Grössen

$$\frac{E}{e},\quad \frac{F}{\sqrt{eg}},\quad \frac{G}{g}$$

die Zeichen

$$R,\quad S,\quad R'$$

gesetzt werden, die folgende Gestalt

$$14)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} &= -\frac{\gamma}{\sin\alpha}(\cos\lambda\,\cos\alpha - \cos\lambda') + p\,R \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} &= -\frac{\gamma'}{\sin\alpha}(\cos\lambda'\cos\alpha - \cos\lambda) + p\,R' \end{aligned}$$

---

1) Es sind dies die bekannten Gleichungen

$$A\,e + A_1 f = \frac{e_u}{2},$$

$$C_1 g + C f = \frac{g_v}{2}.$$

$$14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} = \varrho_1 (\cos\lambda \cos\alpha - \cos\lambda') + p\,S \\ \dfrac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} = \varrho\,(\cos\lambda' \cos\alpha - \cos\lambda) + p\,S\,. \end{cases}$$

nebst den analogen Gleichungen für $\cos\mu$ und $\cos\nu$, wo gleichzeitig rechterhand p durch q und r zu ersetzen ist. Die beiden letzten Gleichungen in 14) treten übrigens an Stelle der einen Gleichung für x_{uv}.

Die Grössen

$$\frac{\cos\lambda \cos\alpha - \cos\lambda'}{\sin\alpha}, \quad \frac{\cos\mu \cos\alpha - \cos\mu'}{\sin\alpha}, \quad \frac{\cos\nu \cos\alpha - \cos\nu'}{\sin\alpha}$$

und die aus ihnen durch Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Cosinus hervorgehenden, welche rechterhand in 14) ausschliesslich vorkommen, haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Sie sind nämlich die Richtungscosinus der geodätischen Krümmungsradien der Curven u und v. Bezeichnet man dieselben durch

$$\begin{matrix} \cos l\,, & \cos m\,, & \cos n \\ \cos l'\,, & \cos m'\,, & \cos n' \end{matrix}$$

so erhält man an Stelle von 14)

$$15)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} &= -\gamma \cos l + p\,R \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} &= -\gamma_1 \cos l' + p\,R' \\ \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} &= \varrho_1 \cos l \sin\alpha + p\,S \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} &= \varrho \cos l' \sin\alpha + p\,S. \end{aligned}$$

Die Gleichung für das Krümmungsmaass wird nun

$$16)\quad R\,R' - S^2 = K \sin^2\alpha$$

und zugleich ergeben sich aus den beiden Differentialgleichungen zwischen den Fundamentalgrössen E, F, G[1])

$$BF + B_1 G - CE - FC_1 + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

$$B_1 F + BE - A_1 G - FA + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = 0$$

die beiden neuen Gleichungen

$$17)\quad \begin{aligned} &-2\varrho S + \cos\alpha\, S\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho_1\right) \\ &+ R_1(\varrho_1 + 2\varrho\cos\alpha) - \frac{\gamma_1}{\sin\alpha} R + \frac{\partial S}{\partial s'} - \frac{\partial R'}{\partial s} = 0 \\ &-2\varrho' S + \cos\alpha\, S\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} - \varrho\right) \\ &+ R(\varrho + 2\varrho_1\cos\alpha) - \frac{\gamma}{\sin\alpha} R' + \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{\partial R}{\partial s'} = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen 15), 16), 17) stellen die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie in einer Form vor, bei der bis auf die Grössen R, R', S nur invariante Elemente der Coordinatenlinien benutzt sind. Dabei bedeuten R, R' die Normalkrümmungen der Coordinatenlinien. Für S erhält man dagegen eine geometrische Deutung durch den Begriff der von Aoust eingeführten Seitenkrümmung (Courbure inclinée).[2])

Bezeichnet man nämlich die Richtungscosinus der Hauptnormale der Curve u durch $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, den Krümmungshalbmesser durch r, so ist

$$r\frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} = \cos a,\quad r\frac{\partial \cos\mu}{\partial s} = \cos b,\quad r\frac{\partial \cos\nu}{\partial s} = \cos c$$

1) Vgl. meine Arbeit in Klein's Annalen 39 S. 185.

2) Man vergl. namentlich Aoust, Théorie des coordonnées curvilignes quelconques; Annali di Matematica, Ser. II 1, S. 39, oder das Referat im Bd. I der Fortschritte der Mathematik.

oder nach 15)

$$\frac{1}{r^2} = \gamma^2 + R^2$$

$$\frac{1}{r_1^2} = \gamma_1^2 + R'^2$$

Unter dem Radius σ' der Seitenkrümmung der Curve u versteht man analog nach Aoust das Element der Curve v dividirt durch den unendlich kleinen Winkel, welchen die Tangente der Curve u beim Fortschreiten auf der Curve v mit ihrer ursprünglichen Richtung bildet. Demnach ist

$$\sigma' \frac{\partial \cos \lambda}{\partial s'} = \cos L', \quad \sigma' \frac{\partial \cos \mu}{\partial s'} = \cos M', \quad \sigma' \frac{\partial \cos \nu}{\partial s'} = \cos N'$$

wobei $\cos L'$, $\cos M'$, $\cos N'$ die Richtungscosinus des Radius der Seitenkrümmung vorstellen. Hieraus folgt

$$\frac{1}{\sigma'^2} = S^2 + \varrho_1^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = S^2 + \varrho^2 \text{ [1]}$$

und zugleich

$$\sigma' \left(p \frac{\partial \cos \lambda}{\partial s'} + q \frac{\partial \cos \mu}{\partial s'} + r \frac{\partial \cos \nu}{\partial s'}\right) = \cos (N, \sigma')$$

$$\sigma \left(p \frac{\partial \cos \lambda'}{\partial s} + q \frac{\partial \cos \mu'}{\partial s} + r \frac{\partial \cos \lambda'}{\partial s}\right) = \cos (N, \sigma)$$

oder nach 15)

$$\sigma' S = \cos (\sigma', N)$$

$$\sigma\ S = \cos (\sigma, N)$$

Aus diesen letzteren Gleichungen folgt der Satz von Aoust,

---

1) Es ist also auch

$$\frac{1}{\sigma'^2} - \frac{1}{\sigma^2} = \varrho_1^2 - \varrho^2$$

bei der Isometrie invariant.

dass die beiden nach der Normale N der Fläche gemessenen Seitenkrümmungen der Coordinatenlinien unter einander gleich und gleich S sind.

Die Gleichungen 15) sind in mehrfacher Hinsicht geometrisch deutbar, wenn man die $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ als Coordinaten eines Punktpaares ansieht, welches auf der Kugel von Radius Eins dem betrachteten Flächenpunkte zugeordnet ist. Ohne auf diese Beziehungen weiter einzugehen, sei nur die Gleishung[1])

$$18)\quad \sum \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s}\frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} - \sum \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s'}\frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} = \sin^2\alpha\left[K + \cos\alpha\left(\frac{\gamma\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho\varrho_1\right)\right]$$

bemerkt, nach welcher die linke Seite ebenfalls eine Biegungsinvariante ist, welche nach 10ᵃ) bei constantem Coordinatenwinkel α in das mit $\sin^2\alpha$ multiplicirte Krümmungsmaass übergeht. Unter Bezugnahme auf die in dieser Nummer

1) Beiläufig mögen noch die folgenden beiden Gleichungen hier erwähnt werden. Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ \cos l & \cos m & \cos n \\ \cos l' & \cos m' & \cos n' \end{vmatrix}$$

durch Δ, so sind

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} & \frac{\partial \cos\mu}{\partial s} & \frac{\partial \cos\nu}{\partial s} \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} & \frac{\partial \cos\mu'}{\partial s'} & \frac{\partial \cos\nu'}{\partial s'} \end{vmatrix} = \varrho\varrho_1$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} & \frac{\partial \cos\mu}{\partial s'} & \frac{\partial \cos\nu}{\partial s'} \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} & \frac{\partial \cos\mu'}{\partial s} & \frac{\partial \cos\nu'}{\partial s} \end{vmatrix} = \gamma\gamma_1\sin^2\alpha$$

zwei Biegungsinvarianten.

eingeführten Krümmungsradien und ihre Richtungen kann man für die linke Seite auch setzen

$$\frac{1}{rr_1}\cos(rr_1) - \frac{1}{\sigma\sigma'}\cos(\sigma\sigma').$$

An Stelle der Gleichungen 5) Nr. 5. treten endlich die Folgenden

$$19)\quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} &= \frac{S\cos l + R\cos l'}{\sin\alpha} \\ \frac{\partial p}{\partial s'} &= \frac{S\cos l' + R'\cos l}{\sin\alpha} \end{aligned}$$

Die Gleichungen 14—19) zeigen, dass von dem hier verfolgten Gesichtspunkt aus der Begriff der Seitenkrümmung ein wesentlicher ist, dass aber alle weiteren Relationen über Krümmungscomponenten, wie sie namentlich Aoust in grosser Zahl aufgestellt hat, nur einen secundären Werth besitzen. Sind diese Gleichungen auch für die directe Anwendung auf Probleme der Flächentheorie vielleicht weniger geeignet, da man fast immer die Differentiationen nach den Bogenelementen *ds*, *ds'* durch solche nach *du*, *dv* wird ersetzen müssen, so geben sie doch, wie aus den vorigen Betrachtungen ersichtlich sein wird, zu mehrfachen neuen Anschauungen und Fragen Veranlassung, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen hoffe.

Sitzung vom 11. Juni 1892.

1. Herr Ludwig Boltzmann hält einen Vortrag: „über ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen".

2. Herr Paul Groth theilt die Resultate von Versuchen „über Auflösung und Wachsthum der Krystalle" mit, welche Herr A. C. Gill im mineralogischen Laboratorium der k. Akademie angestellt hat.

3. Herr Adolf v. Baeyer spricht „über die Synthese des Dihydrobenzols", über welche er an anderer Stelle ausführlicher berichten wird.

Ueber ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen.

Teil I.

Von Ludwig Boltzmann.

(*Eingelaufen 11. Juni.*)

Wir denken uns einen feinen, mit Masse und Trägheit (aber nicht mit Gewicht) begabten Stoff und nennen denselben Kürze halber den Aether. Er soll alle Körper und auch das sogenannte Vacuum durchdringen. Ob die Eigenschaften, welche wir demselben beilegen werden, durch eine Molekularstructur verwirklicht werden können, lassen wir

$$\left.\begin{aligned} F &= \int_0^t \varphi\, d\, t \\ G &= \int_0^t \chi\, d\, t \\ H &= \int_0^t \psi\, d\, t \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Die Drehung, welche das im Punkt $x\ y\ z$ befindliche Volumelement $d\,\tau$ während der Zeit $d\,t$ um die x-Axe erfährt, wäre dann gleich:

$$\frac{d\,t}{2}\left(\frac{d\,\psi}{d\,y} - \frac{d\,\chi}{d\,z}\right)$$

und a wäre die doppelte Summe der Drehungen, welche alle durch den Punkt $x\ y\ z$ von der Zeit Null bis t hindurchgegangenen Volumelemente im Momente des Durchganges um die x-Axe erfuhren. Analoge Bedeutung hätten b und c bezüglich der y- und z-Axe.

Beide Auffassungen führen weder bei der stationären Aetherbewegung (Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction stationärer und angenähert stationärer elektrischer Ströme, Magnetismus), noch bei sehr kleinen Schwingungen (Licht) zu verschiedenen Gleichungen. Audere Phänomene wurden aber bisher kaum quantitativ mit den Gleichungen verglichen.

Bezeichnen wir ferner die Dichte des Aethers mit $\frac{k}{4\pi}$, so ist die kinetische Energie des im Volumelemente $d\,\tau$ befindlichen Aethers:

$$\frac{k}{8\pi}\left(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2\right) d\,\tau \qquad 4)$$

Wir denken uns, bloss um die Bewegungsgleichungen des Aethers zu erhalten, auf jedes Volumelement $d\,\tau$ des Aethers beliebige Kräfte mit den Componenten:

$$X\,d\tau,\quad Y\,d\tau,\quad Z\,d\tau \qquad 5)$$

wirkend, deren Arbeit während der Zeit dt also:

$$\left(X\frac{dF}{dt}+Y\frac{dG}{dt}+Z\frac{dH}{dt}\right)d\tau\,dt \text{ ist.}$$

Da ausserdem in dem betreffenden Volumelemente die Arbeit:

$$C\cdot\left[\left(\frac{dF}{dt}\right)^2+\left(\frac{dG}{dt}\right)^2+\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right]dt\,d\tau \qquad 6)$$

in Wärme umgesetzt werden soll, so lautet die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$0=\int d\tau\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\mu}\left(a\frac{da}{dt}+b\frac{db}{dt}+c\frac{dc}{dt}\right)\\&+k\left[\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\chi\frac{d\chi}{dt}+\psi\frac{d\psi}{dt}\right]\\&+4\pi\left(X\frac{dF}{dt}+Y\frac{dG}{dt}+Z\frac{dH}{dt}\right)\\&+4\pi C\left[\left(\frac{dF}{dt}\right)^2+\left(\frac{dG}{dt}\right)^2+\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

wobei dies Integral über den ganzen in Betracht kommenden Raum zu erstrecken ist. Befinden sich daselbst verschiedene Körper, so wollen wir deren Trennungsflächen niemals als absolute Discontinuitätsstellen, sondern vielmehr als Uebergangssichten denken, innerhalb deren die Werte von μ, k und C, wenn auch rasch, so doch continuirlich von den im Innern des einen zu den im Innern des anderen Körpers geltenden Werten übergehen.

Wir substituiren für $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}$ und $\frac{dc}{dt}$ deren Werte aus den Gleichungen 2) und integriren jedes Glied partiell. Nach der gemachten Annahme giebt es im Innern keine discontinuirlichen Trennungsflächen, an der äusseren in grosser Entfernung gedachten Oberfläche unseres Raums aber sollen

F, G und H verschwinden, sodass also alle Oberflächenintegrale verschwinden. Substituirt man ferner für φ, χ, ψ deren Werte aus den Gleichungen 1), so geht die Gleichung 7) über in:

$$\int d\tau \left\{ \begin{array}{l} \frac{dF}{dt}\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{c}{\mu}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{b}{\mu}\right)+k\frac{d^2F}{dt^2}+4\pi C\frac{dF}{dt}+4\pi X\right] \\ +\frac{dG}{dt}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{a}{\mu}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{\mu}\right)+k\frac{d^2G}{dt^2}+4\pi C\frac{dG}{dt}+4\pi Y\right] \\ +\frac{dH}{dt}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{\mu}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{a}{\mu}\right)+k\frac{d^2H}{dt^2}+4\pi C\frac{dH}{dt}+4\pi Z\right] \end{array} \right\} = 0 \qquad 8)$$

Da die Kräfte und Beschleunigungen mit Ausnahme natürlich der von den Bewegungshindernissen herrührenden von den augenblicklich herrschenden Geschwindigkeiten unabhängig sind, so sind in dieser Gleichung $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$ und $\frac{dH}{dt}$ als unabhängig zu betrachten und es müssen deren Coefficienten separat verschwinden. Man kann übrigens die Veränderungen von F, G und H in ächte Variationen verwandeln, dadurch, dass man den Grössen X, Y, Z während eines sehr kurzen Zeitintervalles sehr grosse Werte erteilt. (Vergl. Maxwell on physical lines of force, Scient. Pap. I. p. 475 Gleichung 53. Phil. Mag. (4) vol. 21.)

Setzen wir daher lediglich zur Abkürzung:

$$f = -\frac{k}{4\pi}\cdot\frac{dF}{dt}; \quad g = -\frac{k}{4\pi}\frac{dG}{dt}; \quad h = -\frac{k}{4\pi}\frac{dH}{dt} \qquad 9)$$

$$p = -C\frac{dF}{dt}; \quad q = -C\frac{dG}{dt}; \quad r = -C\frac{dH}{dt} \qquad 10)$$

$$u = p + \frac{df}{dt}; \quad v = q + \frac{dg}{dt}; \quad w = r = \frac{dh}{dt} \qquad 11)$$

so erhalten wir:

s genau mit den [illegible]
ll für die ele[illegible]
nenden Körpern [illegible]
axwells Theorie I. t. 2. Band. [illegible]

Direct könnten diese Gleichungen [illegible]
enfalls schon von Thomson l. c. in [illegible]
wandten Methode gewonnen werden. [illegible]
r sei ein Parallelepiped, dessen eine Ecke [illegible]
y z hat, während die anderen um ξ resp. η, ζ [illegible]
ordinaten haben. Daher wirkt darauf um die y-Axe das
ehmoment:

$$m = \frac{b \xi \eta \zeta}{2 \pi \mu}$$

as Volumelement ist aber mit den umgebenden so ver-
nden, dass es sich nicht davon loslösen, und ohne diese
itzudrehen, diese Drehung ausführen kann. Es werden
aher von den umgebenden Aetherteilchen auf die 4 Seiten-
ächen, welche der y-Axe parallel sind, Tangentialkräfte
usgeübt werden müssen, welche zusammen das [illegible]
Drehungsmoment liefern. Nehmen wir an, [illegible]
satze zum Verhalten gewöhnlicher [illegible]
Winkeländerungen des Parallelepipeds [illegible]
elastischen Kräfte wachrufen, [illegible]
gentialkräfte der Elasticitätslehre [illegible]
sich das Drehmoment unter beide [illegible]
verteilen. Auf die eine Fläche α [illegible]

zur z-Axe senkrecht steht, wirkt daher die Kraft $\frac{m}{2\zeta}$ in der positiven, auf die Gegenfläche Φ' die gleiche Kraft in der negativen x-Richtung. Diese Kräfte werden an den Trennungsflächen je zweier Volumelemente wirken und natürlich an Intensität sich continuirlich von Punkt zu Punkt im Raum ändern. Da aber Φ' und Φ sich dadurch unterscheidet, dass z um ζ grösser ist, so wirkt mit Beachtung des Kleinen 2. Ordnung auf letztere Fläche die Kraft:

$$\frac{1}{2\zeta}\left(m + \frac{dm}{dz}\zeta\right)$$

Beide Kräfte zusammen liefern daher:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dm}{dz} = \frac{\xi\eta\zeta}{4\pi}\cdot\frac{d\left(\frac{b}{\mu}\right)}{dz}$$

in der x-Richtuug. Ganz analog ist die Resultirende:

$$-\frac{\xi\eta\zeta}{4\pi}\frac{d\left(\frac{c}{\mu}\right)}{dy}$$

Zieht man von diesen Molekularkräften den Reibungswiderstand $C\frac{dF}{dt}$ ab, setzt die so erhaltene Gesammtkraft gleich der mit der Masse $\frac{k\xi\eta\zeta}{4\pi}$ multiplicirten Beschleunigung in der x-Richtung, und multiplicirt schliesslich mit $\frac{4\pi}{\xi\eta\zeta}$, so folgt sofort die obige Gleichung:

$$k\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi C\frac{dF}{dt} = \frac{d\left(\frac{b}{\mu}\right)}{dz} - \frac{d\left(\frac{c}{\mu}\right)}{dy}.$$

Die Grundgleichungen des Elektromagnetismus für bewegte Körper findet man hieraus, indem man unter $x\ y\ z$

nicht die Coordinaten einer fixen Stelle des Raumes, sondern eines Punktes der ponderabeln Körper versteht, welcher deren etwaige Bewegung mitmacht. In Räumen, wo sich keine ponderable Materie befindet, kann dem Aether jede beliebige damit verträgliche Bewegung zugeschrieben werden. Diese Bewegungen müssen sich mit den im früheren beschriebenen Bewegungen superponiren. (Vergl. Hertz über die Grundgleichungen der Elektrodynamik in bewegten Körpern. Wied. Ann. Bd. 41. p. 369; 1890. Ges. Abh. pag. 256.)

Wie man sieht, basirt die gesammte Beweisführung auf den Ausdrücken 2), 4), 5), 6) für die Energie des Aethers. Man kann nun den Ausdruck 2) auch in anderer Weise als durch die bisher superponirten Drehmomente erhalten. Man denke den Aether in einem isotropen Medium als einen homogenen, isotropen, elastischen Körper und F, G, H als die Verschiebungen eines Teilchens desselben, die Energie der elastischen Kräfte ist dann, wie bekannt:

$$\begin{aligned} \Lambda = K\Big[\Big(\frac{dF}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dG}{dy}\Big)^2 + \Big(\frac{dH}{dz}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{dG}{dz}+\frac{dH}{dy}\Big)^2 \\ + \frac{1}{2}\Big(\frac{dH}{dx}+\frac{dF}{dz}\Big)^2 + \Big(\frac{dF}{dy}+\frac{dG}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}\Big)^2\Big] \end{aligned} \qquad 13)$$

(Vergl. Kirchhoff 11. Vorlesung über Mechanik 3. Auflage pag. 122.)

Wir wollen $\Theta = -1$ setzen und jedes Glied von der Ferne

$$\int d\tau K \frac{d\,F}{d\,x} \cdot \frac{d\,G}{d\,y}$$

zuerst partiell nach x, hierauf partiell nach y integrieren. Wenn K überall denselben Wert hat, die Trennungsfläche zweier Körper keine mathematische Discontinuitätsstelle enthält, und F, G, H an der im Unendlichen gedachten Begrenzungsfläche des gesammten betrachteten Körpersystems

verschwinden, so verschwinden auch die auf die Oberfläche bezüglichen Glieder, und die Gleichung 13) verwandelt sich in:

$$\varLambda = \frac{K}{2}\left[\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)^2+\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)^2\right],$$

was mit dem Ausdruck 2) übereinstimmt, wenn man $K = \frac{1}{4\pi\mu}$ setzt. Es würden also dann ebenfalls die Maxwell'schen Gleichungen für den Elektromagnetismus folgen. Hierbei ist freilich zu bemerken, dass für einen festen Körper mit freier im Endlichen liegenden Oberfläche Θ keinen negativen Wert haben kann. Allein bei einem überall unbegrenzten Körper, wie es der Aether ist, dürften auch negative Werte von Θ zulässig sein, wenigstens sobald es sich nur um eine dynamische Illustration, wie hier, handelt.[1]) Schreibt man obendrein dem Aether Incompressibilität zu, so ist eo ipso:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0$$

und der Factor Θ, welcher bei dieser Grösse steht, gleichgültig und daher kommen die Maxwell'schen Gleichungen nicht bloss für $\Theta = -1$, sondern für jeden beliebigen Wert des Θ zum Vorschein. Namentlich gilt dies auch für $\Theta = \infty$, was Incompressibilität zur Folge hat. Für andere Werte des Θ würde eine verallgemeinerte Maxwell'sche Theorie erhalten, wie sie Helmholtz aus den Fernwirkungsgleichungen ableitete. Der schreiende Widerspruch, welcher zwischen der Existenz so magnetisierbarer Körper, wie Eisen und der Annahme, dass K in allen Körpern gleich ist, zu bestehen scheint, kann, wie ich glaube, durch die Voraussetzung behoben werden, dass die hohe Magnetisierbarkeit des Eisens nicht durch Herrschen eines kleineren Wertes von K

1) Der durch $\Theta = -1$ bedingte Zustand, welchen Thomson l. c. den quasilabilen nennt, wurde entdeckt durch Loschmidt in dessen Schrift über die Natur des Aethers, Wien bei Gerold und Sohn 1862, vgl. Fortschritte der Physik, Jahrgang 1862, pag. 68.

in seinem Innern bewirkt wird, sondern durch darin schon vorherbestehende Molekülarmagnete d. h. kleine elektrische Ströme von unveränderlicher Intensität, die bei der Magnetisierung bloss gerichtet werden.

Hier ist freilich noch eines zu bemerken. Dem Aether, welchen wir anfangs als incompressible Flüssigkeit voraussetzten, werden neue Eigenschaften einer festen Substanz beigelegt. Er müsste sich also gewissen Kräften gegenüber wie ein fester, anderen wie ein flüssiger Körper verhalten. Analogien dafür an ponderabeln Körpern fehlen nicht. Man denke an Tresca's Versuche über den Ausfluss fester Körper, welche mit grossem Drucke durch Oeffnungen gepresst werden. Bei solchen Körpern werden trotz der Anwendbarkeit der Elasticitätsgleichungen innerhalb gewisser Grenzen doch die Verschiebungen F, G, H einen beliebig grossen Wert annehmen können. Die Theorie dieser Körper ist offenbar die Erforschung der Natur des Aethers von grösster Wichtigkeit. Vgl. Stokes, über die Natur des Aethers, wie sie sich aus der Aberration ergibt. Phil. mag. July 1846. Scient. pap. vol. I pag. 153. Hier will ich nur noch eine Untersuchung anschliessen, ob diese Hypothese nicht in quantitativer Beziehung auf Widersprüche stösst.

Sei ein homogenes, isotropes Medium, z. B. Luft gegeben. Daselbst habe C einen sehr kleinen Wert; bei gegebenem Werte der Geschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2}$$

des Aethers sei also die in der Zeit und Volumeneinheit in Wärme umgesetzte lebendige Kraft des Aethers $C\omega^2$ sehr klein. Ein solcher Körper heisst ein schlechter Elektricitätsleiter, weil bei gegebener Stromstärke $\delta = C\omega$ umgekehrt die erzeugte Joule'sche Wärme $\frac{\delta^2}{C}$ sehr gross ist. Sei:

$$F = \frac{dW}{dx}; \quad G = \frac{dW}{dx}; \quad H = \frac{dW}{dz}.$$

Der Druck an irgend einer Stelle ist dann:

$$p = p_0 - \frac{k}{8\pi}\left[\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz}\right)^2\right]$$

Die gesammte Kraft X, welche auf einen im Aether befindlichen Körper in der Richtung der x-Axe wirkt, ist:

$$X = \int p\, d\, s \cos(n, x) = \int\!\!\int p\, d\, y\, d\, z = \int \frac{d\, p}{d\, x} d\, \tau$$

wobei $d\tau$ ein Volumelement, $d\, s$ ein Oberflächenelement des Körpers, n die zu letzterem gezogene Normale ist. Die Substitution des Wertes für p liefert:

$$X = -\int d\, \tau \frac{k}{4\pi}\left[\frac{d\, W}{d\, x}\cdot\frac{d^2 W}{d\, x^2} + \frac{d\, W}{d y}\cdot\frac{d^2 W}{dx dy} + \frac{d\, W}{d z}\cdot\frac{d^2 W}{d x\, d z}\right]$$

und die partielle Integration liefert:

$$X = \int k \frac{d\tau}{4\pi}\frac{d\, W}{d\, x}\Delta W$$

Setzt man $\Delta W = -4\pi\, \varepsilon$ und betrachtet bloss die Coordinaten $\xi\, \eta\, \zeta$ der elektrischen Masse $\varepsilon\, d\, \tau$ als variabel, so erhält man:

$$X = -k\frac{d}{d\, \xi}\int \varepsilon\, W d\, \tau$$

(Vergl. Maxwell scient. pap. vol. I pag. 497.)

Wir wollen hier aber nur ein ganz specielles Beispiel in einer ganz directen Weise behandeln. In dem oben beschriebenen Medium sollen sich zwei gleichnamig geladene Körper befinden. Der erste derselben soll nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkte A und dem Radius ϱ, der zweite nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkt B und dem Radius ϱ' abweichen. Wir wählen A zum Coordinatenanfangspunkt und ziehen die negative Abscissenaxe gegen B hin. Die Länge $A\, B = \gamma$ soll sehr gross sein gegenüber den beiden Radien ϱ und ϱ'. Setzen wir wieder:

$$F = \frac{dW}{dx}; \quad G = \frac{dW}{dy}; \quad H = \frac{dW}{dz},$$

so entspricht diesem Problem bekanntlich die Lösung:

$$W = \frac{M}{r} + \frac{N}{s},$$

wobei M und N Functionen der Zeit, r und s die Entfernungen des Punktes mit den Coordinaten $x\ y\ z$ (des Aufpunktes, von A respective B sind. Ferner ist:

$$\varphi = \frac{dV}{dx}; \quad \chi = \frac{dV}{dy}; \quad \psi = \frac{dV}{dz};$$

wobei V die Ableitung von W nach der Zeit ist, also:

$$V = \frac{M'}{r} + \frac{N'}{s}, \text{ wo:}$$

$$M' = \frac{dM}{dt}; \quad N' = \frac{dN}{dt}.$$

Dies liefert überall $a = b = c = 0$. Daher folgt aus den Gleichungen 12):

$$u = p + \frac{df}{dt} = -C\varphi - \frac{k}{4\pi}\frac{d\varphi}{dt} = 0, \text{ also:}$$

$$\left. \begin{aligned} M' &= \alpha\, e^{-\frac{4\pi C t}{k}} \\ N' &= \beta\, e^{-\frac{4\pi C t}{k}} \end{aligned} \right\} \qquad 14)$$

α und β sind Constanten.

Das Aethervolumen, welches in der Zeit dt dem ersten Körper entströmt, ist:

$$4\pi\varrho^2 \frac{M'}{\varrho^2} dt;$$

alles andere kann als unendlich klein vernachlässigt werden. Der gesammte Aether, welcher von der Zeit 0 bis zur Zeit ∞

dem ersten Körper entströmt, womit dieser also geladen war, hat nach dem Ausströmen das Volumen:

$$\Omega = 4\pi \cdot \int_0^\infty M' \, dt = k \frac{\alpha}{C} \tag{15}$$

da $\frac{k}{4\pi}$ die Dichte des Aethers nach dem Ausströmen ist. (Die Körper selbst können aus beliebiger ponderabler Masse bestehen, worin wir uns den Aether durch irgend welche Kräfte (chemische) beliebig verdichtet denken.)

Die Masse des Aethers, womit der erste Körper geladen war, ist also:

$$m = \frac{k^2 \alpha}{4\pi C} \tag{16}$$

Dieselbe Grösse hat für den zweiten Körper den Wert:

$$\frac{k^2 \beta}{4\pi C}$$

Wir wollen nun die gesammte Kraft X suchen, welche auf den ersten Körper infolge des Aetherdruckes ausgeübt wird. Derselbe sendet beständig durch innere Kräfte Aether normal zu seiner Oberfläche aus. Wäre er absolut kugelförmig, so müsste die durch obige Formeln angegebene Aetherbewegung ein wenig modificiert werden, damit die Aetherausstrahlung überall normal zur Körperoberfläche geschieht. Es vereinfacht die Rechnung, wenn man umgekehrt die Gestalt des Körpers so von der Kugelform abweichen lässt, dass dessen Oberfläche überall senkrecht auf der durch die obigen Gleichungen definierten Aetherströmung steht; d. h. der Gleichung:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{s} = c$$

genügt, wobei c eine Constante ist.

Seien x y z die Coordinaten eines Punktes der Körperoberfläche und setzen wir:

$$y^2 + z^2 = \eta^2$$

so ist also:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma^2 + 2\gamma x + x^2 + \eta^2}} = c,$$

also, da γ gross gegen r ist:

$$\frac{\alpha}{r} = c + \frac{\beta x}{\gamma^2} \tag{17)}$$

Der Druck im Punkte mit den Coordinaten $x\,y\,z$ ist (wieder mit Vernachlässigung des unendlich kleinen höherer Ordnung):

$$p = p_0 - \frac{k}{8\pi}\left(\frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{2\,\alpha\,\beta\,x}{r^3\,\gamma^2}\right)$$

p_0 bedeutet den Druck in sehr grosser Entfernung. Setzen wir in der Klammer im ersten Glied für $\frac{1}{r^4}$ seinen Wert aus der Gleichung 17) ein und dann in den Gliedern von der niedrigsten Grössenordnung für c wieder seinen angenäherten Wert $\frac{\alpha}{r}$ so folgt:

$$p = p_0 - \frac{k}{4\pi}\left(\frac{c^4}{\alpha^3} + \frac{6\,\alpha\,\beta\,x}{r^3\,\gamma^2}\right).$$

Sämmtliche Punkte des Körpers, für welche x zwischen x und $x + dx$, η zwischen η und $\eta + d\eta$ liegt, besetzen einen Gürtel von der Fläche:

$$2\pi\eta\sqrt{dx^2 + d\eta^2}.$$

Der Druck, welcher auf diesen Gürtel wirkt, hat in der Richtung der positiven Abscissenaxe die Componente $-2\pi p d\eta$. Da $\eta\,d\eta$, über den ganzen Körper integriert, gleich Null ist, so verschwinden dabei die beiden ersten constanten Glieder im Ausdruck von p, und die gesammte auf den ersten Körper in der Richtung der Abscissenaxe wirkende Kraft ist:

$$X = \frac{3 k \alpha \beta}{2 \gamma^2} \cdot \int \frac{x \eta d \eta}{r^3}$$

Hier kann der Körper wieder als Kugel betrachtet und

$$x = r \cos \vartheta$$
$$\eta = r \sin \vartheta$$

gesetzt werden, wodurch man, da r constant ist, erhält:

$$X = \frac{3 k \alpha \beta}{2 \gamma^2} \cdot \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d \vartheta = \frac{k \alpha \beta}{\gamma^2}$$

Es soll nun das Dielectricum so schlecht leiten, dass die Ladung in T Tagen von 1 auf $\frac{1}{e}$ sinkt ($e = 2{,}718 \cdots$). Dann ist:

$$\frac{4\pi C}{k} = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60 \, T \sec}, \quad C = \frac{k}{10^6 \, T \sec}.$$

Ferner soll jede der geladenen Kugeln R cm Radius haben und zu Anfang mit 30000 V Volt geladen worden sein. Ein Volt ist in elektromagnetischem Maasse das Potential:

$$\frac{10^5 \sqrt{\mathrm{gr\,cm}^3}}{\sec^2};$$

in elektrostatischem Maasse:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{gr\,cm}}}{300 \sec}.$$

Da das Potential einer Kugel gleich der Elektricitätsmenge dividiert durch den Kugelradius ist, so ist die auf jeder der Kugeln vorhandene Elektricitätsmenge in statischem Maasse gemessen:

$$\varepsilon = \frac{100 \, R \sqrt{\mathrm{gr\,cm}^3}}{\sec} V.$$

Die Kraft, mit welcher sich die Kugeln abstossen, ist $X = \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}$, und vergleicht man dies mit dem oben gefundenen Werte von X, so folgt:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} = \frac{100}{\text{sec}} V R \sqrt{\frac{\text{gr cm}^3}{k}}, \text{ also:}$$

$$\Omega = 10^8 V \cdot T \cdot R \sqrt{\frac{\text{gr cm}^3}{k}};$$

$$m = \frac{10^8}{4\pi} V \cdot T \cdot R \sqrt{k \cdot \text{gr cm}^3}.$$

Setzen wir die Dichte des Aethers 10^{16+2h} mal kleiner als die des Wassers, also:

$$k = 10^{-16-2h} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \cdot 4\pi, \text{ so folgt:}$$

$$\Omega = \frac{10^h}{\sqrt{4\pi}} V\,T\,R \text{ cm}^3; \quad m = \frac{10^{-h}}{\sqrt{4\pi}} V\,T\,R \text{ gr}.$$

Thomson fand als untere Grenze für die Dichte des Aethers 156.10^{-18}grcm. Wäre dieselbe wirklich gleich dieser unteren Grenze, so hätte man h etwa $= 2,1$, $m = \frac{VTR}{440}$ gr. Wäre für das Medium, in welchem sich die angenommene Kugel von einem cm-radius befindet, $R = 1$, $T = 1$, d. h. die Ladung würde in einem Tage auf den 2,718ten Teil herabsinken, so müsste für $V = 1$, d. h. bei einer Ladung mit 30 000 Volt, bereits eine Aethermasse von $\frac{1}{440}$ gr in sie hinein, oder aus ihr herausgeschafft werden. Nun giebt es unzweifelhaft Media, wo T weit grösser ist, sodass m noch grösser ausfiele. Allein man muss bedenken, dass für die enorme von uns angenommene Ladung die Elektricitätsleitung und -Verbreitung wesentlich complicierteren Gesetzen folgt, sodass die Anwendbarkeit der einfachen linearen Gleichungen

Maxwell's fraglich wird. Wenn daher diese Zahl auch jedenfalls an der Grenze des möglichen liegt, so kann doch meiner Ansicht nach gerade nicht behauptet werden, dass die vorliegende mechanische Analogie in quantitativer Hinsicht heute auf einen völligen Widerspruch stosse.

Behufs weiterer Versinnlichung unserer mechanischen Analogie betrachten wir dasselbe Dielectricum (Luft) wie im vorigen. Es sollen jedoch darinnen sich verschiedene Körper befinden, in welchen k und C andere Werte haben. In der Luft und in allen Körpern, worin C klein von derselben Grössenordnung ist, werden φ, χ, ψ sehr lange endlich bleiben, dagegen werden, weil alles fast stationär wird, deren Differentialquotienten nach der Zeit, sowie p, q, r und u, v, w bald sehr klein werden. Daher wird gemäss der Gleichung 12):

$$\frac{a}{\mu} dx + \frac{b}{\mu} dy + \frac{c}{\mu} dz$$

ein vollständiges Differential dW, d. h. die magnetischen Kräfte haben ein Potential. Aus Gleichung 2) folgt ferner:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{dW}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{dW}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu \frac{dW}{dz}\right) = 0.$$

Da W und μ überall stetig und die erstere Grösse im Unendlichen gleich Null ist, so folgt hieraus:

$$W = a = b = c = 0.$$

Obige Gleichung ist nämlich die Bedingung dafür, dass:

$$\int\int\int \mu \, dx \, dy \, dz \left[\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz}\right)^2\right]$$

ein Minimum ist, was nur für $W = 0$ zutrifft.

Man sieht daher durch diese Darstellung den Grund ein, weshalb die Magnetisierung so geschieht, dass die magnetische Energie, d. h. die Summe der mit μ multiplicierten

Quadrate der magnetischen Momente der Volumenelemente ein Minimum wird, sowie anderer ähnlicher Minimumsätze. (Vergl. Stefan, Wien. Sitzungsber. Bd. 99 pag. 319, 1890.)

Wären in einzelnen Körpern Ampère'sche Molekularströme, so würde in diesen und an ihrer Oberfläche u, v, w nicht gleich Null. Man würde daher ein von Null verschiedenes magnetisches Potential bekommen. Sehr rasche Veränderungen desselben mit der Zeit (magnetische Ströme) würden elektrische Kräfte erregen, wie sie freilich noch nicht beobachtet wurden. Wir wollen jedoch hier solche Fälle ausschliessen und überall $a = b = c = 0$ setzen. Dann folgt aus den Gleichungen 2), dass:

$$\varphi\, d x + \chi\, d y + \psi\, d z$$

ebenfalls ein vollständiges Differential $d V$ ist, dass daher auch die elektrischen Kräfte ein Potential haben. Die Trennungsfläche zweier Körper denken wir uns als eine sehr dünne, aber continuierliche Uebergangsschicht, in welcher dieselben Bedingungen erfüllt sind, die wir überall annehmen. Da die Gleichungen 2) auch im Innern dieser Uebergangsschicht erfüllt sein müssen, so findet man in bekannter Weise, indem man sie nach t differentiiert und die Normale zur Uebergangsschicht als Abscissenaxe wählt, dass der Differentialquotient von V nach einer Richtung tangential zur Uebergangsschicht zu beiden Seiten derselben den gleichen Wert haben muss. Die durch die Flächeneinheit $d v$ der Uebergangsschicht hindurchgehende Aethermasse ist:

$$\frac{k}{4\pi} \cdot \frac{d V}{d n}$$

wenn die Richtung n normal zur Uebergangsschicht ist. Da dieselbe Aethermasse auf der anderen Seite austreten muss, so muss dieser Ausdruck zu beiden Seiten denselben Wert haben. Dies sind die alten bekannten Bedingungsgleichungen an der Trennungsfläche zweier Dielectrica.

Hat in einem Körper C einen grösseren Werth, so nimmt daselbst (cf. Gleichung 14) V rascher ab (die dielektrische Erscheinung, dielektrische Absorption). Hat C einen sehr grossen Werth, d. h. ist der Körper ein Leiter, so muss V bald constant werden. Die Aetherströmung umgibt dann den betreffenden Körper wie Wasser einen eingetauchten festen Körper. Die dadurch entstehende Modification des Werthes von V nennt man die Elektrisirung des eingetauchten Körpers durch Influenz. Man kann diese Modification auch dadurch entstanden denken, dass sich zur Aetherbewegung, welche ohne Anwesenheit des Leiters stattfinden würde, noch ein Ausströmen von Aether von der positiv influenzirten Seite des Körpers, ein Einströmen von der negativen superponirt, von der Beschaffenheit, dass dadurch die Aetherbewegung überall tangential zur Oberfläche des Körpers gemacht wird. Im Körper selbst ist nur ein ganz schwacher Strom, welcher die langsame Abnahme der elektrischen Influenz bewirkt, die durch die allmähliche Zerstreuung der Elektricität an den ursprünglich geladenen Körpern bedingt ist. Dies wäre in allgemeinen Zügen das Bild der sogenannten Elektrostatik.

Um uns ein Bild von der Aetherbewegung beim stationären elektrischen Strome zu verschaffen, wollen wir einen unendlich langen geraden Kreiscylinder vom Radius ρ betrachten, dessen Axe die Abscissenaxe ist und der in Richtung der positiven Abscissen vom positiven elektrischen Strome durchflossen wird. Das elektrostatische Potential, welches nöthig ist, um einen solchen Strom zu treiben, wird in unendlicher Entfernung von der Abscissenaxe unendlich. In der alten Fernwirkungstheorie schadet dies wenig, da man die elektrostatischen und elektrodynamischen Erscheinungen daselbst völlig getrennt betrachtet. Es muss eher als ein Vorzug der neuen Theorie betrachtet werden, dass dabei eine solche Trennung überhaupt nicht angeht.

Um das elektrostatische Potential endlich zu erhalten, können wir den Cylinder von einem coaxialen Hohlcylinder von sehr grossem Radius R umgeben denken, der zur Erde abgeleitet und ohne elektromotorische Kräfte ist. Sei $\frac{A}{C}$ die Stromdichte im massiven Cylinder, so muss daselbst F das Glied $-At$ enthalten. Da wir es mit einem Leiter zu thun haben, setzen wir $k=0$ und es folgt aus der Gleichung 80) meiner „Vorlesungen über Maxwell's Theorie", welche ja auch leicht aus den hier entwickelten Gleichungen gewonnen werden kann:

$$F = -At - \pi\mu A C r^2, \quad G = H = 0$$

wobei $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ die Distanz des betrachteten Punktes von der Axe des Cylinders vorstellt. Hieraus folgt im Innern des massiven Cylinders:

$$a = 0; \quad b = -2\pi\mu A C z; \quad c = 2\pi\mu A C y.$$

Zwischen dem massiven und dem Hohlkugelcylinder ist ein Dielectricum (Luft). Daselbst sollen μ, C, k die Werte μ', C', k' haben, wovon C' sehr klein ist. An der Trennungsfläche muss:

$$\left.\begin{aligned} a &= a' \\ \mu b &= \mu' b' \\ \mu C &= \mu' C' \\ F &= F' \\ C\frac{dG}{dt} &= \frac{k'}{4\pi}\frac{dG'}{dt} \\ C\frac{dH}{dt} &= \frac{k'}{4\pi}\frac{dH'}{dt} \end{aligned}\right\}$$

sein. Die soeben citierte Gleichung 80) liefert hier:

$$\Delta F = \Delta G = \Delta H = 0.$$

Daher muss zunächst:

$$F = -A\left(\frac{t}{l\frac{\varrho}{R}} + 2\pi\mu' C\varrho^2\right) l\frac{r}{R} + \pi A C \varrho^2 \left(2\mu' l\frac{\varrho}{R} - \mu\right)$$

sein, wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Da ferner a, b, c nicht ins Unendliche wachsen dürfen, weil dadurch unendliche Kräfte geweckt würden, so muss im Dielektricum der t enthaltende Teil von:

$$F\,dx + G\,dy + H\,dz$$

ein vollständiges Differential sein, woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} G &= -\frac{A\,t\,x\,y}{r^2\, l\frac{\varrho}{R}} \\ H &= -\frac{A\,t\,x\,z}{r^2\, l\frac{\varrho}{R}} \end{aligned}\right\}$$

Die Grösse:

$$\frac{g\,y + h\,z}{r = \varrho} = -\frac{k}{4\pi\,\varrho}\left(y\,\frac{dG}{dt} + z\,\frac{dH}{dt}\right) = \frac{k\,A\,x}{4\pi\,\varrho\, l\frac{\varrho}{R}}$$

ist das, was man die Flächendichte der freien Elektricität auf der Oberfläche des massiven Cylinders,

$$\int\left(\frac{dF}{dt}\,dx + \frac{dG}{dt}\,dy + \frac{dH}{dt}\,dz\right) = -\frac{A\,x}{l\frac{\varrho}{R}}\, l\frac{r}{R}$$

das, was man deren Potentialfunction nennt.

Für elektrostatisches Maass ist im Standardmedium $k = 1$. Von R würde man unabhängig, wenn zwei gleichbeschaffene, in entgegengesetzter Richtung durchströmte Cylinder, für deren Axen $y = 0$, $z = p$ und $z = -p$ ist, vorhanden wären, welche für $x = 0$ das elektrostatische Potential Null haben. Sind dann:

$$r = \sqrt{y^2 + (z-p)^2} \text{ und } s = \sqrt{y^2 + (z+p)^2}$$

die Entfernungen eines Punktes von der ersten resp. zweiten Axe, und ist der Radius ϱ beider Cylinder klein gegen p, so ist im ersten Cylinder:

$$F = -A\,t - \pi\,\mu\,A\,C\,r^2;\quad G = H = 0;$$
$$a = 0;\quad b = -2\pi\,\mu\,A\,C\,(z-p);\; c = 2\pi\,\mu\,A\,C\,y;$$

im zweiten Cylinder:

$$F = A t + \pi \mu A C s^2; \quad G = H = 0;$$

$$a = 0; \quad b = -2 \pi \mu A C (z + p); \quad c = 2 \pi \mu A C y$$

und im umgebenden Dielektricum:

$$F = \left(-\frac{t}{l_\varrho^{2p}} + 2 \pi \mu' C \varrho^2\right) A l_r^2 - \pi A C \varrho^2 (2 \mu' l_\varrho^{2p} + u);$$

$$G = \frac{A t x y}{l_\varrho^{2p}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right); \quad H = \frac{A t x}{l_\varrho^{2p}} \left(\frac{z - p}{r^2} - \frac{z + p}{s^2}\right);$$

$$a = 0; \; b = -2 \pi \mu' C \varrho^2 \left(\frac{z - p}{r^2} - \frac{z + p}{s^2}\right);$$

$$c = 2 \pi \mu' C \varrho^2 y \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}\right).$$

Ueber Auflösung und Wachsthum der Krystalle.

Von A. C. Gill.

(Eingelaufen 11. Juni.)

Bekanntlich werden in einem Gemenge grosser und kleiner Krystalle derselben Substanz, welches Temperaturschwankungen unterworfen ist, die kleineren Krystalle allmählich von den grösseren aufgezehrt, weil sie der Lösung bei gleichem Volumen eine grössere Oberfläche darbieten. Es könnte fraglich erscheinen, ob ausser dieser Ursache der Begünstigung der grösseren Krystalle noch eine andere vorhanden sei, d. h. ob nicht auch an und für sich unter gleichen Bedingungen ein grösserer Krystall langsamer aufgelöst werde und folglich auch schneller wachse, als ein solcher von geringeren Dimensionen.

Zur experimentellen Prüfung dieser Frage wurde zunächst Steinsalz gewählt, dessen Spaltungsstücke unzweifelhaft ein entsprechendes Verhalten zeigten, aber zur Feststellung des Gesetzes, nach welchem die aufgelöste Menge von der Grösse des Krystalls abhängt, nicht geeignet sind, weil sich zuerst die Kanten abrunden und die hierdurch hervorgebrachte Aenderung der Gestalt es unmöglich macht, genau zu bestimmen, wie viel pro Quadratcentimeter Ober-

fläche aufgelöst wurde. Um ganz einwurfsfreie Resultate zu erhalten, wurden sehr vollkommene, polirte Kugeln aus ganz homogenem Steinsalz von Herrn **Steeg und Reuter** angefertigt, und zwar solche von 6, 12 und 18 mm Durchmesser, in eine nicht ganz gesättigte Chlornatriumlösung eingehängt und 15 Minuten darin gelassen, während die Lösung, um Sättigungsdifferenzen und den Einfluss der Diffusion möglichst zu beseitigen, ununterbrochen umgerührt wurde. Es ergaben sich folgende Werthe:

Anfangs-Gewicht	End-Gewicht	Mittel-Gewicht	Die aus dem Gewicht berechneten Oberflächen	Verlust	M. g. gelöst per qcm	Berechnete Werthe
6.6519	6.3578	6.50485	10.028	0.2941	29.33	29.44
1.9641	1.8137	1.8889	4.397	0.1504	34.21	32.98
0.2497	0.2061	0.2279	1.054	0.0436	41.32	42.51

Wenn die per Oberflächen-Einheit gelöste Menge eine Function der Grösse oder der Krümmung der Kugel ist, so [illegible] Beziehung zum Radius [illegible]. In der That verhalten sich die in der [illegible] Zahlen sehr nahe umgekehrt, wie die [illegible] man dieses Gesetz zu Grunde [illegible] der drei Kugeln ausgehend, [illegible] erhält man drei Reihen [illegible] die unter „Berechnete Werthe" angegebenen Zahlen [illegible]

[illegible] stärkeren Lösung [illegible] aufgelöste Menge

[illegible]

Um eine ganz andere Diffusionsgeschwindigkeit und Capillaritätsconstante ins Spiel zu bringen, wurde eine Versuchsreihe mit verdünntem (35 %) Alkohol angestellt und gefunden:

	Gelöst pro Quadratcentimeter	Berechnet:
1.	25,57	24,83
2.	28,53	28,54
3.	34,84	35,90.

Aehnliche Resultate lieferten einige Versuche mit Kaliumbichromat, doch gelang es noch nicht, Kugeln dieser leicht spaltbaren Substanz frei von Sprüngen zu erhalten, und in Folge dessen entstanden natürlich Unregelmässigkeiten in der Auflösung, welche die Genauigkeit der Zahlen erheblich beeinflussten.

Da jedoch auch hier die Geltung derselben Beziehung angenähert hervortrat, und es somit erschien, dass dieselbe unabhängig von dem Krystallsystem sei und möglicherweise ebenso für krystallinische Aggregate und amorphe Körper gelte, wurden aus einem sehr dichten Aggregat von käuflichem Aluminiumsulfat Kugeln angefertigt, allerdings vorläufig nur in roher Weise mit dem Messer. Aber auch hier ergab sich in Wasser eine geringere Löslichkeit der grösseren nahezu nach demselben Gesetze.

Ist dasselbe in der That innerhalb gewisser Grenzen gültig, so muss auch umgekehrt an einem grösseren Krystall beim Wachsen sich auf der Einheit der Oberfläche in gleicher Zeit mehr Substanz absetzen, als auf einem kleineren. Ein vorläufiger Versuch mit drei verschieden grossen, frischen Spaltungsstücken von Steinsalz in derselben gesättigten Lösung ergab die gleichzeitige Gewichtszunahme pro Quadratcentimeter der Oberfläche

grösstes Spaltungsstück	7,56 mg
mittleres „	5,51 „
kleinstes „	3,74 „

Diese gefundenen Differenzen sind sogar noch etwas grösser, als sie nach dem obigen Gesetze sein sollten, doch kommt bei diesem Experiment noch der zunächst unbekannte Einfluss der Temperatur hinzu.

Die Versuche sollen nun auf eine grössere Reihe krystallisirter und amorpher Körper ausgedehnt und alsdann ausführlicher mitgetheilt werden.

Sitzung vom 2. Juli 1892.

1. Herr C. v. Kupffer macht Mittheilungen aus einer mit Unterstützung der Akademie ausgeführten umfassenden Untersuchung „über die Entwicklung des Störs".

2. Herr Ad. v. Baeyer bespricht im Anschluss an die in der Sitzung vom 11. Juni gemachte Mittheilung seine weiteren Versuche „über die Synthese des Dihydroparaxylols".

Museum in Bergen:

Aarsberetning for 1890. 1891. 8⁰.

Kgl. Preuss. geologische Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 5. 1892. 4⁰.
Abhandlungen zur geologischen Specialkarte von Preussen und Thüringen. Bd. IX. 3, mit Atlas. Bd. X. 3. 1891. 4⁰.
Jahrbuch für 1889. 1892. 8⁰.

Commission der internationalen Gradmessung in Berlin:

Verhandlungen der 1891 zu Florenz abgehaltenen Conferenz. 1892. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 24. Jahrg. 1891. Nr. 19, 20. 25. Jahrg. 1892. Nr. 1—11. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 43. Heft 3, 4. Bd. 44. Heft 1. 1891/92. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. XXII. Band. 1892. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1885. Jahrg. 41. Abth. 1—3. 1891. 8⁰.
Verhandlungen. 10. Jahrg. 1892. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie 1891. Bd. V. Nr. 18—26. 1892. Nr. 1—6. 1891/92. 8⁰.
Verhandlungen. 1890—1891. Nr. 17. 8⁰.

Kgl. Preuss. Meteorologisches Institut in Berlin:

Abhandlungen. Bd. I. Nr. 4, 5. 1892. 4⁰.
Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen im Jahre 1891. 1892. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXI. Jahrg. 1889, Heft 1, 2. 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1892. Nr. 2—26. 4⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XII. Jahrg. 1892. Heft 1—6. gr. 8⁰.

Schweizerische geologische Commission in Bern:

Beiträge zu einer geologischen Karte der Schweiz. Text. Lief. 25 und 31. 1891. 4°.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 48. Jahrg. 2. Hälfte. 1891. 8°.

Society of natural history in Boston:

Proceedings. Vol. XXV. part 2. 1891. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XII. Heft 2. 1892. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Brünn:

Verhandlungen. Bd. XXIX. 1890. 1891. 8°.
IX. Bericht der meteorologischen Commission. 1891. 8°.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

50me anniversaire de la fondation de l'Académie. Rapports sur les traveaux de l'Académie 1866—1891. 1891. 8°.
Bulletin. IV. Série, tom. V. Nr. 11. Tom. VI. Nr. 1—5. 1891/92. 8°.
Mémoires couronnés. Collection in 8°. Tom. X. fasc. 5. Tom. XI. fasc. 1—4. 1892. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Mathemat. Ertesitö. (Mathematischer Anzeiger.) Bd. VIII. 6—9. IX. 1—9. 1890/91. 8°.
Természettudományi Értekezések (Naturw. Abhandlungen). Bd. XX. 1—4. Bd. XXI. 1, 2. 1890/91. 8°.
Mathematikai Értekezések (Mathemat. Abhandlungen). Bd. XIV. 4. 1891. 8°.
Mathematikai Közlemenyek (Mathem. Mittheilungen). Bd. XXIV. 1—7. 1890/91. 8°.
Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. Bd. VIII und IX. Berlin und Budapest. 1891/92. 8°.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Mittheilungen. Bd. IX. Heft 6. 1891. 4°.
Földtani Közlöny. Bd. XXI. Heft 10—12. XXII. 1—4. 1891/92. 4°.
A Magyar Kir. Földtani entézet évkönyve. Bd. IX. 7. X. 1. 1892. 8°.
Jahresbericht für 1890. 1892. 8°.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Entrega 18. 1891. Fol.

Revista Argentina de historia natural in Buenos Aires:

Revista. Tom. I. entr. 6. 1891. 8°.

Society of natural Sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. V. Nr. 3. 1891. 8⁰.

Institut météorologique de Roumanie in Bukarest:

Annales. Tom. V. 1889. 1892. 4⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque náutico para 1893. Madrid 1891. 8⁰.

Société Linnéenne in Caen:

Bulletin. Vol. 5. fasc. 3. 4. 1891. 1892. 8⁰.
Bulletin mensuel de la commission météorologique du Calvados. 1891 Juillet—Déc. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Report on the Administration in 1889—90. 1891. Fol.
Report on the Meteorology of India. XV. year. 1891. Fol.
Monthly Weather Review. May — July 1891. Fol.
Meteorological Observations. Mai — July 1891. Fol.

Indian Museum in Calcutta:

W. L. Sclater, List of Snakes in the Indian Museum. 1891. 8⁰.

The Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXIV. part 4. XXV. part 1. 1891/92, 4⁰.
Memoirs. Vol. XXIII. 1891. 4⁰.
Palaeontologia Indica. Ser. XIII. Vol. IV. part 2. 1891. Fol.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VII. part 5. 1892. 8⁰.
Transactions. Vol. XV. part 2. 1891. 4⁰.

Museum of comparative zoölogy at Harward College in Cambridge, Mass.

Annual Report for 1890—91. 8⁰.
Bulletin. Vol. XXII. Nr. 1—4. XXIII. Nr. 1, 2. 1891/92. 8⁰.
Memoirs. Vol. XVII. Nr. 2. 1892. 4⁰.

Astronomical Observatory at Harward College in Cambridge, Mass:

Annals. Vol. XXVI. part 1. 1891. 4⁰.
46th annual Report for the year ending October 31, 1891. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bullettino mensile. Fasc. 23—25. 1892. 8⁰.
Atti. Serie IV. Vol. 3. 1891. 4⁰.

Editorial Committee in Christiania:

The Norwegian North-Atlantic Expedition 1876—1878. Zoology. Crinoidea. By D. C. Danielssen. 1892. Fol.

Norwegisches meteorologisches Institut in Christiania:

Jahrbuch für 1889. 1891. 4⁰.

K. Norwegische Universität in Christiania:

Archiv für Mathematik. Bd. XV. Heft 1. 1891. 8⁰.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32. Heft 3. 1891. 8⁰.

Journal of comparative Neurology in Cincinnati:

Journal. Vol. I. pag. 287—358. Vol. II. pag. 1—28. 1891/92. 8⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

1891. Nr. 101—104. 1892. Nr. 1—48. Fol.

Colorado scientific Society in Denver, Co.:

Proceedings. Vol. III. part 3. 1890. 8⁰.
On the ore-deposits of Newman Hill, by John B. Farish. 1892. 8⁰.
The nature of the chemical Elements by Charles Skeele Palmer. 1892. 8⁰.

Meteorologisches Observatorium der Universität Dorpat:

Meteorologische Beobachtungen. Bd. 5. Heft 3. 1892. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Transactions. Vol. XXIX. part 17. 1891. 4⁰.
Proceedings. III. Ser. Vol. II. Nr. 2. 1892. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XVIII. pag. 261—374. 1891. 8⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VI. part 3. 1892. 8⁰.

Royal physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1890—91. 1892. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. Vol. 13. disp. 4. 1890. Vol. 14. disp. 4. 1891. Vol. 15. disp. 1. 1892. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle de Genève:

Mémoires. Vol. supplémentaire. Centenaire de la fondation [illegible]
Société. 1891. 4°.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Gi[illegible]

28. Bericht. 1892. 8°.

K. *Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:*

Nachrichten. 1891. Nr. [illegible]—1[illegible]. 1892. Nr. 1—8. gr. 8°.

K. *Sternwarte in Göttingen:*

Astronomische Nachrichten. Herausg. v. Wilh. Schur. Theil II. [illegible]

Lebensversicherungs-Bank für Deutschland in Gotha:

63. Rechenschaftsbericht für 1891. 1892. 4°.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville.

Bulletin. Vol. [illegible], part [illegible]. 1892. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Greifswald:

Mittheilungen. 23. Jahrg. 1892. 8°.

K. *Niederländische Regierung in Haag*

[illegible] Die Triangulation von Java. Abth. III. 18[illegible]

Leopoldinisch-Karolinische deutsche Akademie der Naturfo[illegible] in Halle:

Leopoldina. Heft 27. Nr. [illegible]. Heft 28. Nr. 1—10. 1891/[illegible]

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens. Tom. IV. La Haye 1891. 4⁰.
Natuurkundige Verhandelingen. 4de Verz. Deel V. 2de stuk. Harlem 1892. 4⁰.
Archives Néerlandaises. Tom. 26. livr. 1. 1892. 8⁰.

Naturhistorisch-medizinischer Verein in Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. IV. Heft 5. 1892. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Fennia 4. 1891. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mittheilungen. 41. Jahrg. 1891. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Bd. III. Abth. 1. 1889. Fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 26. Heft 3 und 4. 1892. 8⁰.

Section médicale de la Société des Sciences expérimentales à l'Université de Kharkow:

Trudy. Tam 1. 1891. 8⁰.

Kommission z. wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Ergebnisse der Beobachtungsstationen 1891. Heft 1—3. 1892. 4⁰.
Atlas deutscher Meeresalgen. Heft II. Lief. 3—5. 1892. Fol.

Naturwissenschaftlicher Verein in Kiel:

Schriften. Bd. IX. 2. 1892. 8⁰.

Aerztlicher naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:

2. Heft der Zeitschrift Értesitö. 1891. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Höhenschichtenkarte von Ost- und Westpreussen. Section: Danzig, Bromberg und Königsberg. 3. Blatt. 1891.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Kopenhagen:

Mémoires. Classe des Sciences. Tom. V. Nr. 4. Tom. VII. Nr. 3, 4. 1891. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Pamietnik matematik. Tom. 18. Nr. 1. 1891. 3⁰.
Rozprawy matemat. Tom. 21. 23. 1891. 8⁰.

Sprawozdanie fizyjograf. Tom. 25. 26. 1890. 8°.
Zbiór antropolog. Tom. 14. 15. 1890/91. 8°.
Kotula, Distributio plantarum in montibus Tatricis. 1889—90. 8°.
Atlas geologiczny IV. 1891. Fol.

Société Vaudoise des Sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 3e Série. Vol. XXVII. Nr. 105, 106. 1892. 8°.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Teil XI. Heft 1. 1892. 8°.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. 26. Jahrg. Heft 4. 27. Jahrg. Heft 1. 1891/92. 8°.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte der mathem.-physikalischen Classe 1891. Heft III, IV, V. 1892. Nr. 1. 1891/92. 8°.
Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe. Bd. XVIII. Nr. 2—6. 1892. 4°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 45. Heft 1—11. 1892. 8°.

University of Nebraska in Lincoln:

5th annual Report of the Agricultural Experiment Station. 1891. 8°.
Bulletin of the Agricultural Experiment Station. Vol. V. Nr. 21. 1892. 8°.

Zeitschrift „La Cellule" in Löwen:

La Cellule. Tom. VII. Fasc. 2. 1891. 4°.

Her Majesty's Government in London:

Report of the scientific Results of the Voyage of H. M. S. Challenger. Deep Sea Deposits. 1891. 4°.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XIII. part 2. 1892. 8°.
List of the Members 1891. 8°.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 50. Nr. 303—306. Vol 51. 308. 309. 1891/92. 8°.
Catalogue of scientific Papers (1874—1883). Vol. IX. 1891. 4°.

Royal Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 52. Nr. 2—7. 1891/92. 8°.

Chemical Society in London:

Journal. Nr. 350—355. Jan. bis July 1892 u. Supplem. Number to Vol. 59 and 60. 1892. 8⁰.
Proceedings. Session 1890—91 Nr. 94. Session 1891—92 Nr. 104—110. Session 1892—93 Nr. 111—113. 1891/92. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1892. part I—III. 8⁰.
List of Fellows. 1892. 8⁰.

Zoological Society in London:

Transactions. Vol. XIII. part 4. 1892. 4⁰.
Proceedings. 1891. part IV und Index 1881—1890. 1892. part. I. 1892. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Vol. 45. Nr. 1156—1174. Vol. 46. Nr. 1175—1179. 1891/92. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Vol. XVIII. Fasc. 2. XIX. Fasc. 1. 1891/92. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. II. Ser. Tom. XVII. 1892. 8⁰.

Institut Grand-Ducal (Section des sciences naturelles) in Luxemburg:

Publications. Tom. XXI. 1891. 8⁰.
Observations météorologiques de 1884—1888. 1890. 8⁰.

Government of Madras (India):

Results of Observations of the fixed stars at Madras in the years 1871—1873. 1892. 4⁰.
Results of the Meteorological Observations at Madras 1861—1890. 1892. 4⁰.

Real Academia de ciencias in Madrid:

Memorias. Tome XV. 1890/91. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen 1891. 1892. 8⁰.

Observatorio meteorológico magnético in México:

Boletin mensual. Tom. III. Nr. 3. 1892. 4⁰.

Sociedad científica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y revista. Tom. V. Nr. 3—6. 1892. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle upon Tyne:

Transactions. Vol. 40. part 4. Vol. 41. part 1, 2. 1891/92. 8°.

American Journal in New-Haven:

The American Journal of Science. Vol. 42. Nr. 250—252. Octob. bis Dec. 1891. Vol. 43. Nr. 253—256. Jan. bis April 1892. 8°.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. V. Nr. 1—3. 1891. 8°.
Transactions. Vol. X. Nr. 2—6. 1891. 8°.

The Journal of comparative medecine in New-York:

Journal. Vol. XIII. Nr. 2, 3. 1892. 8°.

American Museum of natural History in New-York:

Bulletin. Vol. III. Nr. 2. 1891. 8°.

American chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XIII. Nr. 9. 10. XIV. 2. 3. 1891/92. 8°.

Geological Society of America in New-York:

Bulletin. Vol. I. II. 1890/91. 8°.

American geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXIII. Nr. 4. XXIV. Nr. 1. 1891/92. 8°.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XVI. 2. u. mathem. Abtheilung. Tom. XII. 1892. 8°.

Canadische Regierung in Ottawa:

Documents relatifs à l'unification de l'heure. 1891. 8°.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Bullettino. Tom. 5. Nr. 2. 1892. 8°.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VI. Fasc. 1, 2. 1892. 8°.

Collegio degli Ingegneri et Architetti in Palermo:

Atti del Congresso degli Ingegneri e degli Architetti in Palermo nel 1892, parte I. 1892. 4°.
Studio preliminare o programma di progetto di un canale intermarittimo Venezia—Spezia, per G. A. Romano e G. Fiandra. Con tavole illustrative. Venezia 1889. 4°.

Sociedad Mexicana de historia natural in Mexi

La Naturaleza. II. Serie. Tomo 2. Nr. 1. 1891. Fol.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Mexico

Mittheilungen. Bd. I. Heft 4. 1892. Fol.

Minnesota Academy of natural sciences in Minna

Bulletin. Vol. III. Nr. 2. 1891. 8⁰.

Società dei Naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III. Vol. X. Fasc. 2. 1892. 8⁰.

Zoological Survey of Canada in Montreal:

Annual Report. (New Series). Vol. IV. 1888—89. 1890.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau

Bulletin. Année 1891. Nr. 2—4. 1892. Nr. 1. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, Cal.:

Reports on the Observations of the total eclipse of the 21—22, 1889. Sacramento 1891. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und

Correspondenzblatt. 1891. Nr. 10—12. 1892. Nr. 1—4. 4

K. Staatsministerium des Innern in München

C. W. v. Gümbel, geognostische Beschreibung der fränl Kassel 1891. 4⁰.

K. Staatsminisierium des Innern für Kirchen- und Schu heiten in München:

Veröffentlichung der K. Württembergischen Commission f nationale Erdmessung. Heft III. 1892. 4⁰.
Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse i Rheingebiet. Heft I, II. Berlin 1891. Fol.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. I. 1891. 1892. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in N

Rendiconto. Ser. II. Vol. V. Fasc. 1—12. Vol. VI. Fasc. 1—5.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. X. Heft 2. 1891. 8⁰.

North of England Institute of [illegible] *Tyne.*
Transactions. [illegible]

[illegible]
The American [illegible]

[illegible]
Annals. [illegible]
Transactions. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]
Journal. [illegible]

[illegible]
Bulletin. Vol. [illegible]

[illegible]
Bulletin. [illegible]

[illegible]

Canadian [illegible]
Documents relatifs [illegible]

[illegible]
Bulletin. [illegible]

[illegible]
Report [illegible]

[illegible]

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1892. Nr. 1—25. 8⁰.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 114. Nr. 1—25. 1892. 4⁰.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 601—606. Janvier-Juni 1892. 4⁰.

Société de géographie a Paris:

Comptes rendus. 1891. Nr. 19. 20. 1892. Nr. 1—11. 8⁰.
Bulletin. IV. Sér. Tom. XII. 3e et 4e trimestre 1891. 1891/92. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XIX. Nr. 7. 8. XX. Nr. 1. 2. 1891/92. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVI. Nr. 9, 10. XVII. Nr. 1—5. 1891/92. 8⁰.
Mémoires. Tom. IV. part. 5. Tom. V. part. 1—3. 1891/92. 8⁰.

Zeitschrift L'Électricien in Paris:

L'Électricien. II. Sér. Tom. III. Nr. 53. 55—78. 1892. gr. 8⁰.

Académie Impériale des Sciences in St. Petersburg:

Mémoires. VII. Série. Tom. XXXVIII. Nr. 4—8. Tom. XXXIX. 1891. 4⁰.
Bulletin. Nouv. Série. Tom. 2. Nr. 3. 4. 1892. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XI. Fasc. 2, 1892. 8⁰.

Chemisch.-physikal. Gesellschaft an der Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXIII. Heft 9. XXIV. 1—4. 1891/92. 8⁰.

Institut Impérial de médecine expérimentale in St. Petersburg:

Archives. Tom. I. Nr. 1, 2. 1892. 4⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Repertorium für Meteorologie. Bd. XIV. 1891. 4⁰.
Annalen. Jahrg. 1890. Theil. II. 1891. 4⁰.

Société des Naturalistes in St. Petersburg:

Trudy. Vol. XXI. Livr. 2. Vol. XXII. 1890/91. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1891, part II u. III. 1891. 8⁰.

Pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. 39th annual Meeting 1891. 8⁰.

Second Geological Survey of Pennsylvania in Philadelphia:

Eastern middle Anthracite Field. Atlas. Part III, IV, VI. 1889. 8⁰.
Report of Progress. 1888/89. 1891. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. 1. Memorie. Vol. VI. Fasc. 3.
2. Processi verbali. Vol. VIII. pag. 1—84. 1892. 4⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Casopis. Bd. XXI. 1—4. 1892. 8⁰.
Vyročni zpráva. 1890—91. 8⁰.

Verein für Natur- und Heilkunde in Presburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. 7. 1891. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Revista. Anno VI. 1891. Nr. 11 u. 12. Anno VII. 1891/92. Nr. 1. 4⁰.

Rochester Academy of Science in Rochester:

Proceedings. Vol. I. Nr. 2. 1891. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Rendiconti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Vol. I. 1 Semestre. Fasc. 1—10. 1892. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1891. Nr. 4. 1892. Nr. 1. 8⁰.

Rassegna delle scienze geologiche in Italia in Rom:

Rassegna. Anno I. Fasc. 3. 4. Roma 1892. 8⁰.

Ufficio Centrale meteorologico in Rom:

Annali. Serie II. Vol. IX. parte 1—5. 1887. 1890. 4⁰.

American Association for the Advancement of science in Salem:

Proceedings. 39th Meeting at Indianopolis, Aug. 1890. 1891. 8⁰.

Essex Institute in Salem:

Bulletin. Vol. 21. Nr. 7—12. 1889. Vol. 22. Nr. 1—12. 1890. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht über die Thätigkeit 1889/90. 1891. 8⁰.

California Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. II. Series. Vol. III, part 1. 1891. 8⁰.

R. Accademia dei Fisiocritici in Siena:

Atti. Ser. IV. Vol. III. Fasc. 10. e supplemento. 1891/92. gr. 8⁰.

Nordisches Museum in Stockholm:

Führer durch die Sammlungen des nordischen Museums in Stockholm, herausg. von Arthur Hazelius. 1888. 8⁰.
Program för en byggnad åt Nordiska Museet i Stockholm. 1883. 8⁰.
Förslag till byggnad för Nordiska Museet. 1891. Fol.
Le Musée d'éthnographie Scandinave à Stockholm, notice historique par J. H. Kramer. 2. éd. 1879. 8⁰.
Samfundet för Nordisca Museets främjande 1889. Meddelanden. 1891. 8⁰.
Das Nordische Museum in Stockholm. Stimmen aus der Fremde· 1888. 8⁰.
Afbildningar af föremål i Nordiska Museet. Småland. 1888. 4⁰.
Afbildningar af föremål i Nordiska Museet. Island. 1890. 4⁰.
Runa. Minnesblad från Noreiska Museet. 1888. Fol.
Samfundet. 1881—1888. 8⁰.
Minnen från Nordiska Museet. Bd. II. s. a. 4⁰.
Gabriel Djurklou, Lifvet i Västergötland. 1885. 8⁰.

Société des Sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. 27. Fasc. 1—6. Janv.—Juin 1892. 8⁰.

Australasian Association for the advancement of Science in Sydney:

Report. Vol. III. New-Zealand Meeting 1891. 1892. 8⁰.

Department of Mines in Sydney:

Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. I. part 1—4. 1889—92. 4⁰.
Memoirs. Palaeontology. Nr. 8. 1891. 4⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. XXV. 1891. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya, Mexico:

Boletin. Tom. I. Nr. 7—9. 1891/92. 4⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Magnetische Beobachtungen im Jahre 1890. 1891. 8⁰.
Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1890. 1891. 8⁰.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Jahre 1884 und 1885. 1886/91. 8⁰.

College of science, Imperial University in Tokio, Japan:

Journal. Vol. part 1. 1892. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio:

Mittheilungen. 47. Heft. Yokohama 1892. Fol.

Reale Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. XXVII. disp. 1—8. 1891/92. 8⁰.

Observatoire météorologique de l'Université in Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. XXIII. 1891. 1891/92. Fol.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

North American Fauna. Nr. 5. 1891. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Jos. Henry, Eulogy on Prof. Alex. Dallas Bache. 1872. 8⁰.
Meteorological Observations made at Providence by Alexis Caswell. 1860. 8⁰.
Discussion of the magnetic und meteorological Observations by A. Bache. Part II. 1862. 4⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Observations for 1886. 1891. 4⁰.
Observations made during the year 1887. 1892. 4⁰.

Nautical Almanac Office in Washington:

Astronomical Papers of the American Ephemeris. Vol. II. part VI. Vol. III. part V. 1891. 4⁰.

U. S. Geological Survey in Washington:

Tenth Annual Report 1888—89 in 2 parts. 1890. 4⁰.
Bulletin. Nr. 62. 65. 67—81. 1890—91. 8⁰.
Contributions to North American Ethnology. Vol. II. 1. 2. VI. 1890. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes in Wernigerode:

Schriften. Bd. VI. 1891. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Denkschriften. Mathematisch-naturwissensch. Klasse. 1891/92. 4⁰.
Sitzungsberichte. Mathematisch-naturwissensch. Klasse.
Abtheilung I 1891. Nr. 1—7
" IIa " Nr. 1—7
" IIb " Nr. 1—7
" III " Nr. 1—7. 1891—91. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1891. Nr. 15—18. 1892. Nr. 1—5. 4⁰.
Jahrbuch. Bd. 41. Heft 2. 3. 1892. 4⁰.

K. K. Oesterreichische Gradmessungs-Commission in Wien:

Astronomische Arbeiten. 1891. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1892. Nr. 1—22. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXI. Heft 4—6. Bd. XXII. Heft 1. 2. 1891/92. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXXIV. 1891. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 41. Bd. Quartal 3 und 4. 1891. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. VI. Nr. 3. 4. VII. 1. 2. 1891/92. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. Bd. 31. 1890/91. 1891. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. XXV. N. 6. 7. XXVII. 1—3. 1891/92. 8⁰.
Sitzungsberichte. 1891. Nr. 4—9. 1892. 1—3. 1891/92. 8⁰.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen. 26. Jahrg. 1892. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrschrift. Jahrg. 36. Heft 2—4. 1891. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Lucien Anspach in Brüssel:

Le rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur. 2891. 8⁰.

Julius Bergbohm in Wien:

Neue Integrationsmethoden. Stuttgart 1892. 8⁰.

O. Chwolson in St. Peterburg:

Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie. 1892. 4⁰.

Darget in Pauilhac (Gers):

Theories géométriques diverses. Auch 1892. 4⁰.

Karl Gegenbauer in Heidelberg:

Die Epiglottis. Vergleichend-anatomische Studie. Leipzig 1892. 4⁰.

Friedrich Goppelsröder in Mühlhausen i. E.:

Studien über die Anwendung der Elektrolyse. 1891. Fol.

Irving Hale in Denver, Colorado:

The present limitations of electric power in Mining. 1892. 8⁰.

Josef Bernh. Jack in Konstanz:

Botanische Wanderungen am Bodensee und im Hegau. Freiburg 1892. 8⁰.

Hepaticae Wallisianae. 1892. 8⁰.

A. Kirchhoff in Berlin:

Bericht der Central-Commission für wissenschaftliche Landeskunde 1889—1891. 1891. 8⁰.

A. v. Kölliker in Würzburg:

Ueber den feineren Bau des Bulbus olfactorius. 1892. 8⁰.

A. Kurz in Augsburg:

Zur Bildungs- und Gymnasialfrage. 1892. 8⁰.

Ueber Luft-Elektrizität. 1892. 8⁰.

Ferdinand v. Müller in Melbourne:

Iconography of Australian salsolaceous plants. VIIIth Decade. 1891. 4⁰.

G. Omboni in Padua:

Frutto fossile di pino. Venezia 1892. 8⁰.

L. Rütimeyer in Basel:

Die eocäne Säugethier-Welt von Egerkingen. Zürich 1891. 4⁰.

Paul Schreiber in Chemnitz:

Untersuchung über die Periodicität des Niederschlages im Königreich Sachsen. (Ausschnitt.) 1891. 4⁰.

Adolf Steinheil in München:

Handbuch der angewandten Optik. I. Band. Leipzig 1891. 8⁰.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen Nr. 79. 1892. 8⁰.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathemathisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. November 1892.

1. Herr L. BOLTZMANN überreicht und bespricht eine Abhandlung: „III. Theil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft.“

2. Herr E. LOMMEL legt das von ihm herausgegebene Werk: „G. L. OHM's gesammelte Abhandlungen“ der Classe vor.

3. Herr L. SOHNCKE macht Mittheilungen über wissenschaftliche Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschifffahrt. Im Anschlusse an diese Mittheilung des Herrn SOHNCKE und auf Anregung desselben giebt die Classe folgende Erklärung ab:

„Die Ausführung wissenschaftlicher Luftfahrten, wie sie vom Münchener Verein für Luftschiftfahrt in grösserem Maasse als bisher geplant werden, ist von Wichtigkeit für die Ergründung der physikalischen Verhältnisse der Atmosphäre. Besonders verspricht die Wiederholung solcher von München aus zu unternehmenden Fahrten, mit Rücksicht auf die Nachbarschaft meteorologischer Hochstationen, eine wesentliche Förderung der Wissenschaft.“

4. Herr L. Radlkofer theilt Einiges über den Verlauf und die Ergebnisse des im Herbste dieses Jahres in Genua stattgefundenen internationalen botanischen Congresses mit.

5. Herr M. v. Pettenkofer zeigt an, dass die Liebig-Fleischextract-Compagnie in Fray-Bentos in den Pampas ausgegrabene wohlerhaltene Knochen eines grossen diluvialen Säugethieres, nach den Photographien wahrscheinlich eines Mastodons, der Akademie zum Geschenk gemacht habe.

III. Teil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft.

Von Ludwig Boltzmann.

(*Eingelaufen 5. November.*)

> **I think, that a problem of such primary importance in molecular science ought to be scrutinized and examined on every side, so that as many persons as possible may be enabled to follow the demonstration.**
> **Maxwell, scient. pap. II pag. 713.**

§ 1. Ueber die Variabeln, welche den Ausdruck für die lebendige Kraft auf eine Summe von Quadraten reducieren.

Maxwell hat zuerst[1]) die Formel für die Verteilung der lebendigen Kraft unter einatomigen Gasmolekülen aufgestellt, welche er als vollkommen harte Kugeln von gleicher oder verschiedener Beschaffenheit (Masse und Radius) voraussetzte. Er behandelte daselbst auch den Fall, dass die Moleküle harte Körper mit drei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten sind, und fand, dass für ein solches Gas das Verhältnis der spezifischen Wärmen $1^1/_3$ sein müsste. Da dasselbe jedoch für die bekanntesten einfachen Gase den Wert 1,4 hat, so schloss er, dass in diesem Punkte die mechanische Analogie mit der Erfahrung im Widerspruch steht.[2])

1) Illustrations of the Dynamical Theory of Gases. Phil. mag. jan. and june 1860. scient. pap. I pag. 377.

2) Maxwell, scient. pap. pag. 409.

Die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsachsen bei allseitiger Drehung eines festen Körpers sind ein Beispiel hiefür.

$\frac{1}{2}\mu_i\,\alpha_i^2$ will ich als den auf das Momentoid α_i entfallenden Teil der gesamten lebendigen Kraft bezeichnen. Wegen $\Theta = 1$ erhalten wir zunächst $da_1\,da_2 \cdots da_n = d\alpha_1\,d\alpha_2 \cdots d\alpha_n$. Führen wir links statt a_1, rechts statt α_1 die Variable T ein, so folgt

$$\frac{1}{\frac{dT}{da_1}}\,dT\,da_2\,da_3 \cdots da_n = \frac{1}{\frac{dT}{d\alpha_1}}\,dT\,d\alpha_2\,d\alpha_3 \cdots d\alpha_n$$

dividieren wir durch dT weg und berücksichtigen, dass

$$\frac{dT}{da_1} = \dot{b}_1,\ \frac{dT}{d\alpha_1} = \mu_1\,\alpha_1,$$

so folgt

$$\frac{1}{\dot{b}_1}\,da_2\,da_3 \ldots da_n = \frac{1}{\mu_1\alpha_1}\,d\alpha_2\,d\alpha_3 \cdots d\alpha_n$$

Aus Maxwells Gleichung 28 (l. c. pag. 721) folgt für die Anzahl der Systeme, für welche die generalisierten Coordinaten zwischen den Grenzen b_1 und $b_1 + db_1 \cdots b_n$ und $b_n + db_n$, die Momentoide aber zwischen den Grenzen α_2 und $\alpha_2 + d\alpha_2 \cdots \alpha_n$ und $\alpha_n + d\alpha_n$ liegen, während α_1 durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmt ist, der Wert

$$\frac{NC}{\mu_1\alpha_1}\,db_1 \cdots db_n\;d\alpha_2 \cdots d\alpha_n$$

Führt man nun die Integrationen genau so aus, wie es Maxwell thut, so gelangt man zu dessen Gleichung 45, welche somit vollständig richtig ist.

Bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, dass die auf das Momentoid α_n entfallende lebendige Kraft $\frac{\mu_n\alpha_n^2}{2}$ zwischen

den Grenzen k_n und $k_n + dk_n$ liegt, so gelangt man wieder genau zu dem Maxwellschen Ausdruck 51 (l. c. pag. 725).

Es stellen daher auch die Maxwellschen Ausdrücke 52 und 53 (l. c. pag. 726) den Mittelwert und den Maximalwert der auf irgend ein Momentoid entfallenden lebendigen Kraft dar. An Stelle des Maxwellschen Satzes, dass die mittlere lebendige Kraft für jede Coordinate den gleichen Wert hat, tritt daher der Satz, dass der Mittelwert der auf jedes Momentoid entfallenden lebendigen Kraft derselbe ist.

Da die Anzahl der Momentoide immer dieselbe ist, wie die der Beweglichkeitsgrade, so bleibt auch der von Maxwell eingangs (l. c. pag. 716) angeführte Satz richtig, dass die mittlere lebendige Kraft zweier gegebener Teile des Systems sich so verhält, wie die respektive Zahl ihrer Beweglichkeitsgrade. Dabei kann die lebendige Kraft T_k eines jeden der Teile nach Belieben auch die Produkte verschiedener p_k enthalten, wenn p_k die Momente der allgemeinen Coordinaten des betreffenden Teiles sind. Aber es darf T_k nicht das Produkt eines p_k in ein anderes Moment enthalten, welches nicht zu den p_k gehört. Speziell also für sogenannte mehratomige Gasmoleküle, deren Zustand durch verallgemeinerte Coordinaten bestimmbar ist, wird der Satz unverändert gelten.

Da $2\frac{\partial T}{\partial b}$ jedenfalls gleich $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i^2 \frac{\partial \mu}{\partial b}$ ist, so bleibt auch mein Beweis des zweiten Hauptsatzes[1]) richtig, worin jedoch ebenfalls unter q_h nicht die zu den Coordinaten p_h gehörigen Momente, sondern die Momentoide verstanden werden müssen.

---

1) Borchard-Kronecker's Journal Bd. 100, pag. 201, 1885.

Ueber die von Lord Kelvin als Stichproben (test-cases) vorgeschlagenen speziellen Fälle.

§ 2. Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene.

Ich glaube, dass unter diesen Modifikationen der Beweis Maxwells für die im vorigen Paragraphen erwähnten Lehrsätze ein befriedigender ist; ausserdem habe ich schon früher[1]) einen auf ganz anderer Basis beruhenden Beweis dieses Satzes geliefert. Ich glaube daher, dass seine Richtigkeit als Lehrsatz der analytischen Mechanik kaum angezweifelt werden kann.[2]) Da ich selbst nur mühsam durch Betrachtung vieler speziellen Fälle[3]) zu meinem Satz gelangte, so weiss ich den Wert einer steten Erläuterung allgemeiner Sätze durch spezielle Beispiele zu schätzen und will mich daher noch mit einigen der von Lord Kelvin a. a. O. als Stichproben vorgeschlagenen speziellen Beispielen beschäftigen und zwar zunächst mit dem letzten, weil es das einfachste ist, und weil

1) Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen, 1. Abschnitt: Bewegung der Atome in den Molekülen. Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. Band 3, 9. März 1871. — Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht, ebd. 13. April 1871; in der letzten Abhandlung habe ich auch schon von generalisierten Coordinaten Gebrauch gemacht.

2) Eine hievon völlig getrennte Frage ist die, ob solche Systeme eine genügend durchgreifende Analogie mit warmen Körpern zeigen. Diese Frage soll hier nicht erörtert werden; vergleiche jedoch hierüber Wiedemanns Beiblätter Bd. 5 pag. 403, 1881.

3) Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft. Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. Bd. 58, 8. Oktober 1868. — Lösung eines mechanischen Problemes, ebd. 17. Dezember 1868. — Einige allgemeine Sätze uber Wärmegleichgewicht, Schluss des 2. Abschnittes. [illegible] Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie. Wien. Sitz.-Ber. Bd. 75. 11. Jänner 1877. Schluss des 3. Abschnittes etc.

ich den von Herrn Tait einmal citierten Ausspruch de Morgans respektire, welcher ungefähr besagt, dass zu lange Formeln oft nicht gelesen werden.

Ein materieller Punkt von der Masse eins bewege sich in der xy-Ebene. x, y seien seine Coordinaten, q seine Geschwindigkeit, u, v deren Componenten in den Coordinatenrichtungen und θ deren Winkel mit der positiven Abscissenachse, den wir von Null bis 2π zählen. Das Potenzial V sei eine beliebige Funktion der Coordinaten. Wir nehmen an, dass die Bewegung nicht ins Unendliche geht, sich auch nicht assymptotisch einer gewissen Grenze nähert und dass alle möglichen Wertekombinationen von x, y und θ, welche mit der Gleichung der lebendigen Kraft vereinbar sind, mit beliebiger Annäherung erreicht werden, wenn sich nur das Bewegliche durch eine genügend lange Zeit T bewegt.

Wir wollen senkrecht zur xy-Ebene eine z-Coordinate errichten und irgend einen Zustand des Beweglichen dadurch charakterisieren, dass wir über dem Punkte der xy-Ebene, wo sich das Bewegliche befindet, den Winkel θ als z-Coordinate auftragen, welchen seine Geschwindigkeit mit der positiven Abscissenachse bildet. Den Punkt des Raumes mit den Coordinaten x, y, θ nennen wir dann den Punkt, welcher den Zustand des Beweglichen charakterisiert oder kurz den augenblicklichen Zustandspunkt.

Wir können unsere Annahme dann dahin aussprechen, dass der Zustandspunkt im Verlauf der Zeit T alle Punkte eines endlichen Cylinders (des Zustandscylinders) durchläuft, welcher die Höhe 2π in der Richtung der z-Achse hat. Von der Basis bis zur Gegenfläche dieses Cylinders und umgekehrt macht der Zustandspunkt stets einen Sprung; sonst geschieht seine Bewegung kontinuierlich.

Wir nehmen nun an, dass zu irgend einer Zeit t das Bewegliche sich in irgend einem Punkte x, y befinde, dass seine Geschwindigkeit mit der positiven Abscissenachse den

Winkel θ bilde und in den Coordinatenrichtungen die Componenten u, v habe. Der Zustandspunkt befindet sich also zur Zeit t an der Stelle A des Raumes, welche die Coordinaten x, y, θ hat.

Nach Verlauf einer sehr kleinen Zeit δt also zur Zeit $t + \delta t$ soll das Bewegliche die Coordinaten x', y' haben. Seine Geschwindigkeit soll mit der positiven Abscissenachse den Winkel θ' bilden und in den Coordinatenrichtungen die Componenten u', v' haben.

Die Lage des Zustandspunkts zur Zeit $t + \delta t$ soll mit A' bezeichnet werden. A' soll der dem Punkte A entsprechende Punkt heissen. Betrachten wir δt als constant, so wird jedem Punkte innerhalb des Zustandscylinders ein anderer Punkt daselbst entsprechen. Jedesmal, wenn sich zu irgend einer Zeit der Zustandspunkt in irgend einem Raumpunkte befunden hat, wird er sich nach Verlauf der Zeit δt in dem diesem Raumpunkte entsprechenden befinden; und umgekehrt kann er niemals nach dem entsprechenden Punkte kommen, ohne genau vor der Zeit δt in demjenigen Raumpunkte gewesen zu sein, dem der vorhergenannte Raumpunkt entspricht.

Bekanntlich ist:

$$x' = x + q \cos\theta \cdot \delta t, \quad y' = y + q \sin\theta \cdot \delta t \qquad 1)$$
$$u' = u + \xi \cdot \delta t, \quad v' = v + \eta \cdot \delta t$$

wobei $\xi = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $\eta = -\frac{\partial V}{\partial y}$ die Componenten der auf das Bewegliche wirkenden Kraft, also Funktionen von x und y sind. Ferner ist

$$\theta' = \operatorname{arctg} \frac{v'}{u'},$$

was nach Substitution der obigen Werte liefert

$$\theta' = \theta + (\eta \cdot \cos\theta - \xi \sin\theta) \frac{\delta t}{q}. \qquad 2)$$

Wir konstruieren nun ein unendlich kleines, rechtwinkliges Parallelepiped $dx dy d\theta$, dessen eine Ecke im Punkte A liegt. Derjenige Bruchteil der gesammten Zeit T, während dessen der Zustandspunkt innerhalb dieses Parallelepipedes liegt, sei dt. Es ist dies die Zeit, während welcher die 3 Variabeln x, y, θ zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$, θ und $\theta + d\theta$ eingeschlossen sind. Wir können dann jedenfalls setzen:

$$dt = f(x, y, \theta)\, dx\, dy\, d\theta \qquad 3)$$

Wir konstruieren nun zu jedem Punkte des Parallelepipedes $dx dy d\theta$ den entsprechenden Punkt, wodurch das Parallelepiped $dx' dy' d\theta'$ erhalten werden soll. Derjenige Bruchteil der Zeit T nun, während dessen der Zustandspunkt innerhalb $dx' dy' d\theta'$ liegt, ist nach Formel 3)

$$dt' = f(x', y', \theta')\, dx'\, dy'\, d\theta'.$$

Da aber nach unserer Definition der Zustandspunkt, so oft er in das Parallelepiped $dx dy d\theta$ eingetreten ist, jedesmal nach der Zeit δt in das Parallelepiped $dx' dy' d\theta'$ eintritt, und auch die Zeitdifferenz zwischen dem Austritte aus dem 1. und 2. Parallelepipede wieder genau δt ist, so folgt, dass der Zustandspunkt in beide Parallelepipede genau gleich oft eintritt und auch jedesmal in beiden gleich lang verweilt, dass also $dt' = dt$ oder

$$f(x', y', \theta')\, dx'\, dy'\, d\theta' = f(x, y, \theta)\, dx\, dy\, d\theta$$

ist. Nun ist aber

$$dx'\, dy'\, d\theta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial y}, & \frac{\partial x'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y'}{\partial x}, & \frac{\partial y'}{\partial y}, & \frac{\partial y'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x}, & \frac{\partial \theta'}{\partial y}, & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{vmatrix} \cdot dx\, dy\, d\theta.$$

für so leicht, dass ich mich nicht damit aufhalten will. Der zweite Beweis dagegen, dass die durch obige Formel ausgedrückte Verteilung der lebendigen Kraft die einzig mögliche ist, lässt sich nur indirekt durch den Nachweis erbringen, dass eine gewisse eigentümliche Funktion durch die Zusammenstösse nur vergrössert werden kann. Da diese Funktion einerseits mit der von Clausius als Entropie bezeichneten Grösse, anderseits mit der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Zustandes auf's innigste zusammenhängt, [1]) so erscheint dadurch der zweite Hauptsatz als ein reiner Wahrscheinlichkeitssatz.

Diesen letzteren Beweis für das von Lord Kelvin ersonnene, mit elastischen Federn ausgestattete Molekül, welches wir nach seinem Vorgange Dublet nennen wollen, durchzuführen, scheint mir von genügendem Interesse zu sein (siehe Motto!). Unter einem Dublet verstehen wir die Vereinigung zweier materieller Punkte mit den Massen m und m'', welche sich mit einer ihrer Entfernung proportionalen Kraft anziehen. m'' (der Kern) soll sonst niemals von einer anderen Kraft afficiert werden. Die Massen m (Schalen) je zweier Dublets sollen, wenn sie sich bis zur Distanz D'' nähern, wie elastische Kugeln an einander abprallen. Ausserdem sollen noch einfache Atome mit den Massen m' vorhanden sein, welche unter einander in der Distanz D', an den Schalen in der Distanz D ebenso abprallen. Wir wollen immer kurz „Schale" statt Centrum der Schale und „Kern" statt Centrum des Kerns sagen. Es seien x, y, z die Coordinaten des Kerns eines Dublets bezüglich eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Schale liegt und dessen Axen fixe Richtungen haben; u'', v'', w'' die absoluten, $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die Geschwindigkeitscomponenten des Kernes relativ gegen die Schale, g, h, k die Geschwindigkeitscomponenten des Schwer-

1) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 76, 1877, Bd. 78, 1878.

punkts des Dublets, u, v, w, die der Schale; u_1, v_1, w_1 die eines einzelnen Atoms; endlich $\chi(x, y, z, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, g, h, k)\, d\xi \cdots dk$ die Anzahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x \cdots k$ zur Zeit t zwischen den Grenzen

$$x \text{ und } x + dx \cdots k \text{ und } k + dk$$

liegen und

$$f(u_1, v_1, w_1)\, du_1\, dv_1\, dw_1$$

die Zahl der Einzelatome in der Volumeneinheit, deren Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 zwischen den Grenzen

$$u_1 \text{ und } u_1 + du_1,\ v_1 \text{ und } v_1 + dv_1,\ w_1 \text{ und } w_1 + dw_1$$

liegen. Dann ist der Ausdruck, welcher durch die Zusammenstösse nur abnehmen kann und welchen wir kurz die Entropie nennen,

$$E = \int \chi l \chi dx \cdots dk + \int f l f du_1\, dv_1\, dw_1$$

wobei die Integration über alle möglichen Werte der differentiierten Grössen zu erstrecken ist. l bedeutet den natürlichen Logarithmus. Der erste Addend im Ausdrucke E kann folgendermassen erhalten werden. Wir bilden die Grösse $l\chi$ für jedes in der Volumeneinheit enthaltene Dublet; d. h. wir setzen in $l\chi$ für alle Variabeln diejenigen Werte ein, welche sie für das betreffende Dublet haben. Alle die Werte von $l\chi$ summieren wir dann. Wir wollen daher, um diese Bildungsweise symbolisch auszudrücken, diesen Addenden mit $\Sigma l\chi$ bezeichnen. Aehnlich bezeichnen wir den 2. Addenden mit Σlf, was eine Summation über alle in der Volumeneinheit befindlichen Einzelatome ausdrückt.

Um zu beweisen, dass E nur abnehmen kann, suchen wir zuerst die Veränderung, welche $\Sigma l\chi$, wenn keine Zusammenstösse stattfänden, bloss durch die relative Bewegung von Kern und Schale in den Dublets erführe. Dadurch würden offenbar g, h, k gar nicht verändert. Dagegen könnte man zu irgend einer Zeit t setzen

$$x = A \sin(at + B), \quad \mathfrak{u} = Aa \cos(at + B)$$

und zur Zeit 0

$$x_0 = A \sin B, \quad \mathfrak{u}_0 = Aa \cos B.$$

Betrachtet man alle Dublets, für welche A und B zwischen gewissen, unendlich nahen Grenzen eingeschlossen sind, so ist

$$dx\, d\mathfrak{u} = dx_0\, d\mathfrak{u}_0 = Aa\, dA\, dB \qquad 4)$$

und ebenso für die y- und z-Axe

$$dy\, d\mathfrak{v} = dy_0\, d\mathfrak{v}_0, \quad dz\, d\mathfrak{w} = dz_0\, d\mathfrak{w}_0. \qquad 5)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung

$$dx\, dy\, dz\, d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\, d\mathfrak{w} = dx_0\, dy_0\, dz_0\, d\mathfrak{u}_0\, d\mathfrak{v}_0\, d\mathfrak{w}_0$$

auch gilt, wenn Kern und Schale eine beliebige andere Centralbewegung machen. (Vgl. meine schon citierte Abhandlung über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolekülen.) Würden nun gar keine Zusammenstösse erfolgen, so würden genau für dieselben Dublets, für welche zur Zeit Null die Variabeln zwischen den Grenzen x_0 und $x_0 + dx_0$ $\cdots k$ und $k + dk$ lagen, dieselben zur Zeit t zwischen den Grenzen x und $x + dx \cdots k$ und $k + dk$ liegen. Schreiben wir daher für einen Augenblick unter dem Functionszeichen χ noch die Variable t explicit, um den Fall einer Veränderlichkeit von χ mit der Zeit nicht von vorne herein auszuschliessen, so ist die Zahl der ersten Dublets

$$\chi(x_0 \cdots \mathfrak{w}_0, g, h, k, 0)\, d\xi_0 \cdots dk = \chi_0\, d\xi_0 \cdots dk$$

die der letzteren aber

$$\chi(x \cdots k, t)\, dx \cdots dk = \chi\, dx \cdots dk.$$

Daher hat man

$$\chi_0\, dx_0 \cdots dk = \chi\, dx \cdots dk$$

und wegen 4) und 5)

$$\chi_0 = \chi,$$

daher auch

$$\chi_0\, l\chi_0\, dx_0 \cdots dk = \chi\, l\chi\, dx \cdots dk.$$

Die Integration dieser letzten Gleichung über alle möglichen Werte der Variabeln, deren Differentiale sie enthält, zeigt sofort, dass die Grösse $\Sigma l\chi$ durch die innere Bewegung der Dublets keine Veränderung erfährt, was natürlich auch für jede Centralbewegung richtig bleibt. Es bleibt daher nur der Einfluss der Zusammenstösse zu berechnen.

Wir wollen da zunächst statt $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, g, h, k$ die absoluten Geschwindigkeiten u, v, w, u'', v'', w'' einführen. Da $(m+m'')\,g = mu + m''u''$, $\mathfrak{u} = u'' - u$, so folgt

$$dg\,d\mathfrak{u} = du\,du''.$$

Setzen wir daher die Anzahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w$ zwischen den Grenzen x und $x + dx \cdots w$ und $w + dw$ liegen, gleich $F(x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w)\,dx \cdots dw$, wobei

$$F = \chi\left(x, y, z, u'' - u \cdots \frac{mu + m''u''}{m + m''} \cdots\right),$$

so wird

$$\sum l\chi = \int F l F\,dx \cdots dw = \sum l F,$$

wo die Summation wieder über alle in der Volumeneinheit enthaltenen Dublets zu erstrecken ist. Wir bezeichnen nun mit $\delta_1 \Sigma l F$ den Zuwachs, welchen $\Sigma l F$ durch die Zusammenstösse der Dublets unter einander, mit $\delta_2 \Sigma l f$, denjenigen, den $\Sigma l f$ durch die Zusammenstösse der Einzelatome untereinander und mit $\delta_{12}(\Sigma l F + \Sigma l f)$ denjenigen Zuwachs, den die eingeklammerte Grösse durch die Zusammenstösse je eines Dublets mit einem Einzelmolekül während der Zeit δt erfährt.

Um $\delta_{12}(\Sigma l F + \Sigma l f)$ zu berechnen, heben wir von allen Zusammenstössen, welche eine Schale mit einem Einzelatom in der Volumeneinheit während der Zeit δt erfährt, diejenigen hervor, für welche die Geschwindigkeitscomponenten der Schale im Momente des Stosses (aber noch vorher) zwischen den Grenzen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$, die des Kerns zwischen den Grenzen u'' und $u'' + du''$,

v'' und $v''+dv''$, w'' und $w''+dw''$, die Coordinaten des Kerns relativ gegen die Schale zwischen x und $x+dx$, y und $y+dy$, z und $z+dz$, ferner die Geschwindigkeitscomponenten des gemeinsamen Schwerpunktes der Schale und des Einzelatoms zwischen den Grenzen p und $p+dp$, q und $q+dq$, r und $r+dr$, endlich die Richtung der Centrilinien der stossenden Atome im Momente des Stosses innerhalb eines unendlich schmalen Kegels von bestimmter Richtung im Raume und unendlich kleiner Oeffnung $d\lambda$ liegt. Die Geschwindigkeitscomponenten des Einzelatomes im Momente des Beginnes des Stosses sind dann

$$u_1 = \frac{m+m'}{m'}\,p - \frac{m}{m'}\,u, \quad v_1 = \frac{m+m'}{m'}\,q - \frac{m}{m'}\,v, \qquad 6)$$
$$w_1 = \frac{m+m'}{m'}\,r - \frac{m}{m'}\,w.$$

Für die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeneinheit während der Zeit δt in der hervorgehobenen Weise geschehen, findet man leicht den Wert:

$$dn = D^2 \cdot F(x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w)\, f(u_1, v_1, w_1)$$
$$\times\, V\varepsilon\, dx \cdots dw''\, du\, dv\, dw\, du_1\, dv_1\, dw_1\, d\lambda\, \delta t.$$

Hiebei ist V die relative Geschwindigkeit beider Atome im Momente des Stosses, ε der Cosinus des spitzen Winkels derselben mit der Centrilinie. Führen wir statt u_1, v_1, w_1 die Variabeln p, q, r mittelst der Gleichungen 6) ein, so folgt

$$dn = D^2 F f_1 \frac{(m+m')^3}{m'^3}\, V\varepsilon\, dx \cdots dw''\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda\, \delta t,$$

wobei der unten angehängte Index 1 jedesmal ausdrückt, dass unter dem Funktionszeichen die drei Werte 6) zu substituieren sind.

Durch jeden der hervorgehobenen Zusammenstösse verliert eine Schale die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w durch alle dn Zusammenstösse wird also ΣlF um $dn\,lF$ vermindert.

Nach jedem der hervorgehobenen Zusammenstösse sollen die Geschwindigkeitscomponenten der Schale zwischen den Grenzen u' und $u'+du'$, v' und $v'+dv'$, w und $w'+dw$, liegen. Dadurch, dass Schalen mit diesen neuen Geschwindigkeitscomponenten geschaffen werden, wächst $\Sigma l F$ um $dn l F'$, wobei der oben angehängte Strich ausdrückt, dass unter dem Funktionszeichen $x \cdots w'', u', v', w'$ zu substituieren ist. Wir nehmen an, dass die Zusammenstösse momentan geschehen, weshalb die Variabeln $x \cdots w''$ durch die Zusammenstösse nicht verändert werden. Es hat daher $\Sigma l F$ durch die hervorgehobenen Zusammenstösse im Ganzen den Zuwachs $(lF' - lF)\, dn$ erhalten. Ganz ebenso findet man, dass $\Sigma l f$ durch die hervorgehobenen Zusammenstösse während der Zeit δt den Zuwachs $(lf_1' - lf_1)\, dn$ erhalten hat, wobei die beiden Indices unten und oben ausdrücken, dass unter dem Funktionszeichen die Geschwindigkeitscomponenten des stossenden Einzelatoms nach dem Stosse

$$u_1' = \frac{m+m'}{m'} p - \frac{m}{m'} u', \quad v_1' = \frac{m+m'}{m'} q - \frac{m}{m'} v', \qquad 7)$$

$$w_1' = \frac{m+m'}{m'} x - \frac{m}{m'} w'$$

zu substituieren sind. Der gesammte Zuwachs, den $\Sigma l F + \Sigma l f$ durch alle hervorgehobenen Zusammenstösse erfährt, ist daher $dn\,(lF' + lf_1' - lF - lf_1)$. Hieraus würde der gesammte Zuwachs, welchen wir mit $\delta_{12}\,(\Sigma l F + \Sigma l f)$ bezeichneten, durch Integration über alle Variabeln erhalten, deren Differenziale in dn enthalten sind.[1])

1) Nimmt man an, dass das zweite der zusammenstossenden Atome kein Einzelatom, sondern ebenfalls eine Schale gewesen ist, so gelangt man durch vollkommen analoge Schlüsse zur vollkommen analogen Gleichung

$$2\,\delta_1 \Sigma l F = \int dn\,(lF' + lF_1', - lF - lF_1).$$

Diese Integration soll nun durch einen eigentümlichen Kunstgriff bewerkstelligt werden. Mit dem obigen Gliede, welches die „hervorgehobenen" Zusammenstösse in das Integrale liefern, vereinigen wir das Glied, welches die „entgegengesetzten" Zusammenstösse liefern, und ebenso mit jedem andern Gliede des Integrales das durch die „entgegengesetzten" Zusammenstösse gelieferte Glied.

Wir sagen ein Zusammenstoss ist einem anderen entgegengesetzt, wenn beim ersteren jedes der stossenden Atome im Momente des Beginnes genau denselben Zustand hat, wie beim letzteren im Momente des Endes und umgekehrt; ausserdem müssen natürlich die Mittelpunkte der beiden Atome vertauscht sein, damit vor dem Stosse Annäherung stattfindet. Die übrigen Variabeln $x \cdots w''$ sollen für beiderlei Zusammenstösse genau zwischen denselben Grenzen eingeschlossen sein. In der nebenstehenden Zeichnung soll der grösste Kreis eine Schale, der kleinste einen Kern, der mittlere ein Einzelatom darstellen; die vom Centrum aus gezoge-

---

Dabei ist

$$F_1 = F(x_1, y_1, z_1, u_1'', v''_1, w''_1, u_1, v_1, w_1)$$

$$F_1' = F(x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1'', u_1', v_1', w_1').$$

u_1, v_1, w_1 und u_1', v_1', w_1', die Geschwindigkeitscomponenten der zweiten Schale vor und nach dem Stosse muss man sich wieder durch Gleichungen ausgedrückt denken, die den Gleichungen 6 und 7 analog sind. $x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1''$ sind die übrigen, den Zustand des zweiten Dublets im Momente des Stosses bestimmenden Grössen. Endlich ist

$$dn = D'^2 F F_1 V\varepsilon\, dx \cdots dw''\, du\, dv\, dw\, dx_1 \cdots dw_1''\, dp\, dq\, dr\, d\lambda\, \delta t.$$

Ebenso würde sich ergeben

$$2\delta_2 \Sigma lf = \int dn\,(lf' + lf_1' - lf - lf_1),$$

wobei

$$dn = D^2 f f_1 V\varepsilon\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda\, \delta t.$$

Die angewandten Zeichen dürften hier ohne weiters verständlich sein.

nen Pfeile sind die Geschwindigkeiten. Fig. 1 bedeutet die Constellation vor einem, Fig. 2 die nach demselben Zusammenstosse; Fig. 3 und 4 aber sind die Constellationen vor und nach dem umgekehrten Zusammenstosse. Pfeile, die mit gleicher Ziffer bezeichnet sind, haben immer gleiche Länge und gleiche Lage gegen die Centrilinie.

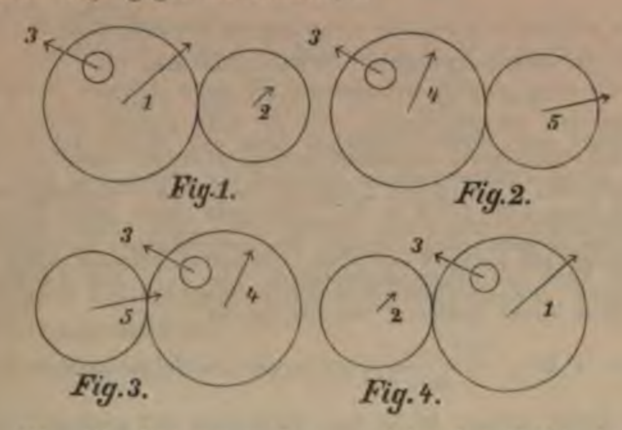


Fig. 1. *Fig. 2.* *Fig. 3.* *Fig. 4.*

Für alle Zusammenstösse, welche den früher hervorgehobenen entgegengesetzt verlaufen, liegen im Momente des Beginnes die Geschwindigkeitscomponenten der stossenden Schale zwischen den Grenzen

$$u' \text{ und } u' + du', \; v' \text{ und } v' + dv', \; w' \text{ und } w' + dw',$$

im Momente des Endes aber zwischen den Grenzen

$$u \text{ und } u + du, \; v \text{ und } v + dv, \; w \text{ und } w + dw.$$

Aehnliches gilt vom stossenden Einzelatome, wogegen die Bewegung des Schwerpunktes, die Grösse der relativen Geschwindigkeit und deren Winkel mit der Centrilinie für die entgegengesetzten Zusammenstösse ebenso gross ist wie für die ursprünglich hervorgehobenen. Durch jeden entgegengesetzten Zusammenstoss verliert eine Schale die Geschwindigkeitscomponenten u', v', w', ein Einzelatom die Geschwindigkeitscomponenten u_1', v_1', w_1', dagegen gewinnt eine

Schale die Componenten u, v, w, ein Einzelatom die Componenten u_1, v_1, w_1. Ist daher dn' während der Zeit δt in der Volumeneinheit die Zahl der den ursprünglich hervorgehobenen entgegengesetzten Zusammenstösse, so wächst durch diese letzteren $\Sigma lF + \Sigma lf$ um

$$dn'(lF + lf_1 - lF' - lf_1').$$

Daher wächst es durch die ursprünglich hervorgehobenen und die ihnen entgegengesetzten Stösse zusammen um

$$(lF' + lf_1' - lF - lf_1)\ (dn - dn').$$

Integriert man diesen Ausdruck über alle Werte der Variabeln, deren Differenziale in dn und dn' enthalten sind, so erhält man $2\delta_{12}(\Sigma lF + \Sigma lf)$, da man dann jeden Zusammenstoss doppelt zählt; einmal als ursprünglich hervorgehobenen, dann als entgegengesetzten. Da V, ε und $d\lambda$ durch den Stoss nicht geändert werden, so ist

$$dn' = D^2 F' f_1' \frac{(m^3 + m')^3}{m'^3} V\varepsilon\, dx \cdot\cdot dw'' du' dv' dw' dp\, dq\, dr\, d\lambda\, \delta t.$$

Man findet zudem leicht (am leichtesten auf geometrischem Wege) $du' dv' dw' = du\, dv\, dw$ und erhält daher

$$\delta_{12}(\Sigma lF + \Sigma lf) = \frac{\delta t}{2}\int (lF' + lf_1' - lF - lf_1) \quad 8)$$

$$(Ff_1 - F'f_1')\frac{(m+m')^3}{m'^3} V\varepsilon D^2 du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, dx \cdot\cdot dw''\, d\lambda.$$

Man sieht sofort, dass sich in derselben Weise ergibt:

$$\delta_1 \Sigma lF = 2\delta t \int (lF' + lF_1' - lF - lF_1)(FF_1 - F'F_1') \cdot$$
$$\cdot V\varepsilon D''^2 dx \cdot\cdot dw''\, dx_1 \cdot\cdot dw_1''\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda$$

$$\delta_2 \Sigma lf = 2\delta t \int (lf' + lf_1' - lf - lf_1)\ (ff_1 - f'f_1') \cdot$$
$$\cdot V\varepsilon D'^2 du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda, \quad 9)$$

wobei die Bezeichnungen dieselben sind, wie in der Anmerkung auf Seite 346.

Wir beschränken uns hier bloss auf die Betrachtung des stationären Zustands, wo F und f für alle Zeiten dieselben Funktionen der darin vorkommenden Variabeln sind. Für diesen sind die betrachteten Ursachen die einzigen, welche eine Veränderung von ΣlF und Σlf bewirken könnten. Es ist daher die gesamte Veränderung, welche F während δt erfährt,

$$\delta E = \delta_{12} (\Sigma lF + \Sigma lf) + \delta_1 \Sigma lF + \delta_2 \Sigma lf.$$

Da alles, folglich auch E, unverändert bleibt, muss $\delta E = 0$ sein. Nun haben aber in den Integralen der Formeln 8) und 9) beide eingeklammerte Faktoren wesentlich das entgegengesetzte Vorzeichen, während die übrigen Grössen wesentlich positiv sind. Die Grösse unter den Integralzeichen ist daher wesentlich negativ und die Summe der Integrale, welche in δE erscheint, kann nur verschwinden, wenn für jeden Zusammenstoss:

$$F' f_1' = F f_1 , \; F' F'_1 = F F_1 , \; f' f_1' = f f_1 \qquad 10)$$

ist.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, dass die Schalen für einander vollständig durchdringlich sind, ebenso die Einzelatome für einander; nur zwischen einer Schale und einem Einzelatome soll jedesmal in der Distanz D Abprallen stattfinden. Dann bleibt nur die erste der Gleichungen 10), die aber für jeden möglichen Stoss gelten muss. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit $\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}$ eines Einzelatoms mit c_1, so ist f_1 offenbar nur Funktion von c_1, F dagegen kann als Funktion der folgenden 6 Variabeln ausgedrückt werden: 1. der beiden Geschwindigkeiten c und c'' von Schale und Kern, 2. der Distanz ϱ derselben (natürlich ihrer Centra), 3. der Winkel α und α'' der Richtungen von c und c'' mit der Geraden ϱ (letztere von der Schale gegen den Kern gezogen), 4. des Winkels β der Ebenen ϱc und $\varrho c''$.

Wir fassen nun einen Stoss ins Auge und bezeichnen die Werte dieser Variabeln im Momente des Stosses, jedoch noch vor demselben, ohne obern Index, die unmittelbar nach dem Stosse dagegen oben mit einem Striche; wir können offenbar die Lage der Centrilinie im Momente des Stosses und die Richtung von c_1 so wählen, dass c, α und β nach dem Stosse ganz beliebige Werte c', α', β' annehmen, welche für den Wert c_1' der Variabeln c_1 nach dem Stosse reelle Werte liefern; dieser letztere ist durch die Gleichung der lebendigen Kraft $m' c_1'^2 + m c'^2 = m' c_1^2 + m c^2$ bestimmt. Die Werte der Variabeln c'', ϱ und α'' dagegen werden durch den Stoss nicht verändert. Die erste der Gleichungen 10) kann daher so geschrieben werden:

$$F(c'', \alpha'', \varrho, c, \alpha, \beta) \cdot f_1(c_1) = F(c'', \alpha'', \varrho, c', \alpha', \beta') \cdot$$
$$\cdot f_1\left(\sqrt{c_1^2 + \frac{m}{m'}(c^2 - c'^2)}\right)$$

Diese Gleichung muss für alle möglichen Werte der Variabeln c'', α'', ϱ, c, α, β, c', α', β' und c_1 erfüllt sein, woraus man mit Leichtigkeit findet:

$$f_1(c_1) = A_1 e^{-hm'c_1^2}, \quad F = A e^{-hmc^2}.$$

Hiebei sind A_1 und h reine Constanten; A dagegen kann noch die Variabeln c'', ϱ und α'' enthalten.

Man sieht sofort, dass hieraus die Gleichheit der mittleren lebendigen Kraft einer Schale und eines Einzelatoms folgt, und dass die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung unter den Schalen und Einzelatomen erwiesen ist, ohne dass man Zusammenstösse der Schalen untereinander und der Einzelatome untereinander anzunehmen braucht. Die Annahme, dass auch solche Zusammenstösse vorkommen, ändert an der Verteilung der lebendigen Kraft gar nichts, da durch die gefundenen Werte von f_1 und F die beiden anderen der Gleichungen 10) identisch erfüllt werden. Dagegen wird

durch den Umstand, dass der Kern keinerlei Stösse erfährt, die Giltigkeit des Satzes auch für diesen zwar nicht gestört, aber der Beweis erheblich erschwert. Denn würde auch der Kern Stösse erfahren, so würde sofort folgen, dass F von c'' in derselben Weise wie von c abhängt, und wir wären zu Ende. So aber müssen wir mit die Centralbewegung der Dublets weiterrechnen.

Man beweist zunächst leicht, dass bei der gefundenen Zustandsverteilung für jede Wertecombination von c'', ϱ, α'' die Werte von c, α, β durch die Zusammenstösse jede Veränderung durchschnittlich genau ebenso oft, wie die gerade entgegengesetzte erfahren. Werden daher auch gewisse Formen der Centralbewegung plötzlich durch einen Zusammenstoss zerstört, so entstehen doch wieder anderswo umgekehrt durch Zusammenstösse ebenso oft wieder dieselben Formen und es müsste daher dasselbe Verteilungsgesetz der Centralbewegungen auch fortbestehen bleiben, wenn plötzlich alle Zusammenstösse aufhörten.

Es ist nun sonderbar, dass gerade für das einfache, von Lord Kelvin angenommene Gesetz der Proportionalität der Centralkraft mit ϱ die nun noch nötige Rechnung am weitschweifigsten wird. Um daher nicht gezwungen zu sein, den angezogenen Satz M. Morgan's allzusehr zu ignorieren, will ich ein anderes Gesetz, z. B. $a\varrho + \frac{b}{\varrho^3}$, oder irgend eines voraussetzen, wobei der Winkel zweier sich folgender Apsidenrichtungen im allgemeinen zu π in keinem rationalen Verhältnisse steht.

Die Gesamtenergie eines Dublets ist

$$L = \frac{mc^2}{2} + \frac{m''c''^2}{2} + \varphi(\varrho),$$

wobei φ die Potentialfunktion ist. Die doppelte Flächengeschwindigkeit der Centralbewegung (der Relativbewegung von Schale und Kern in der Bahnebene) ist

$$K = \varrho\sqrt{c^2\sin^2\alpha + c''^2\sin^2\alpha'' - 2cc''\sin\alpha\sin\alpha''\cos\beta},$$

die mit $m + m''$ multiplicierte Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Dublets ist

$$G = \sqrt{m^2c^2 + m''^2c''^2 + 2mm''cc''(\cos\alpha\cos\alpha'' + \sin\alpha\sin\alpha''\cos\beta)}$$

und sie hat senkrecht zur Bahnebene die Componente

$$H = \frac{cc''\sin\alpha\sin\alpha''\sin\beta}{\sqrt{c^2\sin^2\alpha + c''^2\sin^2\alpha'' - 2cc''\sin\alpha\sin\alpha''\cos\beta}}.$$

Die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche K, L, G, H zwischen den Grenzen

K und $K + dK$, L und $L + dL$, G und $G + dG$, H und $H + dH$

liegen, soll

$$\Phi(K, L, G, H)\, dK\, dL\, dG\, dH$$

heissen. Die Zahl derjenigen unter allen diesen Dublets, für welche noch ϱ zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liegt, ist

$$\Phi \cdot dK\, dL\, dG\, dH \cdot \frac{d\varrho}{\sigma} : \int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\sigma} = \Psi\, dK\, dL\, dG \cdot dH \frac{d\varrho}{\sigma}.$$

Hiebei ist $\sigma = \frac{d\varrho}{dt}$, $\int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\sigma}$ ist die Zeit, welche von einem Peri- bis zu einem Apocentrum vergeht, also eine gegebene Funktion von K, L, G, H; $\Psi = \Phi : \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sigma}$ ist ebenfalls eine Funktion dieser 4 Grössen. Beschränken wir uns auf jene Dublets, für welche 1. noch die letzte Apsidenlinie der Bahn mit einer in der Bahnebene einer fixen Ebene parallel gezogenen Geraden einen Winkel bildet, der zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, 2. die beiden durch die Geschwindigkeit des Schwerpunkts normal zur Bahnebene und parallel einer fixen Geraden Γ gelegten Ebenen einen Winkel bilden, der zwischen

ω und $\omega + d\omega$ liegt, und endlich 3. noch die Geschwindigkeitsrichtung des Schwerpunkts innerhalb eines Kegels von gegebener Richtung und unendlich kleiner Oeffnung $d\lambda$ fällt, so haben wir noch mit $d\varepsilon\, d\omega\, d\lambda : 16\pi^3$ zu multiplicieren. Die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, welche alle diese Bedingungen erfüllen, ist daher

$$\Psi \cdot \frac{1}{16\pi^3\sigma} dK\, dL\, dG\, dH\, d\varrho\, d\varepsilon\, d\omega\, d\lambda. \qquad 11)$$

Bezeichnen wir mit g und $g + dg$, h und $h + dh$, k und $k + dk$ die Grenzen, zwischen denen für die Dublets die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes bezüglich der fixen rechtwinkligen Coordinatenaxen liegen, so ist

$$G^2\, dG\, d\lambda = dg\, dh\, dk.$$

Nun lassen wir g, h und k constant, legen durch die Schale (deren Centrum) ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Axe die Richtung von G hat, bezeichnen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des Kerns bezüglich dieses Systems mit $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1$ und transformieren diese 6 Variabeln in $K, L, H, \varrho, \varepsilon, \omega$. Wir führen da ein zweites Coordinatensystem ein, bezüglich dessen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der Schale mit $x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2$ bezeichnet werden sollen. Die z-Axe des 2. Systems soll senkrecht zur Bahnebene, die x-Axe in deren Durchschnittlinie mit der alten xy-Ebene liegen. Es ist dann

$$H = G \sin \vartheta,$$

wenn $90 - \vartheta$ der Winkel beider z-Axen ist; daher, weil G constant ist,

$$dH = G \cos \vartheta\, d\vartheta.$$

Endlich bezeichnen wir den Winkel der beiden x-Axen mit ω, da er sich von dem früher so bezeichneten Winkel jedenfalls nur um einen Betrag unterscheidet, den wir jetzt als constant zu betrachten haben. Wir finden:

$$z_2 = x_1 \cos\vartheta \sin\omega + y_1 \cos\vartheta \cos\omega + z_1 \sin\vartheta$$
$$w_2 = u_1 \cos\vartheta \sin\omega + v_1 \cos\vartheta \cos\omega + w_1 \sin\vartheta,$$

welche beide Ausdrücke verschwinden müssen, da die $x_2 y_2$-Ebene Bahnebene ist. Mittelst dieser beiden Gleichungen kann man bei constantem x_1, y_1, u_1, v_1 zunächst ϑ, ω statt z_1, w_1 einführen und findet

$$dz_1\, dw_1 = (y_1 u_1 - x_1 v_1) \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} d\vartheta\, d\omega.$$

Nun ist weiter

$$x_2 = x_1 \cos\omega - y_1 \sin\omega$$
$$y_2 \sin\vartheta = x_1 \sin\omega + y_1 \cos\omega$$

und analoge Gleichungen folgen für u_2, v_2, u, v. Daraus folgt

$$y_1 u_1 - x_1 v_1 = \sin\vartheta\,(y_2 u_2 - x_2 v_2) = K \sin\vartheta$$

und bei constantem ϑ und ω

$$dx_2\, dy_2 \sin\vartheta = dx_1\, dy_1; \quad du_2\, dv_2 \sin\vartheta = du_1\, dv_1,$$

daher

$$dx_1\, dy_1\, dz_1\, du_1\, dv_1\, dw_1 = K \cos\vartheta\, dx_2\, dy_2\, du_2\, dv_2\, d\vartheta\, d\omega.$$

Nun bezeichnen wir, wie früher, mit σ und τ die Geschwindigkeitscomponenten der Relativbewegung von Schale und Kern in der Richtung von ϱ und senkrecht darauf; dann ist bei constantem x_2 und y_2

$$d\sigma\, d\tau = du_2\, dv_2$$

$$K = \varrho\tau, \quad L = L_q + \frac{mm''}{2(m+m'')}(\sigma^2 + \tau^2) + \varphi(\varrho)$$

$$dK\, dL = \frac{mm''}{m+m''} \sigma\varrho\, d\sigma\, d\tau,$$

wobei L_q die jetzt constant betrachtete Energie der Schwerpunktsbewegung ist. Ist endlich ψ der Winkel zwischen ϱ und der letzten Apsidenlinie, so folgt

$$x_2 = \varrho \cos(\varepsilon + \psi), \quad y_2 = \varrho \sin(\varepsilon + \psi),$$

wobei ψ Funktion von ϱ, K und L ist; letztere beide sind jetzt constant, daraus folgt

$$\varrho\, d\varrho\, d\varepsilon = dx_2\, dy_2.$$

Fasst man alles zusammen, so ist:

$$dx_1\, dy_1\, dz_1\, du_1\, dv_1\, dw_1 = \frac{m + m''}{m m''} \frac{K}{\sigma} dK\, dL\, dH\, d\varrho\, d\omega\, d\varepsilon$$

und man sieht sofort, dass, wenn sich Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten ohne Index auf ein beliebig gelegenes fixes Coordinatensystem beziehen, ebenfalls

$$dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw = \frac{m + m''}{m m''} \frac{K}{\sigma} dK\, dL\, dH\, d\varrho\, d\omega\, d\varepsilon$$

sein muss. Führen wir diess in den Ausdruck 11) ein und bedenken noch, dass bei constantem u, v, w

$$dg\, dh\, dk = \frac{m''^3}{(m + m'')^3} du''\, dv''\, dw'',$$

so findet man

$$\frac{1}{16\pi^3} \frac{m m''^4}{(m + m'')^4} \frac{\psi}{K G_2} dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw\, du''\, dv''\, dw''$$

als die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x \cdots w''$ zwischen x und $x + dx \cdots w''$ und $w'' + dw''$ liegen. Da wir für diese Zahl früher den Ausdruck

$$F \cdot dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw\, du''\, dv''\, dw''$$

fanden und sahen, dass F die Form haben muss Ae^{-hmc^2}, wobei A nur Funktion von c'', ϱ und α'' sein kann, so folgt, wenn wir jetzt setzen

$$F = Be^{-h(mc^2 + m''c''^2 + 2\varphi(\varrho))}.$$

dass B einerseits nur Funktion von c'', ϱ und α'', anderseits nur Funktion von K, L, G und H sein kann.

Es muss B also eine solche Funktion dieser letzteren Variabeln sein, welche von den Werten von c, α und β ganz unabhängig und bloss Funktion von c'', ϱ und α'' ist. Setzen wir $\beta = 0$, so wird

$$K = \varrho\,(c'' \sin \alpha'' - c \sin \alpha)$$
$$G^2 = m^2 c^2 + m''^2 c''^2 + 2\,mm''\,cc'' \cos(\alpha'' - \alpha)$$
$$H = 0,$$

während

$$L = \frac{m\,c^2}{2} + \frac{m'' c''^2}{2} + \varphi\,(\varrho)$$

ist. Die Elimination von c und α aus diesen Gleichungen liefert:

$$c''^2 \sin^2 \alpha'' \left[(m + m'')\,(2\,L - \varphi) - G^2\right] -$$
$$- K \sin \alpha'' \left[m\,(2\,L - \varphi) + m''\,(m + m'')\,c''^2 - G^2\right] + mm'' K^2 +$$
$$\varrho^2 \left\{ m''^2 c''^2 - m''(2L - \varphi) + \frac{1}{4mm'' c''^2}\left[G^2 - m(2L - \varphi) + m'(m - m'')c''^2\right]^2 \right\}$$
$$= 0.$$

Denken wir uns aus dieser Gleichung etwa c'' bestimmt, so sollen wir erhalten $c'' = \chi\,(\alpha'', \varrho, L, G, K)$. Wir wissen nun, dass B sich sowohl als Funktion von c'', α'', ϱ, als auch von L, G, K muss ausdrücken lassen, also

$$B = F\,(\chi, \alpha'', \varrho) = \Phi\,(L, G, K).$$

Diese Gleichung muss auch für $\alpha'' = 0$ gelten; es muss also $F(\chi, 0, \varrho)$ bloss Funktion von L, G, K sein, welche wegen der Willkürlichkeit von c und α auch für $\alpha'' = 0$ noch independent sind. Für $\alpha = 0$ wird:

$$m''^2\,(m + m'')^2\,c''^4 + \qquad 12)$$
$$+ 2\,m''\,c''^2 \left[(m - m'')\,D + 2\,m^2 m'' \frac{K^2}{\varrho^2} + (\varphi - 2L)\,m\,(m + m'')\right] +$$
$$+ \left[D + m\,(\varphi - 2L)\right]^2 = 0.$$

Setzen wir

$$(m - m'')\,D - 2m(m + m'')\,L = \xi,\quad D - 2m\,L = \eta,$$
$$2m^2 m''\,K^2 = \zeta,$$

so müsste sich $F(c'', \varrho)$ auf eine Funktion von ξ, η, ζ reducieren, wenn darin c'' durch Gleichung 12) als Funktion von ϱ, L, D, K ausgedrückt wird. Da durch Veränderung von c und α bewirkt werden kann, dass sich ξ und η unabhängig von c'', α'' und ϱ verändern, so muss auch

$$\frac{\partial F}{\partial c''}\cdot\frac{\partial c''}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial c''}\cdot\frac{\partial c''}{\partial \eta}$$

von ϱ unabhängig sein. Diess kann aber wegen

$$\frac{\partial c''}{\partial \zeta} = \varrho^2\,\frac{\partial c''}{\partial \xi}$$

nur stattfinden, wenn entweder $\frac{\partial c''}{\partial \xi}$ oder $\frac{\partial F}{\partial c''}$ verschwindet.

Erstere Grösse hat den Wert

$$-\frac{c''}{2m''(m + m'')^2 c''^2 + 2\xi + \frac{2\zeta}{\varrho^2} + 2m(m+m'')\,\varphi}$$

kann also nicht allgemein verschwinden, da c'', ϱ, ξ und ζ auch für $\alpha'' = \beta = 0$ noch unabhängig von einander geändert werden können. Es muss also F von c'' und daher auch von ϱ unabhängig sein; daraus folgt sofort, dass es auch von α'' unabhängig ist, da ja α'' nicht als Funktion von L, G und K allein ausdrückbar ist. Es muss also F oder B eine Constante sein, womit die Verteilung der lebendigen Kraft endlich eindeutig bestimmt ist. Vorausgesetzt ist dabei noch, dass φ so beschaffen ist, dass Kern und Schale überhaupt beisammen bleiben, und auch nicht in einen Punkt zusammenschrumpfen, da sonst die obigen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen unzulässig werden.

Dass sich namentlich die meisten gemachten Schlüsse durch etwas erläutert werden lassen, scheint mir wahrscheinlich; doch dürften auch in dieser Darstellung die allgemeinen Ursachen nur hervortreten, welche die Richtigkeit des Theorems unabhängig von den speciellen Details der Aufgabe verbürgen.

Ueber wissenschaftliche Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschiffahrt.

Von L. Sohncke.

(Eingelaufen am 5. November.)

Vor etwa drei Jahren ist in München ein Verein für Luftschiffahrt ins Leben getreten, der sich des regen Interesses weiter und hochangesehener Kreise erfreut; ich darf z. B. anführen, dass unter den 363 Mitgliedern sich 6 Prinzen des königlichen Hauses befinden. Der Verein ist in drei Abteilungen gegliedert; die erste derselben: die wissenschaftliche, verfolgt den Zweck, unsere Kenntnisse von der Physik der Atmosphäre zu fördern. Dass die Fahrten mit dem Vereinsballon volle Sicherheit bieten, dafür bürgt die thätige Teilnahme vieler Mitglieder der militärischen Luftschifferabteilung. Nur so ist es möglich, dass jede Fahrt von völlig Sachkundigen überwacht und geleitet wird.

Eine Anzahl der mit dem Vereinsballon ausgeführten Fahrten war ausdrücklich als „wissenschaftliche" Fahrt vorbereitet und durchgeführt, wobei die thätige Teilnahme der k. b. meteorologischen Centralstation sich besonders wertvoll erwies. Aber auch bei mancher anderen Fahrt wurden sorgfältige Temperaturbeobachtungen mit dem Aspirationsthermometer gemacht, die schon zu interessanten Folgerungen geführt haben.

Obgleich die bisherigen wissenschaftlichen Arbeiten des Vereins naturgemäss mehr den Charakter von Vorstudien auf diesem schwierigen Gebiet tragen, so enthalten die beiden Jahresberichte des Vereins doch schon einige Abhandlungen mit nicht unwichtigen Ergebnissen, von denen hier einige angeführt seien.

Herr Professor Finsterwalder hat ermittelt, dass bei der wissenschaftlichen Fahrt am Mittag des 25. Juni 1890 in den verschiedenen Höhen mit grosser Annäherung solche Temperaturen beobachtet wurden, wie sie im aufsteigenden Luftstrom bei Condensation theoretisch gefordert werden. Theoretisch sollte unter den damaligen Verhältnissen die Condensation etwas oberhalb 1500 m Meereshöhe beginnen. Und thatsächlich drang der Ballon bei circa 1400 m Meereshöhe in Wolken ein, deren obere Grenze erst nach einer weiteren Steigung von 1000 m überschritten wurde.

Herr Dr. Erk hat eine Vereinsfahrt bearbeitet, die zwar nicht eine eigentlich wissenschaftliche war, bei der aber doch sorgfältige Temperaturbeobachtungen angestellt wurden. Sie wurde in der Mittagszeit des 11. Dezember 1890 ausgeführt. In 600 m über dem Boden drang der Ballon in eine sehr weit ausgedehnte, aber nur 100 m mächtige Wolkenschicht ein, die er während der ganzen weiteren Fahrt unter sich liess. Während unter und in der Wolkenschicht Temperaturen unterhalb des Eispunkts beobachtet wurden, herrschte oben viel höhere Temperatur, und zwar über 0°. Die Wolkenbank bildete die Grenze eines unteren kalten Ostwindes, der eine schwach aufsteigende Tendenz hatte, und eines oberen warmen Nordostwindes, dessen Erwärmung durch sein Herabsinken, also dynamisch, bedingt war.

Herr Dr. Erk und Herr Professor Finsterwalder haben gemeinsam diejenigen Beobachtungen bearbeitet, welche Herr Professor P. Vogel in dem v. Sigsfeld'schen Ballon am 10. Juli 1889 Vormittags angestellt hat. Die

Fahrt ging nach Osten, etwas über Wasserburg hinaus. Gleichzeitig wurden stündliche Beobachtungen in Bayrisch-Zell und im Wendelsteinhaus gemacht. Aus den Barometerbeobachtungen an letzteren beiden Orten, deren Höhenunterschied ja bekannt ist, vermag man die Mitteltemperatur der Luftsäule abzuleiten, welche in jener Gebirgsgegend vom unteren zum oberen Niveau reicht. Vergleicht man damit die im Ballon innerhalb der entsprechenden Höhen beobachteten Temperaturen, so zeigt sich die Mitteltemperatur dieser Luftsäule in der freien Atmosphäre fern vom Gebirge etwa 2,3° niedriger. Der erwärmende Einfluss der Berghänge ist also keineswegs nur auf die unmittelbar am Boden anliegende Luft beschränkt, sondern betrifft die ganze in den Gebirgsfalten befindliche Luft.

Wenn so schon einzelne bemerkenswerte Ergebnisse gewonnen sind, so bleibt doch noch viel zu forschen übrig. Einige Aufgaben, welche die wissenschaftliche Abteilung demnächst in Angriff zu nehmen denkt, seien noch erwähnt.

Zur Gewinnung brauchbarer Data ist es nötig, den Stand des Barometers und Thermometers möglichst gleichzeitig abzulesen, was bei den berühmten wissenschaftlichen Hochfahrten Glaishers keineswegs erreicht war. Nach Professor Finsterwalders Vorschlag werden daher die neben einander aufgestellten drei Instrumente: Aneroid, Thermometer und Uhr, jedesmal auf dasselbe Blatt photographiert. Dies Verfahren verspricht sehr wertvolle Ergebnisse.

Ferner soll durch eine aus der Höhe aufgenommene Photographie bekannten Geländes die augenblickliche Ballonhöhe vermittelst photogrammetrischer Methoden — nach Professor Finsterwalders Angaben — bis auf $^1/_{1000}$ sicher bestimmbar sein. Hierdurch wird dann die Mitteltemperatur der Luftsäule aus der barometrischen Höhenformel bestimmbar, wenn gleichzeitig der Barometerstand abgelesen ist.

Eine besonders wichtige Aufgabe ist ferner die Beobachtung von Lufttemperaturen bei Nacht, weil alsdann die darüber vom erwärmten Boden aufsteigenden Ströme warmer Luft keine Störung mehr herbeiführen können. Dazu werden im Hochsommer Nachtfahrten von Mitternacht bis zur Morgendämmerung auszuführen sein, und es wird versucht werden, zum Zweck des Photographierens der Angaben der Instrumente, momentane Beleuchtung mit Glühlampen anzuwenden, weil andere Beleuchtungsarten zu feuergefährlich sein würden.

Die hier genannten Ziele sind nicht so hochfliegend, wie jene des Berliner Vereins zur Förderung der Luftschiffahrt, welcher beabsichtigt seinen Ballon bis [illegible] zu empor[illegible] zu [illegible]. Indessen ist ein gewisses Zusammenwirken beider Vereine sehr erwünscht, worüber sich Herr Professor Assmann in einer Abhandlung vom März [illegible] in der Zeitschrift für Luftschiffahrt folgendermassen äussert: [illegible] haben wir noch des Planes [illegible] welche zu weiteren [illegible] Die A[illegible]

[illegible] in München.

[illegible] der Atmosphäre über

unserem Deutschland zu arbeiten! Auch dieses ist ein Ziel, welches grosse Ergebnisse verspricht!"

Zur Erreichung der Ziele, welche sich der Münchener Verein für Luftschiffahrt auf wissenschaftlichem Gebiet gesteckt hat, wäre die moralische Unterstützung seiner Bestrebungen seitens der k. b. Akademie der Wissenschaften von unschätzbarem Werte. Denn auf sich selbst und seine bescheidenen Mittel angewiesen, ist der Verein nicht im Stande, die kostspieligen Apparate (Aspirations-Psychrometer, selbstregistrierende Aneroide und Thermometer, Quecksilberbarometer, photographische Apparate, elektrische Beleuchtungsvorrichtungen u. dgl.) anzuschaffen und auch noch wiederholte Auffahrten zu bestreiten, deren jede ja mehrere hundert Mark Kosten verursacht. Wenn aber eine hochangesehene wissenschaftliche Korporation wie diese hohe Klasse der Akademie den Nutzen der fraglichen Vereinsbestrebungen ausdrücklich anerkennt, so wird die Beschaffung der erforderlichen Mittel wesentlich erleichtert werden.

Ich will nicht unterlassen zu erwähnen, dass die kgl. preussische Akademie die Erspriesslichkeit solcher Bestrebungen bereits unzweideutig anerkannt hat, nämlich durch pekuniäre Unterstützung aus ihren Fonds. Unter diesen Umständen ist es kein Wunder, dass dem Berliner Verein zur Förderung der Luftschiffahrt von Seiten mehrerer Privaten reiche Unterstützung zuteil geworden ist. Herr Kommerzienrat Rudolph Hertzog hat für einen Fesselballon eigens Primaseide anfertigen lassen und sie jenem Verein zur Verfügung gestellt, ein Geschenk von mehr als 1100 Mark. Herr Geh. Rath Werner v. Siemens schenkte ein 800 m langes Kabel von Wolframstahldraht mit isolirter Kupferleitung; derselbe stellte für den Fesselballon sein Terrain neben der Charlottenburger Gasfabrik zur Verfügung und erbaute daselbst sogar eine Ballonhalle. Herr Killisch v. Horn, Besitzer des Berliner Börsenkuriers, überwies dem

Verein 3000 Mark zur Beschaffung wissenschaftlicher Instrumente und stellte dem Verein überdies seinen Privatballon M. W. zur Verfügung (ähnlich wie unser Verein den Privatballon des Herrn v. Sigsfeld dauernd benutzen durfte, so lange er noch brauchbar war). Bekanntlich hat nun vor kurzem S. Majestät der Kaiser Wilhelm ein von mehreren Gelehrten, namentlich auch von v. Helmholtz unterzeichnetes Immediatgesuch damit beantwortet, dass er für die Zwecke des Berliner Vereins 50000 Mark anwies.

Angesichts aller vorstehenden Erwägungen und thatsächlichen Mitteilungen ist die hohe Klasse vielleicht geneigt, meiner Bitte zu willfahren und zu Gunsten des Münchener Vereins für Luftschiffahrt eine Erklärung abzugeben, durch welche die wissenschaftlichen Bestrebungen des Vereins als für die Wissenschaft förderlich anerkannt werden.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1892.

Die Festsitzung wurde mit folgenden Worten des Präsidenten der Akademie, Geh.-Raths Dr. von Pettenkofer, eröffnet:

„Die heutige Festsitzung der k. Akademie der Wissenschaften findet statt zu Ehren ihres Protectors, Sr. K. Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold von Bayern, dessen Namensfest hiemit gefeiert wird. Die Akademie blickt jedes Jahr an diesem Tage dankbar auf zu ihrem Protector, dabei ihrer Stiftung und Entwicklung durch allerhöchst dessen Vorfahren aus dem Hause Wittelsbach gedenkend, welche gleich unserm Protector nicht nur Herren, sondern auch Freunde und Förderer ihres Landes waren.

Dieser Tag ist jährlich auch dazu bestimmt, die Wahlen neuer Mitglieder zu verkünden, nachdem die allerhöchste Bestätigung derselben erfolgt ist.

Die Mitglieder der Akademie theilen sich in ordentliche und ausserordentliche, am Sitze der Akademie wohnende, und in auswärtige und correspondirende. Sie gehören der philosophisch-philologischen, der mathematisch-physikalischen und der historischen Classe an. Neben diesen drei Fachclassen hat die Akademie auch Ehrenmitglieder, als welche

Personen gewählt werden, welche nicht Fachleute zu sein brauchen, aber sich durch Liebe zu den Wissenschaften und durch Unterstützung derselben verdient gemacht haben.

Ich habe heute zunächst als Präsident die Wahl eines Ehrenmitgliedes zu verkünden, und zwar — was bisher noch nicht dagewesen ist — eines weiblichen.

Nach den zur Zeit gültigen Gesetzen können Frauen nicht Mitglieder einer der drei Classen der Akademie werden, auch nicht, wenn sie sich in einer Fachwissenschaft vor Männern hervorgethan haben. Anders liegt es bei den Ehrenmitgliedern. Die Constitutionsurkunde der k. Akademie der Wissenschaften vom 1. Mai 1807 bestimmt, dass zu Ehrenmitgliedern Persönlichkeiten gewählt werden können, „welche nach ihren Verhältnissen die Bedingungen zu ordentlichen Mitgliedern nicht erfüllen, aber sonst durch Rang oder andere äussere Verhältnisse, verbunden mit wissenschaftlichen Kenntnissen und Liebe zu den Wissenschaften, zur Beförderung der Zwecke der Akademie beitragen können."

Es konnte uns nur erfreulich sein, eine Dame von hohem Range, aus dem Hause Wittelsbach zu wissen, welche alle diese Vorbedingungen in reichem Maasse erfüllt hat. Sie hat durch ausgebreitete gründliche Sprachstudien, durch Anlage werthvoller naturwissenschaftlicher Sammlungen, wovon sie interessante Stücke auch den wissenschaftlichen Sammlungen des Staates einverleibte, nicht nur grosse Liebe zu den Wissenschaften schon gezeigt, sondern ist auch literarisch unter dem Pseudonym Th. von Bayer durch Beschreibung ihrer Reisen nach Norwegen, in den Polarkreis und nach Russland hervorgetreten. Gegenwärtig arbeitet die hohe Dame wieder an einem grossen Reisewerk über Brasilien.

Die Gesammt-Akademie wählte demnach Ihre Königliche Hoheit Prinzessin Therese von Bayern zum Ehren-Mitgliede."

Wahlen.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

zu ordentlichen Mitgliedern:

Das bisherige ausserordentliche Mitglied Herr Dr. Walther Dyck, o. Professor für Mathematik an der technischen Hochschule dahier;

Herr Joh. Bauschinger, o. Professor für Mechanik an der technischen Hochschule dahier;

Herr Dr. Karl Goebel, o. Professor für Botanik an der Universität München;

zu correspondirenden Mitgliedern:

Geh. Regierungsrath Dr. Wilhelm Foerster, o. Professor für Astronomie an der Universität und Director der k. Sternwarte zu Berlin;

Herr Dr. Alexander Rollet, o. Professor für Physiologie an der Universität Graz.

Sodann sprach der Präsident der Akademie noch Folgendes:

Ich habe noch einige Auszeichnungen zu erwähnen, welche die Akademie und die mit ihr verbundenen [illegible] der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates im Laufe des [illegible] zugewendet haben. [illegible]

[illegible] wissenschaftlichen Sammlungen zu erhalten und zu [illegible].

[illegible]

Für die laufenden Publicationen der Akademie, Sitzungsberichte, Denkschriften u. s. w. werden regelmässig im Etat durch das Finanzgesetz die erforderlichen Mittel bewilligt. Daneben unterstützt die Akademie mit den bescheidenen Mitteln, welche ihr der Verkauf ihrer Schriften gewährt, besondere wissenschaftliche Arbeiten in den drei Classen, so früher in der philosophisch-philologischen Classe die Herausgabe von Wölfflins Archiv für lateinische Lexikographie und Grammatik, und neuerdings Krumbachers Byzantinische Zeitschrift; in der mathematisch-physikalischen Classe den Druck des schon von Lamont begonnenen Sternkatalogs. Ebenso wurden Fraunhofers gesammelte Werke herausgegeben und ist die Herausgabe der Schriften des Mathematikers Otto Hesse in Vorbereitung. Die historische Classe gibt die Monumenta Tridentina heraus, ein Quellenwerk ersten Ranges für die Geschichte des Trienter Concils, welches Werk leider im Augenblick durch den Tod des Verfassers, unseres Mitgliedes August v. Druffel. unterbrochen ist und eines Vollenders harrt."

Sitzung vom 3. Dezember 1892.

1. Herr E. Lommel macht eine Mittheilung: „Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens.“

2. Herr W. Dyck legt vor und bespricht den Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, welcher aus Anlass der beabsichtigten mathematischen Ausstellung bei der unterbliebenen Naturforscherversammlung zu Nürnberg mit Unterstützung der k. b. Akademie und des Reiches von Herrn Dyck herausgegeben wurde.

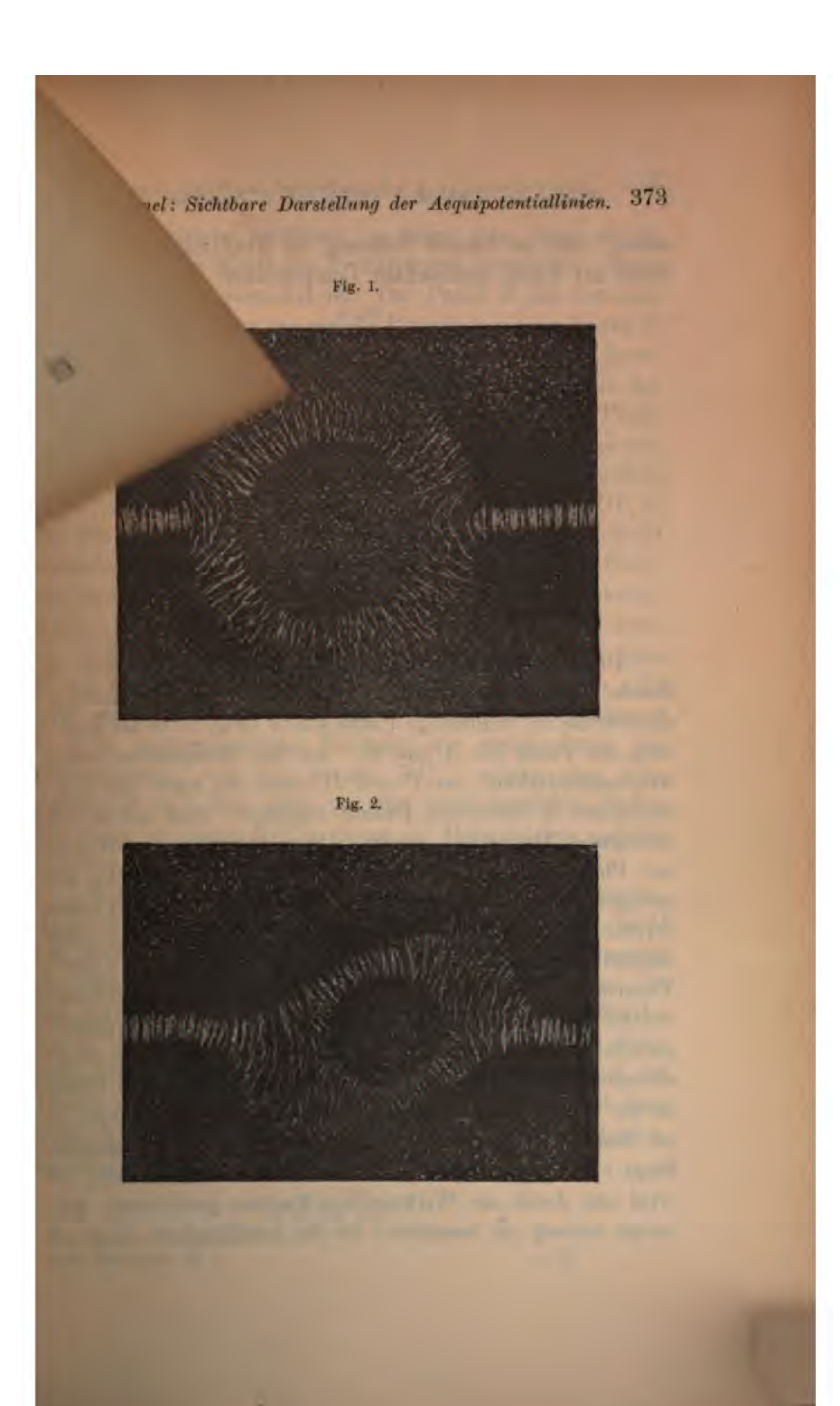
Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens.

Von E. Lommel.

(Eingelaufen 3. Dezember.)

Es ist nicht schwer, einzusehen, dass die zu den Stromlinien einer leitenden dünnen Platte senkrechten Linien gleichen Potentials zugleich die zu der Strömung gehörigen magnetischen Kraftlinien sind. Streut man daher Eisenfeilspäne auf die Platte, so ordnen sich dieselben bei genügender Stromstärke zu einem schönen Bilde der Aequipotentiallinien.

Die benutzten Platten waren Kupferplatten von circa $\frac{1}{2}$ mm Dicke und von verschiedenen Formen, an deren Rand, in der Ebene der Platte liegend, die Zuleitungsdrähte angelöthet waren. Die angewendete Stromstärke betrug circa 20 Ampère. Die Feilspäne gruppiren sich immer so, wie es die Theorie für die Aequipotentiallinien verlangt; die Curven stehen namentlich stets senkrecht zu den Begrenzungslinien der Platte (die ja immer Stromlinien sind), wo sie umbiegen, um auf der Rückseite der Platte in sich zurückzulaufen. Um die Bilder festzuhalten, wurde über die Platte (bei rother Beleuchtung) photographisches Papier gebreitet und auf dieses die Eisenfeile gesiebt; die Figuren bilden sich auf dem Papier ebenso vollkommen aus, wie auf der Platte


Fig. 1.
Fig. 2.

selbst, und das Aufflammen eines Zündhölzchens genügt, um das Bild dem lichtempfindlichen Papierblatt einzuprägen. Mit Beiseitelassung der einfacheren und bekannteren Fälle seien von den zahlreichen Aufnahmen hier nur zwei minder gewöhnliche Beispiele wiedergegeben. Fig. 1 zeigt die Aequipotentialen einer ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Platte, mit Elektroden an den Endpunkten eines Durchmessers des äusseren Kreises. Da die Aequipotentiallinien nur auf der Platte selbst, nicht aber auf ihrer nichtleitenden Unterlage entstehen, so geben sie zugleich ein durch jene Linien schraffirtes Bild der Platte selbst; in derselben Weise bilden sich auch die Zuleitungsdrähte ab. Die Figur 2 wurde erzeugt über einer rechteckigen Platte mit einem kreisrunden Loch und Elektroden an zwei gegenüberliegenden Ecken; auch hier ist das Bild der Platte sammt ihren Zuleitungsdrähten deutlich zu erkennen.

Die Erkenntniss, dass die Aequipotentialen Magnetkraftlinien sind, legte den Gedanken nahe, dass die Lagenänderung der Aequipotentiallinien in einem Magnetfelde, wie sie im Hall'schen Phänomen beobachtet wird, vielleicht als eine unmittelbare Wirkung der Kraftlinien des Magnetfeldes auf die Kraftlinien der Strömung angesehen werden könne. Sind jedoch die Magnetkraftlinien zur Platte parallel, so zeigt sich das Hall'sche Phänomen bekanntlich nicht. Nähert man der durchströmten Platte in ihrer Ebene irgendwo von seitwärts einen Magnetpol, so ordnen sich die Feilspäne in Linien, welche augenscheinlich die Resultanten sind aus den beiden Systemen von Kraftlinien, deren jedes unabhängig für sich bestehen bleibt. Von einer unmittelbaren Wirkung der Magnetkraftlinien auf die Aequipotentialen kann also nicht die Rede sein.

Das Hall'sche Phänomen wird vielmehr nur hervorgerufen durch Magnetkraftlinien, welche senkrecht zur Platte

Fig. 1.

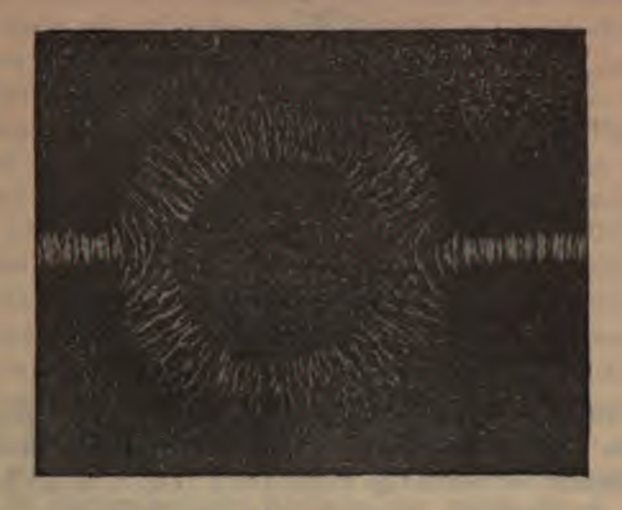
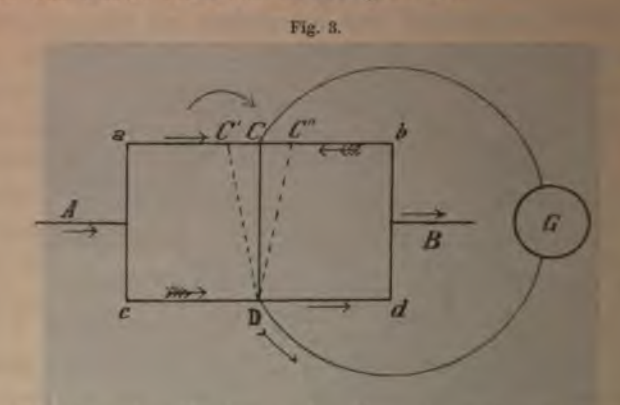


Fig. 2.



stehen, oder, bei schiefer Richtung der Kraftlinien, nur durch deren zur Platte senkrechten Componenten.

Fig. 3.



Die Art der Wirkung des Magnets auf die Platte in diesem Falle stelle ich mir vor wie folgt. Der Primärstrom durchfliesse die rechteckige Platte *a b c d* (Fig. 3) in der Richtung der Pfeile bei *A* und *B*. An den Endpunkten einer Aequipotentiallinie, bei *C* und *D*, seien die nach dem Galvanometer *G* führenden Drähte angelegt. Nun werde ein homogenes Magnetfeld erregt, dessen Kraftlinien senkrecht zur Platte (zur Ebene der Zeichnung) gerichtet sind; der gebogene Pfeil bezeichne die Richtung der Ampère'schen Ströme des Magnets. Besteht die Platte aus einem diamagnetischen Metall, so werden in ihr nach W. Weber's Theorie des Diamagnetismus Molekularströme wachgerufen, welche den Ampère'schen Strömen des Magnets entgegengerichtet sind, und sich in bekannter Weise zu einem resultirenden Strome zusammensetzen, welcher den Rand der Platte in der Richtung der gefiederten Pfeile umfliesst. Längs *ab* ist dieser Molekularstrom dem Primärstrom entgegengesetzt, längs *cd* ihm gleichgerichtet. Der Primärstrom entlang *ab* wird also durch die Wirkung des Magnets geschwächt, derjenige entlang *cd* verstärkt. Ist die Leitfähigkeit längs *ab*

und cd die gleiche geblieben, so folgt, dass längs ab die elektromotorische Kraft des Primärstroms vermindert, längs cd um ebensoviel vermehrt ist. Der Punkt D hat demnach nicht mehr wie vorher das gleiche Potential wie der Punkt C, sondern ein höheres. Verbindet man daher D mit C durch ein Galvanometer, so geht durch letzteres ein Strom in der Richtung des Pfeiles bei D, der Hall'sche Strom. Ein Punkt auf ab von gleichem Potential mit D würde jetzt links von C etwa bei C' liegen müssen, und die Gerade DC', welche diese jetzt äquipotentialen Punkte verbindet, gegen DC in der den Magnetströmen entgegengesetzten Richtung gedreht erscheinen (negative Drehung). Besteht dagegen die Platte aus einem magnetischen Metall mit praeformirten Molekularströmen, welche sich mit den Magnetströmen gleichrichten, so verstärkt der resultirende Molekularstrom den Primärstrom in ab, und schwächt ihn in cd, der Hall'sche Strom geht jetzt von dem höheren Potential in C nach dem niedrigeren in D in entgegengesetzter Richtung wie vorhin durch das Galvanometer, und die Gerade DC'', welche man vom Punkte D nach dem jetzt mit ihm äquipotentialen Punkte C'' zieht, ist gegen DC im Sinne der Magnetströme gedreht (positive Drehung).

Wird durch diese Wirkung des Magnets auf den Primärstrom das Potential in D um den Betrag e erhöht, in C um ebensoviel erniedrigt, so ist $2e$ die Klemmenspannung der Galvanometerleitung DGC; ist r deren Widerstand, so hat der durch das Galvanometer fliessende Strom die Stärke $2e/r$. Ist ferner ε die im ganzen Stromkreis $DGCD$ wirksame elektromotorische Kraft und R der Widerstand der Platte, so ist dieselbe Stromstärke auch $\varepsilon/(R+r)$, und man findet durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke die elektromotorische Kraft des Hall'schen Stromes

$$\varepsilon = 2e\frac{R+r}{r},$$

oder genähert, wenn r gegen R klein ist (eine für das Gelingen des Hall'schen Versuches erforderliche Bedingung):

$$\varepsilon = 2e\frac{R}{r}.$$

Die Grösse $2e$ ist offenbar der Stärke M des Magnetfeldes proportional. Da sie ferner mit dem Primärstrome verschwindet, so setzen wir sie auch dessen Stromstärke J proportional. Wir denken uns nämlich die Wirkung jener Molekularströme als eine Art Reibung, welche für sich keine Bewegung hervorrufen, sondern nur vorhandene Bewegung ändern kann. Wir setzen demnach

$$2e = \varkappa J M,$$

wo $\varkappa$ eine Art Reibungscoëffient vorstellt, der von der molekularen Beschaffenheit des Plattenmaterials abhängt. Der Widerstand R der Platte ist ihrem Querschnitt, also auch ihrer Dicke δ umgekehrt proportional. Fasst man alle beim Versuch unverändert bleibenden Grössen in einen constanten Factor K zusammen, so ergibt sich die elektromotorische Kraft des Hall'schen Stromes:

$$\varepsilon = K \cdot \frac{JM}{r\delta};$$

dieselbe ist also direct proportional der Stärke des Primärstromes und des Magnetfeldes, umgekehrt proportional der Dicke der Platte und dem Widerstande des Galvanometers, was mit den Ergebnissen der Erfahrung in vollkommenem Einklang steht.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1892.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philos.-philol. u. histor. Classe bestimmten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1892 Heft IV verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XV, part 1. 1892. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen aus dem Osterlande. N. F. Band V. 1892. 8⁰.
Verzeichniss der Mitglieder. 1892. 8⁰.

Société d'études scientifiques in Angers:

Bulletin. Nouv. Sér. Année 20, 1890. 1891. 8⁰.

Texas Academy of Science in Austin:

Transactions. Vol. I. Nr. 1. 1892. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

25th annual Report. June 1, 1892. 8⁰.

Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië in Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 51. 1892. 8⁰.

K. Preuss. geologische Landesanstalt in Berlin:

Abhandlungen. N. F. Heft 11. 1892. 8⁰.
Jahrbuch für das Jahr 1890. 1892. 8⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 25. Jahrg. Nr. 12—18. 1892. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 44, Heft 2. 1892. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. V. Register. Bd. VI. Nr. 7—18. 1892. 8°.

K. meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889 Heft 3. 1892 Heft 1. 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXI. Heft 3. 1892. 8°.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungs-Ergebnisse. Heft 6. 1892. 4°.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in Berlin:

Gartenflora, Zeitschrift. 41. Jahrg. 1892. 8°.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1892. Nr. 27—52. 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde:

Zeitschrift. XII. Jahrg. 1892. Heft 7—12. Berlin. 1892. 8°.

Allgemeine schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. 32, Abth. 2. Basel 1891. 4°.
Actes de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Fribourg les 19 à 21 août 1891. Fribourg 1892. 8°.
Comptes rendus des travaux présentés à Fribourg les 19 à 21 août 1891. Genève 1891. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus dem Jahre 1891. Nr. 1265—1278. 1892. 8°.

Philosophical Society in Birmingham:

Proceedings. Vol. VII, part 2. 1891. 8°.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn.

Verhandlungen. 49. Jahrg. 1. Hälfte. 1892. 8°.

Société de géographique commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1892. Nr. 12—22. 8°.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 43. 1889. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Memorial of Joseph Lovering, late President of the Academy. Cambridge. 1892. 8°.
Proceedings. Vol. XXVI. 1891. 8°.

Verein für Naturwissenschaften in Braunschweig:

Kloos, Ueber die geolog. Verhältnisse des Untergrundes von Braunschweig. 1891. 8°.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Serie. Tom. 6 Nr. 6–9. 1892. 8°.
Mémoires couronnés in 8°. Tom. XI, fasc. 5. 1892. 8°.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Természettudomanyi Értekezések (Naturwissenschaftl. Abhandlungen) Bd. XXI. 4. Bd. XXII. 1–3. 1891–92. 8°.
Mathematikai Értekezések. Bd. XIV. 5. Bd. XV. 1. 1891–92. 8°.
Mathematikai Értesitö. (Mathematischer Anzeiger) Band X, 1–7. 1891–92. 8°.
Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mittheilungen). Band XXIV, 8–10. 1891. 8°.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte. Band IX, 1. 2. Bd. X, 1. Berlin 1892. 8°.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

A m. kir. Földtani intézet évkönyve. Bd. X. Nr. 2. 3. 1892. 8°.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. X. Nr. 1. 2. 1892. 8°.
Földtani Közlöny. Bd. XXII. Nr. 5–10. 1892. 8°.
Supplement Katalog. 1892. 8°.

K. Ungarische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:

Pungur, Gryllodea regni Hungariae. 1891. 4°.
Hermann, Petényi der Begründer der wissenschaftlichen Ornithologie in Ungarn. 1891. 4°.
Daday, Literatura zoologica Hungarica. 1891. 8°.

Instituto de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque naútico para 1894. Madrid 1892. 4°.
Anales. Seccion 2ª. Observaciones meteorológicas. Año 1891. 1892 fol.

Meteorological Department of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. August–Dezember 1891. Januar–Mai 1892. fol.
Meteorological Observations. August–Dezember 1891. Januar–Mai 1892. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. V. part 1. 1892. fol.
Cyclone Memoirs. Part III. 1890. 8°.

Revenue and Agricultural Department of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall in the mountain districts. 1892. fol.

Indian Museum in Calcutta:

List of the Batrachia by W. L. Sclater. London 1892. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXV. part 2. 3. 1892. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VII. part 6. 1892. 8⁰.
Transactions. Vol. XV. part 3. 1892. 4⁰.

Museum of comparative Zoölogy in Cambridge:

Memoirs. Vol. XIV. Nr. 2. 1892. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge Mass:

Annals. Vol. XV. part 2. Karlsruhe 1892. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV. Vol. 4. 1892. 4⁰.
Bullettino mensile 1892. Fasc. 26—29. 8⁰.

Observatory in Cincinnati:

Publications. Nr. XII. 1892. 4⁰.

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1891. 1. Hälfte. 1892. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 27. Paris 1891. 8⁰.

Universität in Christiania:

Jahrbuch des meteorol. Instituts 1890. 1892. 4⁰.
Archiv for Mathematik. Bd. XV, 2. 3. 1892. 8⁰.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32. Heft 4. 1892. 8⁰.
Axel Johannessen, Die epidemische Verbreitung des Scharlachfiebers in Norwegen. 1884. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. 35. Jahrg. 1890/91. 1892. 8⁰.

Chemiker Zeitung in Cöthen:

Chemiker Zeitung. Nr. 49—52. 55—100. Cöthen 1892. fol.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mittheilungen. N. F. Band 1. Jahrg. 1889 u. 1890. 1891. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. VIII. Heft 1. 1892. 4⁰.
Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Gesellschaft. 1893. 8⁰.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tom. VII, 2. 3. 4. 1892. 4⁰.

Colorado scientific Society in Denver:

Report on technical determination of Zinc. Pueblo 1892. 8⁰.
The Post-Lamarie Beds of Middle Park, Colo. by Whitman Cross. 1892. 8⁰.
F. C. Knight, A volumetric method. 1892. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XII. Janvier—Août 1891. 8⁰.

Meteorologisches Observatorium in Dorpat:

Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1891. Bd. 6. Heft 1. 1892. 8⁰.

Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat:

Sitzungsberichte. Bd. IX. Heft 3, 1891. 1892. 8⁰.
Schriften Nr. VI. 1891. 4⁰.

Kais. livländische gemeinnützige u. ökonomische Sozietät in Dorpat:

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen für die Jahre 1889—1891. 1892. 4⁰.

Pollichia in Dürkheim a. d. H.:

Festschrift zur 50jährigen Stiftungsfeier. 1892. 8⁰.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. IV. 1892. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

75. Jahresbericht für die Jahre 1890/91. 1892. 8⁰.

R. Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Serie. Vol. XV. disp. 2. 1892. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt:

Abhandlungen. Bd. XVII, 1. 2. 1884—91. 4⁰.
Bericht. 1892. 8⁰.
O. Boettger, Katalog der Batrachier Sammlung im Museum der Gesellschaft. 1892. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für das Jahr 1890/91. 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftl. Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. 9. Jahrg. Nr. 11. 12. 10. Jahrg. Nr. 1—8. 1892. 8⁰.
Societatum Litterae. 6. Jahrg. Nr. 1—10. 1892. 8⁰.

Sternwarte in Genf:

Résumé météorologique de l'année 1891 pour Genève. 1892. 8⁰.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:

Botanisch Jaarboek 4. Jaarg. 1892. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie II. Vol. 10. 11. 1890—92. 8⁰.

University Observatory in Glasgow:

Second Glasgow Catalogue of 2156 Stars, by Robert Grant. 1892. 4⁰.

The Journal of comparative Neurology in Granville:

Journal. Vol. II. p. 21—136. 1892. 8⁰.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz:

Mittheilungen. XXVII. Vereinsjahr 1891. 1892. 8⁰.

K. Niederländ. Regierung in Haag:

Nederlandsch kruidkundig archief. II. Ser. Dell VI. Stuk 1. Nijmegen 1892. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax, Nova Scotia:

Proceedings and Transactions. Vol. I. part. 1. 1891. 8⁰.

Kais. Leop.-Carolinische Akademie der Naturforscher in Halle a/S.:

Leopoldina. Heft XXVIII. Nr. 11—20. 1892. 4⁰.

Naturw. Verein für Sachsen und Thüringen in Halle a/S.:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 65. Heft 1—3. Leipzig 1892. 8⁰.

Société Hollandaise des sciences in Harlem:

Archives Néerlandaises. Tom. XXV, 5. XXVI, 2. 3. 1892. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Fennia. Bd. 5. 1892. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Carte géologique de la Finlande, livr. 18—21 accomp. de renseignements. 1890—92.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. XXVII, 1. 2. 1892. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie in Karlsruhe:

Jahresbericht für das Jahr 1891. 1892. 4⁰.

Technische Hochschule in Karlsruhe:

Festgabe zum Jubiläum der 40 jährigen Regierung des Grossherzogs von Baden. 1892. 4⁰.

Ministerial-Kommission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Ergebnisse der Beobachtungs-Stationen. Jahrgang 1891. Heft 4—12. 1892. 4⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum von Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1892. 8⁰.

Aerztlich-naturwissensch. Verein in Klausenburg:

Értesitö. 4 Hefte. 1892. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 32. Jahrg. 1891. 4⁰.
Beiträge zur Naturkunde Preussens. Nr. 6 u. 7. 1890. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Mémoires. Classe des sciences. Tom. VII. Nr. 5. 1891. 4⁰.

Kais. Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Pamietnik matemat. Tom. XVIII, 2. 1892. 4⁰.
Rozprawy matemat. Serie II. tom 2. 1892. 8⁰.
Sprawozdanie komisyi fizyogr. Tom. 27. 1892. 8⁰.

Botanischer Verein in Landshut:

12. Bericht, 1890—91. 1892. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 3. Série Vol. 28 Nr. 107. 108. 1892. 8⁰.

Archiv der Matemathik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Theil XI. Heft 2. 3. Leipzig 1892. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrschrift. 27. Jahrg. Heft 2. 3. 1892. 8⁰.
Catalog der astronomischen Gesellschaft I. Abth. Stück 5. 1892. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte. Mathem.-phys. Klasse 1892. II. III. 8⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Klasse. Bd. XVIII. Nr. 7. 8. 1892. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal 1892. Nr. 12. 13. Neue Folge. Bd. 46. Nr. 2—10. Leipzig. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen 1891. 1892. 8⁰.

K. K. Berg-Akademie in Leoben:

Programm für das Jahr 1892/93. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule“ in Löwen:

La Cellule. Tom. VIII, fasc. 1. 1892. 4⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 50 Nr. 307. Vol. 51. Nr. 310—316. 1892. 8⁰.
Philosophical Transactions. Vol. 182. A. u. B. 1892. 4⁰.
List of the Members. 30. Novemb. 1891. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 52. Nr. 8. 9. Vol. 53. Nr. 1. 1892. 8⁰.
Memoirs. Vol. 50. 1890—91. 1892. 4⁰.

Chemical Society in London:

Journal. Nr. 356—361. July—December 1892. 8⁰.
Proceedings. Nr. 114. 115. 116. 1892. 8⁰.

Geological Society in London:

The Quarterly Journal. Vol. 48, part 1—4. 1892. 8⁰.

Linnean Society in London:

Transactions. Botany. Vol. III, part 4—7. 1891/92. 4⁰.
The Journal. Zoology. Nr. 148—151.
Botany. Nr. 176. 194—201. 1891/92. 8⁰.
Proceedings. Nov. 1888—June 1890. 1891. 8⁰.
List of the Members 1891/92. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1892. part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1892. part 2. 3. 8⁰.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Vol. 46. Nr. 1180—1206. 1892. 4⁰.

Institut de physique à l'Université de Liége in Lüttich:

Sur un état de la matière caractérisé par l'indépendance de la pression par P. de Heen. Bruxelles 1892. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 19. livr. 2. 3. 1891/92. 8⁰.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Années 1888. 1889. 1890. 1889—91. 4⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. VIII. 1888–91. 1892. 8⁰.

The Governor in Council in Madras:

Results of observations of the fixed stars at the Government Observatory Madras in the years 1874–1876. By C. Michie Smith. 1892. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 33, fasc. 1. 2. 1890–91. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. I. 1891. 4⁰.

Public Library of Victoria in Melbourne:

Ferd. v. Müller, Iconography of Australian Salsolaceous Plants. IX. Decade. 1891. 4⁰.

Observatorio Meteorologico-Magnético Central in Mexico:

Boletin mensual. Tom. III. Nr. 4. 1892. 4⁰.

Sociedad cientifica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y revista. Tom. V. cuad 9. 10. Tom. VI. cuad 1. 2. 1892. 8⁰.

Sociedad de geografia in Mexico:

Boletin. IVª época. Tom. II. Nr. 3–5. 1891–92. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Ser. Tom. II. Nr. 2. 1892. fol.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III. Vol. XI. fasc. 1. 2. 1892. 8⁰.

Académie des sciences in Montpellier:

Mémoires. Sciences. Tom. XI. Nr. 2. 1891. 4⁰.
Mémoires. Médecine. Tom. VI. Nr. 2. 1891. 4⁰.

Royal Society of Canada in Montreal:

Proceedings and Transactions for the year 1891. Vol. 9. 1892. 4⁰.

Geological Survey of Canada in Montreal:

Catalogue of Canadian Plants. Part VI. 1892. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1892. Nr. 2. 8⁰.

Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 23. Jahrg. Nr. 6–10. 1892. 4⁰.

K. technische Hochschule in München:

Bericht über d. J. 1891/92. 4^0.
Programm für die Jahre 1892/93. 8^0.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- u. Schulangelegenheiten in München:

Geognostische Jahreshefte. IV. Jahrg. 1891. Cassel 1892. 4^0.
Die Neuenburgischen Marine-Chronometer beobachtet u. prämiirt auf der Neuenburger Sternwarte. Neuchatel 1892. 4^0.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Série II. Tom. XI. fasc. 25. Paris 1892. 8^0.

Accademia delle scienze fisiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. II. Vol. VI. fasc. 6. 1892. 4^0.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. 10. Bd. 3. Heft. Berlin 1892. 8^0.

Institute of Engineers in Newcastle upon Tyne:

Transactions. Vol. 39. part 3. Vol. 40. part 5. Vol. 41. part 3. 4. 5. 1892. 8^0.

The American Journal in New-Haven:

Journal of Science. 3. Series Vol. 43 Nr. 257—260. Vol. 44 Nr. 261. 262. May – October 1892. 8^0.

Observatory of Yale University in New-Haven:

Report for the year 1891/92. 8^0.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VI. Nr. 1 – 6. 1891/92. 8^0.
Transactions. Vol. X. Nr. 7. 8. Vol. XI. Nr. 1 – 5. 1891/92. 8^0.

American Museum of natural History in New-York:

Annual Report for the year 1891. 1892. 8^0.

American Chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XIV. Nr. 4 – 7. 1892. 8^0.

American geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXIV. Nr. 2. 3. 1892. 8^0.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. IX. Band. 1892. 8^0.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Band XVII. 1. und Mathematische Abtheilung. Band XIV. 1892. 8^0.

Verein für Naturkunde in Offenbach:

29—32. Bericht, 1887—1891. 1892. 8⁰.

Radcliffe Observatory in Oxford:

Results of astronomical and meteorological Observations made in the year 1887. 1891. 8⁰.

R. Università in Padua:

Relazione letta nell' Aula Magna il 26. Nov. 1892 dal Rettore Prof. Carlo F. Ferraris. 1892. 4⁰.

Onoranze centenarie a Galileo Galilei. Discorso del Rettore Magnifico. 1892. fol.

Per il terzo centenario della Inaugurazione di Galileo Galilei nello studio di Padova. 1892. fol.

Circolo metematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VI. fasc. 3. 4. 5. 1892. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Annata 15. 1892, Gennaio-Agosto. gr. 8⁰. 1892.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1892 Nr. 26—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 114 Nr. 26. Tom. 115 Nr. 1—25. 1892. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

14. Rapport. 1891. 4⁰.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 607—612. Juillet—Décembre 1892. 4⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. III. Sér. Tom. 3. 1891. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tom. I. fasc. 4. Tom. II. fasc. 1—3. 1890/91. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Bulletin. VII. Sér. Tom. 13. 1er 2d et 3e Sémestre. 1892. 8⁰.
Comptes rendus. 1892 Nr. 12—16. 8⁰.
Bulletin. VII. Sér. tom. 13. trimestre 2. 1892. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XX. Nr. 3—6. 1892. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVII, Nr. 6. 7. 1892. 8⁰.
Mémoires. Tom. V. Nr. 4. 1892. 8⁰.

Zeitschrift L'Electricien in Paris:

L'Électricien. 2. Ser. Tom. IV. Nr. 79—104. 1892. 4⁰.

Comité géologique in St. Pétersbourg:

Mémoires. Vol. XI. Nr. 2. XIII. Nr. 1. 1891 u. 1892. 4⁰.
Bulletins. Vol. IX. Nr. 9. 10. Vol. X. Nr. 1—9. XI. 1—4. et Supplément au Tom. X. 1891—92. 8⁰.

Kaiserl. botanischer Garten in St. Petersburg:

Trudy. Tom. XII. Nr. 1. 1892. 8⁰.

Russische astronomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Iswestija. Heft 1. 1892. gr. 8⁰.

Chemisch-physikalische Gesellschaft der k. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXIV. Nr. 5—8. 1892. 8⁰.

Kais. russische mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Band XXVIII. 1891. 8⁰.

Institut Impérial de médecine expérimentale in St. Petersburg:

Archives des sciences biologiques. Tom. I. Nr. 3. 1892. 4⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1892. part. 1. 8⁰.

Alumni Association of the Philadelphia College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 29 Nr. 2. 1892. 8⁰.

Pennsylvania Geological Survey in Philadelphia:

Atlas: Southern Anthracite Field. Part IV. B. V. VI. 1892. 8⁰.

American phylosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. XXX. Nr. 137. 138. 1892. 8⁰.
Transactions. N. S. Vol. XVII. part 1. 2. 1892. 4⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. VIII. pag. 85—156. 1892. 4⁰.

Portland Society of natural history in Portland:

The Portland Catalogue of Maine Plants. 2d ed. 1892. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band VII. Theil I. 1892. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen und Prag:

Mittheilungen der deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag Wien 1892. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorolog. Beobachtungen im J. 1891. 1892. 4°.
Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1888—1891. Appendix zum 49—52. Jahrg. 1893. 4°.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Casopis. Tom. XXI. Heft 5. 6. 1892. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. Heft 3, 1890/91. 1892. 8°.

Naturforscher Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. XXXV. 1892. 8°.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Ser. V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. I. 1. Sem. fasc. 11. 12. 2. Sem. fasc. 1—10. 4°.
Atti. Serie IV. Memorie della classe di scienze fisiche. Vol. VI. 1890. 4°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 44 sessione VI. VII. Anno 45 sessione I. II. 1891/92. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1892. Nr. 2. 8°.

Specola Vaticana in Rom:

Pubblicazioni. Fasc. II. 1891. 4°.

Ufficio centrale meteorologico Italiano in Rom:

Annali. Vol. X. parte I—IV. 1892. 4°.
Annali. Vol. XI. parte 3. 1889. 1892. fol.

Academy of science in St. Louis:

Transactions. Vol. V. Nr. 3. 4. Vol. VI. Nr. 1. 1892. 8°.

American Association for the Advancement of Science in Salem:

Proceedings. 40th Meeting. 1892. 8°.

Société Scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tom. II. livr. 1. 2. 1892. 4°.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Santiago (Chile):

Verhandlungen. Band II. Heft 4. 1892. 8°.

Department of Mines and Agriculture in Sidney:

Annual Report for the year 1891. 1892. fol.
Palaeontology. Nr. 5. 1892. fol.

Museum in Stavanger:

Aarsberetning for 1891. 1892. 8°.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin. Tom. XXVI. fasc. 7. 8. 9. 1892. 8°.

Geological Survey of New South Wales in Sydney:

Records. Vol. III, part. 1. 1892. 4°.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico).

Boletin. Tom. I. Nr. 10—12. 1892. 4°.
Annuario XIII. Año 1893. 1892. 8°.

Royal Society in Tasmania:

Papers and Proceedings for 1891. 1892. 8°.

College of Science, Imperial University, Tokyo, Japan:

Journal. Vol. V. part. 2. 1892. 4°.
The Calendar for the year 1890/91 and 1891/92. 1891/92. 8°.

Medicinische Fakultät der Universität Tokio:

Mittheilungen. Bd. I. Nr. 5. 1892. 4°.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. II. part. 2. 1892. 8°.

Società adriatica di Scienze naturali in Triest:

Bollettino. Vol. XIII. parte 1. 2. 1891—92. 8°.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazione meteorologiche dell' anno 1891. 1892. 8°.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek. Jaargang 32. Deel 2 1880. Jaarg. 43. 1891. 1892. 4°.

Physiologisches Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht

Onderzoekingen. IV. Reeks. Deel II. Stuk 1. 1892. 8°.

Smithsonian Institution in Washington:

Report 1889—1890. 1891. 8°.
Contributions to knowledge. Vol. XXXVIII. 1892. 4°.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report of the Superintendent for the year 1890—91. 8°.
Observations during the year 1888. 1892. 4°.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. XI. 1892. 8⁰.

U. S. Coast and geodetic Survey Office in Washington:

Report during the year ending June 1890. 1892. 4⁰.
Bulletin. Nr. 25. 1892. 4⁰.

U. S. Geological Survey in Washington:

Mineral Resources of the United States for 1889—90. 1892. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen 1892 Nr. 6—10. 4⁰.
Jahrbuch. Band 42 Heft 1. 1892. 4⁰.
Abhandlungen. Band XVII, Nr. 2. 1892. fol.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Band XXXV. 1890. 1892. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1892 Nr. 26—38. 40—45. 47—49. 51. 52. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mitteilungen. Band XXII. Heft 3—5. 1892. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 42. I. u. II. Quartal. 1892. 8⁰.

K. K. öster. Gradmessungs-Kommission in Wien:

Astonomische Arbeiten. Bd. III. Längenbestimmungen. 1891. 4⁰.
Verhandlungen über die am 21. April u. 2. September abgehaltenen Sitzungen. 1892. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band VII. Nr. 3. 1892. gr. 8⁰.

v. Kuffner'sche Sternwarte in Wien:

Publikationen. Band II. 1892. 4⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. 45. Jahrgang. 1892. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Sitzungsberichte. N. F. Band XXVII. Nr. 4. 5. 1892. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1892. Nr. 4—6. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Yokohama:

Mittheilungen. Heft 48—50. 1892. 4⁰. Band V. Supplem.-Heft 2. 3. 1892. fol.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

5. Jahresbericht. 1891. 1892. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 37. Jahrg. Heft 1. 2. 1892. 8⁰.
Generalregister der Publikationen. 1892. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

S. H. Albert I. Fürst von Monaco:

Résultats des Campagnes scientifiques. Fasc. II. 1892. 4⁰.

Lucien Anspach in Brüssel:

Le rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur. Liége (1892). 8⁰.

Julius Bergbohm in Wien:

Entwurf einer neuen Integralrechnung. Leipzig 1892. 8⁰.

Giovanni Capellini in Bologna:

Res Ligustiche XX. Gerolamo Guidoni di Vernazza e le sue scoperte geologiche. Genova 1892. 8⁰.
I. tronchi di Bennettitee dei Musei Italiani. 1892. 4⁰.

Édouard Jannetaz in Paris:

Nouvelles recherches sur la propagation de la chaleur dans les corps cristallisés. Paris 1892. 8⁰.
Notice sur les travaux scientifiques de M. Édouard Jannetaz. 1892. 4⁰.

A. Kurz in Augsburg:

Beiträge zur geometrischen Optik. Berlin 1892. 4⁰.
Probleme der elastischen Biegung. s. l. 1892. 8⁰.
Theorie und Versuche über hydraulischen Druck (Sonderabdruck 1892. 8⁰.
Die Central- und Momentan-Achse. 1892. (Ausschnitt.)

Émile Lemoine in Paris:

5 Broschüren, mathematischen Inhalts (Sep.-Abdr.). 1891/92 8⁰.

Alexander Macfarlane in Austin, Texas:

Principles of the Algebra of Physics. Salem 1891. 8⁰.
On exact Analysis as the basis of language. 1892. 8⁰.

G. Omboni in Padua:

Achille de Zigno, cenni biografici. Padova 1892. 8⁰.

Friedrich Prym in Würzburg:

Ueber orthogonale etc. Substitutionen. Göttingen 1892. 4⁰.
Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen von A. Krazer und F. Prym. Leipzig 1892. 4⁰.

M. Rajna in Mailand:

Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano. 1892. 8⁰.

Dr. Saint-Lager in Lyon:

La priorité des noms des plantes. Paris 1890. 8⁰.
Considérations sur le polymorphisme de quelques espèces du genre Bupleurum. Paris 1891. 8⁰.

Michele Stossich in Triest:

I distomi degli uccelli. 1892. 8⁰.
Nuova Serie di elminti veneti. Zagreb 1891. 8⁰.
I distomi dei mammiferi. 1892. 8⁰.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. Nr. LXXX. 1892. 8⁰.

de Quatrefages de Bréan, Jean Louis Armand (Nekrolog) 207.

Radlkofer Ludwig 328.
Rauff Gustav 1.
Römer Ferdinand (Nekrolog) 201.
Rollett Alexander (Wahl) 367.
Rüdinger Nikolaus 210.

Sohncke Leonhard 359.
Stas Jean Servais (Nekrolog) 200.

Therese, Königl. Hoheit, Prinzessin von Bayern (Wahl) 365.

v. Voit Karl 21. 196.
Voss Aurel 247.

Weber Wilhelm (Nekrolog) 199.

v. Zittel Karl Alfred 1.

Sach-Register.

Benzolcarbonsäure. Reduktion derselben 21.
Brennerbad, warme Quelle desselben 139.

Curvensystem, durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln definirt 101.

Dihydrobenzol, Synthese desselben 279.
Dihydroparaxylol, Synthese desselben 307.
Druckschriften, eingelaufene 309. 377.

Fläche, Bestimmung derselben durch geodätische Messungen 27.
Flächentheorie, Fundamentalgleichungen derselben 247.
Formen binäre, Darstellung derselben als Potenzsummen 3.

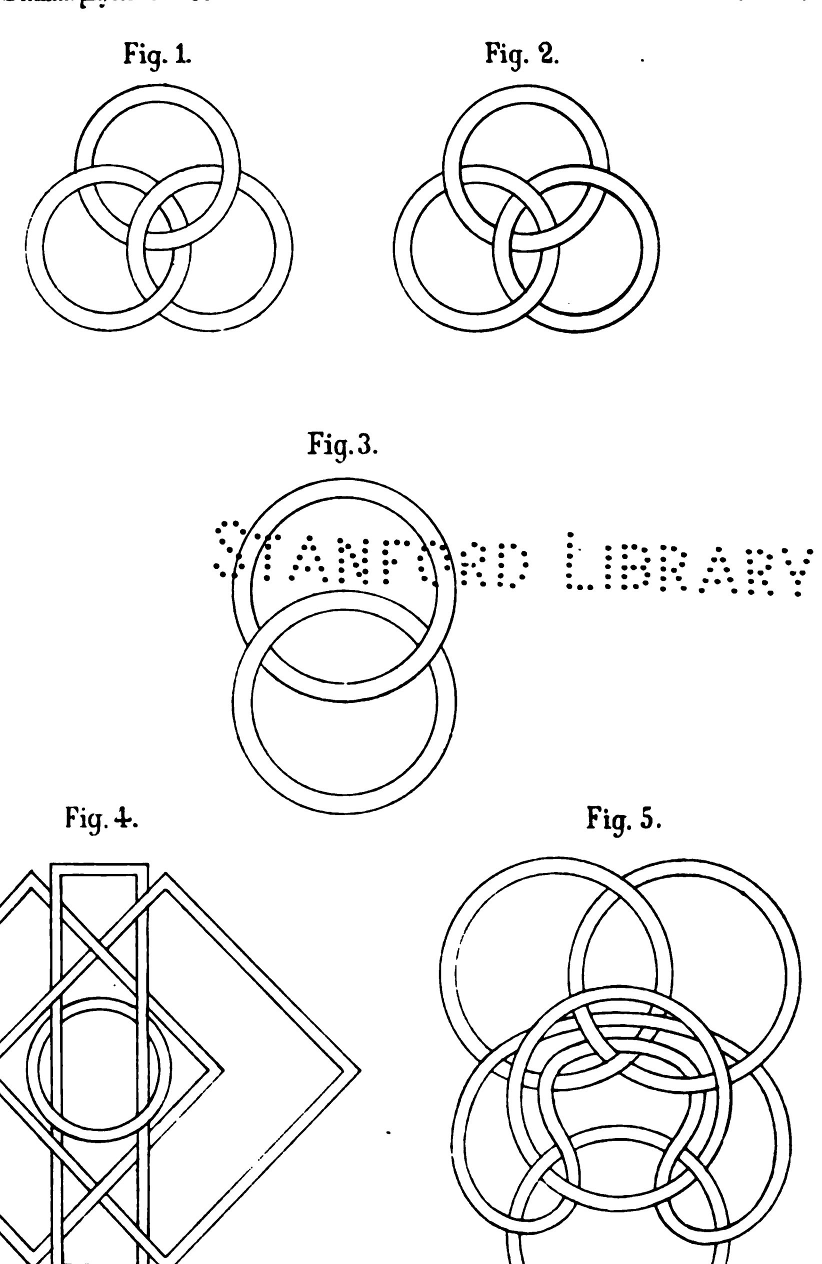
Gleichgewicht der lebendigen Kraft 329.

Hämaglobingehalt des Blutes, beeinflusst durch die Nahrung 21.

Katalog der anthropologischen Sammlung der hiesigen anatomischen Anstalt 210.
Krystalle, Auflösung und Wachsthum derselben 303.

Linien äquipotentiale in durchströmten Platten 371.
Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschifffahrt 259.

Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen 71.
Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen 279.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.





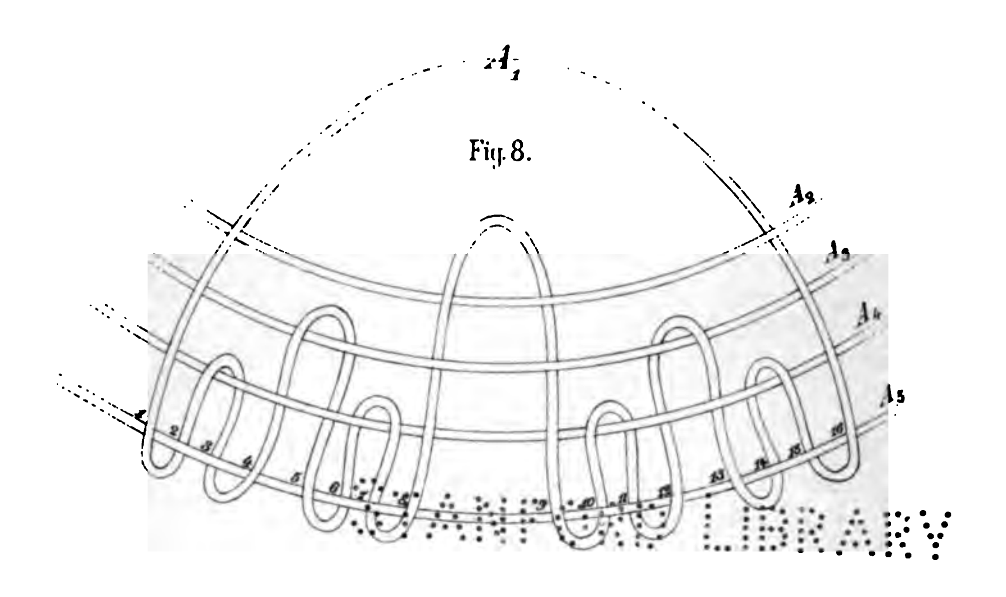

A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

Fig. 8.

A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
3
4
5
17
17
32
32

Fig. 9.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 10.

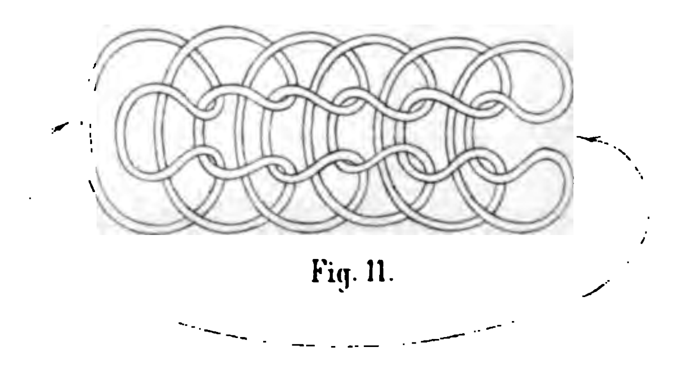


Fig. 11.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 10.

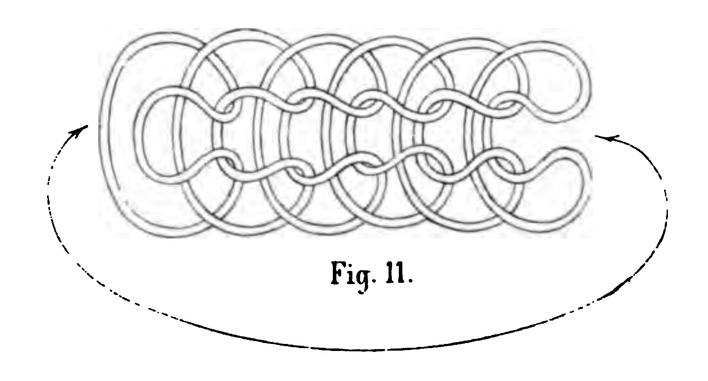


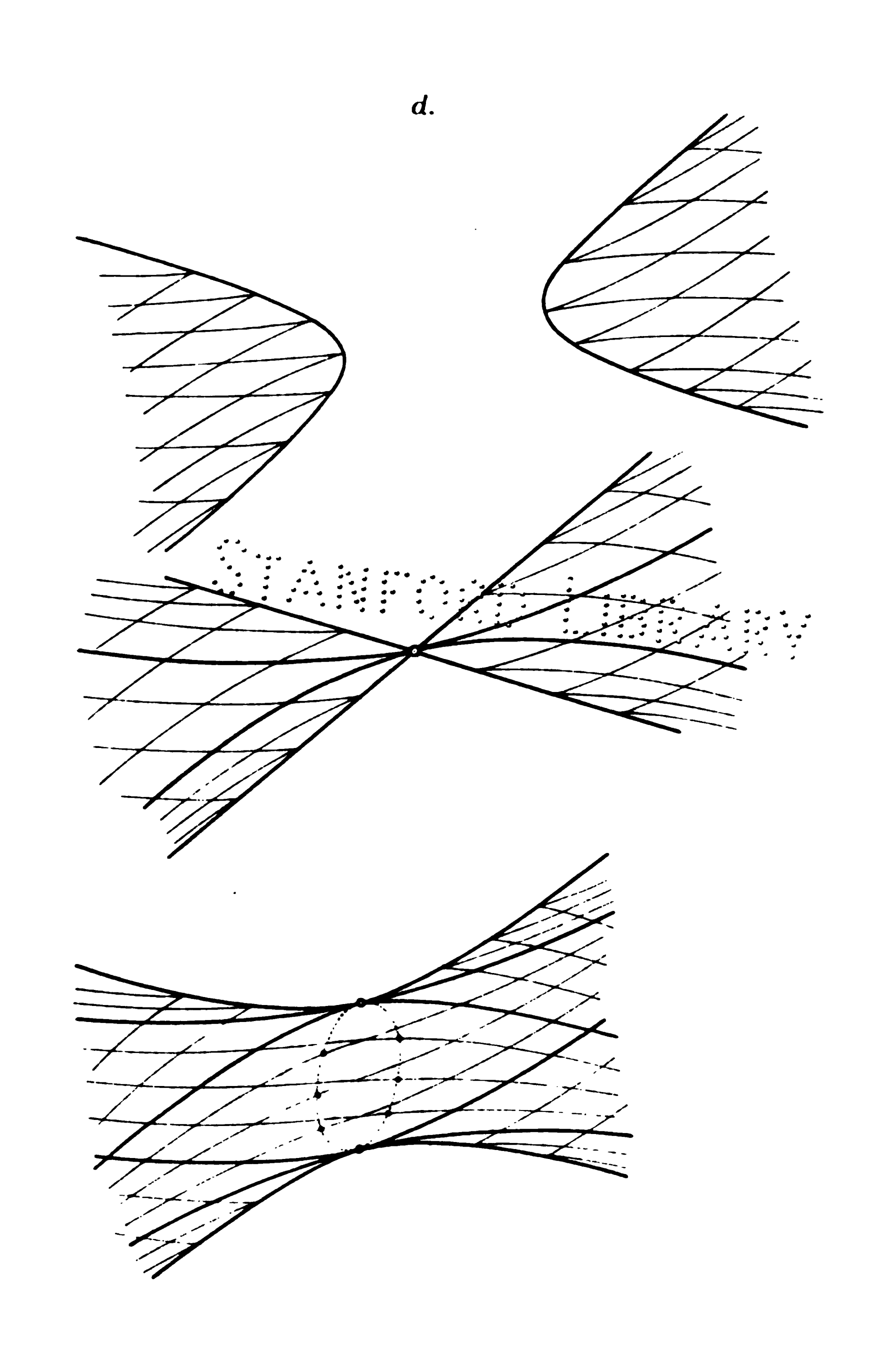
Fig. 11.

c.

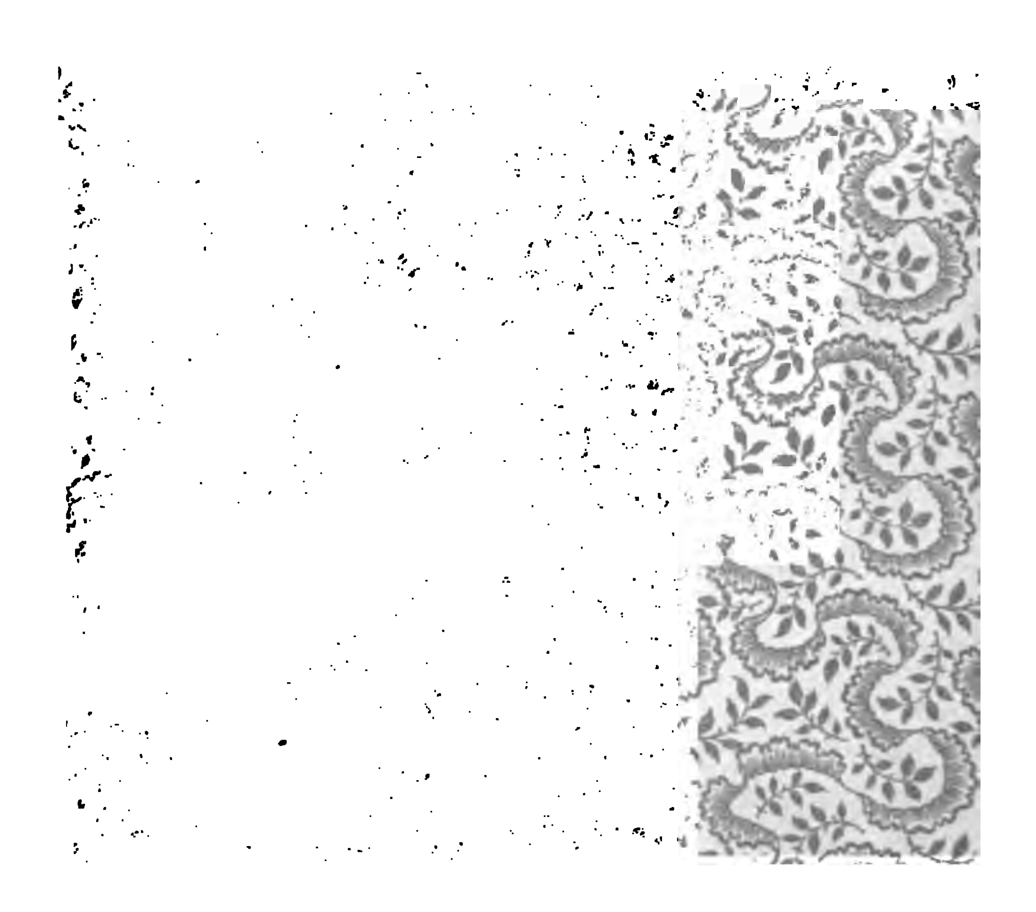


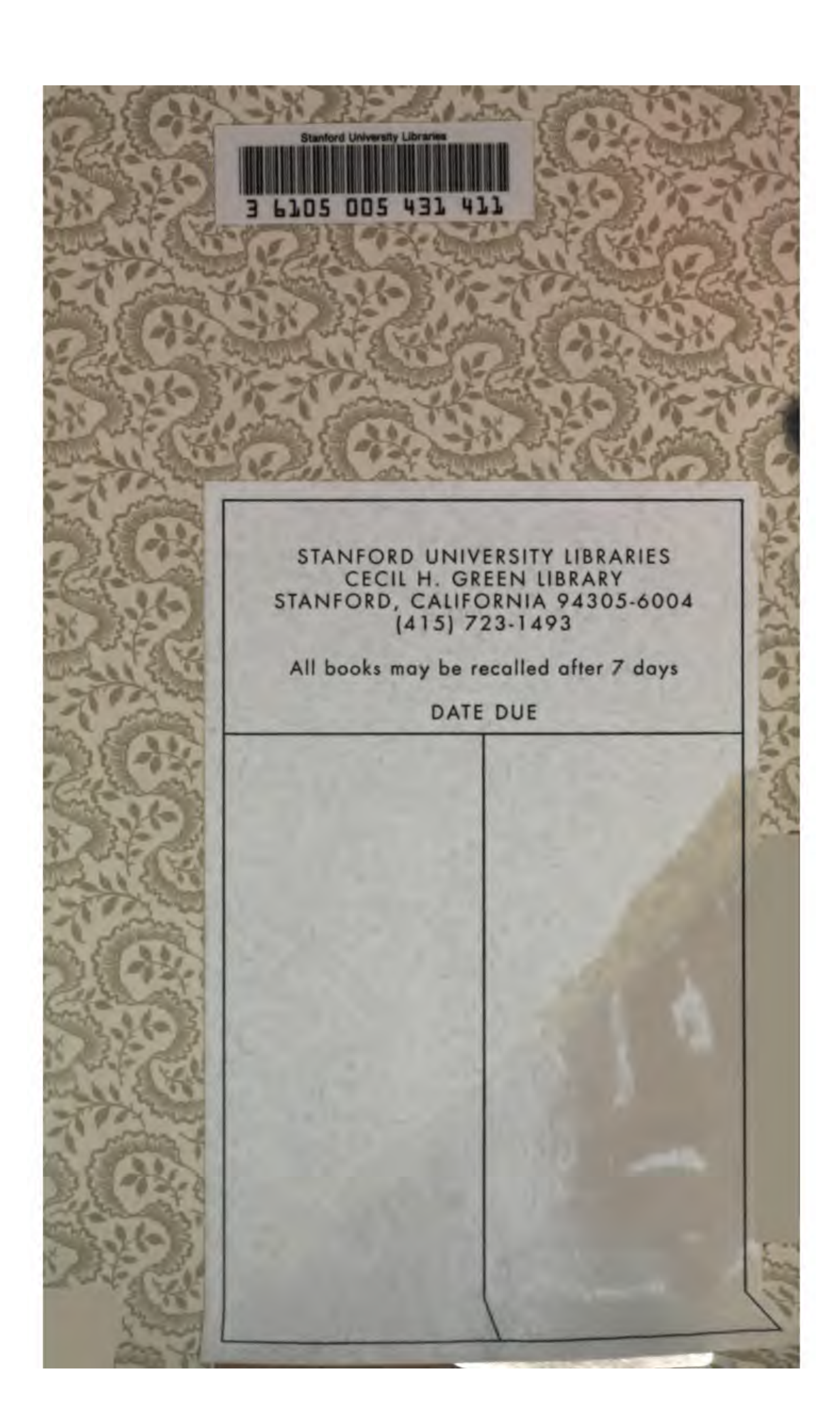
Zur Abhandlung von W. Dyck.




d.







Stanford University Libraries
3 6105 005 431 411

